برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس امید کے ساتھ لکھی گئی ہے کہ یہ ایک دن برقی انجنیئر نگ کی نصابی کتاب کے طور پر پڑھائی جائے گی۔امید کی جاتی ہے کہ اب بھی طلبہ و طالبات اس سے استفادہ کر سکیں گے۔

اس کتاب میں تقریباً 265 حل شدہ مثالیں اور 531 شکلیں ہیں۔اس کے علاوہ 239 مشق اور 458 سوالات دئے گئے ہیں۔تمام سوالات کے جوابات بھی دئے گئے ہیں۔

برقی میدان کے تمام شعبوں کے لئے برقی ادوار بنیادی نصاب ہے لہٰذا اس کتاب پر جتنی زیادہ توجہ دی جائے اتنا بہتر ہو گا۔

کتاب کے پہلے پانچ ابواب میں یک سمتی رو پر تبصرہ کیا گیا ہے جبکہ باقی ابواب میں بدلتی رو پر تبصرہ کیا گیا ہے۔چوتھے باب میں حسابی ایمپلیفائر کو بطور برقی پرزہ متعارف کرایا گیا ہے جس سے کتاب زیادہ دلچسپ ہو جاتی ہے۔

عارضی رد عمل کے بعد برقرار حال ادوار پر غور کیا گیا ہے۔مقناطیسی ادوار میں ٹرانسفارمر پر بھی تبصرہ کیا گیا ہے۔

تین دور ادوار جو عام زندگی میں نہایت اہم ہیں، ان کے بارے ایک باب ہے۔اس باب میں برقی طاقت کی اکائی اور ناپ پر تبصرہ کیا گیا ہے۔

تعددی رد عمل اور چھلنی کو تفصیل سے دیکھا گیا ہے۔پست گزار، بلند گزار، پٹی گزار اور پٹی روک چھلنی پر تفصیلی غور کیا گیا ہے۔

لاپلاس بدل اور فوریئر بدل پر تبصرے کے بعد ان کی مدد سے ادوار حل کرنا سکھایا گیا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ طلباء ان ابواب کو پسند کریں گے۔

آخر میں چار سرا مساوی ادوار پر غور کیا گیا ہے جو برقیات کے میدان میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

کتاب کے آخر میں فرہنگ دیا گیا ہے۔کتاب میں کسی بھی موضوع تک جلد پہنچنے کے لئے فرہنگ کو استعمال کریں۔اردو کے علاوہ انگریزی زبان میں بھی فرہنگ دیا گیا ہے۔

یہ کتاب Ubuntu استعمال کرتے ہوئے XeLatex میں تشکیل دی گئی جبکہ سوالات کے جوابات wxMaxima کی مدد سے حاصل کئے گئے ہیں۔

یہ کتاب درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے ہوئے لکھی گئی ہے۔

Basic Engineering Circuit Analysis by J. David Irwin and R. Mark Nelms

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

- http://www.urduenglishdictionary.org
- http://www.nlpd.gov.pk/lughat/

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے ای میل پتہ پر کریں۔میری تمام کتابوں کی مکمل XeLatex معلومات

https://www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔

خالد خان یوسفزئی

21 اگست 2017

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب 1

بنیاد

اس کتاب میں **بین الاقوامی نظام اکائی**[1] استعمال کی گئی ہے جس کی چند بنیادی اکایاں کلو گرام (kg)، میٹر (m)، سیکنڈ (s) اور کیلون (K) ہیں۔ان اکایوں کے ساتھ عموماً شکل 1.1 میں دکھائے گئے ضربیے استعمال کئے جاتے ہیں جن سے آپ بخوبی واقف ہیں۔

1.1 برقی بار، برقی رو اور برقی دباو

اس کتاب میں **برقی بار**[2] اور **برقی رو**[3] کلیدی کردار ادا کریں گے۔ برقی بار کی اصطلاح کو چھوٹا کر کے صرف **برق** یا صرف بار کی اصطلاح استعمال کی جائے گی جبکہ برقی رو کی اصطلاح کو چھوٹا کر کے رو کی اصطلاح استعمال کی جائے

شکل 1.1: بین الاقوامی نظام اکائی کے ضربیے۔

[1] SI system
[2] electric charge
[3] electric current

گی۔ برقی بار کی حرکت کو برقی رو کہتے ہیں۔چونکہ بار کی حرکت سے توانائی ایک مقام سے دوسرے مقام پر منتقل ہوتی ہے لہٰذا ہماری دلچسپی کا مرکز برقی رو ہو گی۔

موصل تار کی مدد سے برقی پرزہ جات کو مختلف انداز میں آپس میں جوڑنے سے برقی دور[4] حاصل ہوتا ہے۔جیسے پائپ سے پانی کو ایک مقام سے دوسرے مقام تک منتقل کیا جاتا ہے، بالکل اسی طرح برقی دور میں ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک بار موصل تار کے ذریعہ پہنچایا جاتا ہے۔یوں اگر پانی کو بار تصور کیا جائے تو حرکت کرتے پانی کو برقی رو تصور کیا جائے گا جبکہ موصل تار کو پائپ تصور کیا جائے گا۔ برقی ادوار سمجھنے میں یہ مشابہت مددگار ثابت ہوتی ہے۔

کسی بھی نقطے پر برقی رو سے مراد اس نقطے سے فی سیکنڈ گزرتا بار ہے۔رو اور بار کے تعلق کو تفرقی[5] صورت میں یوں

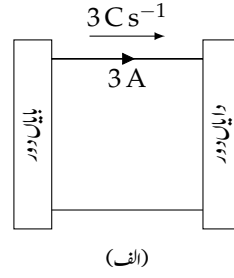
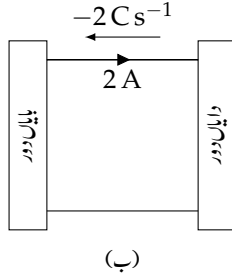
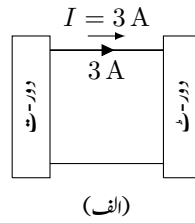
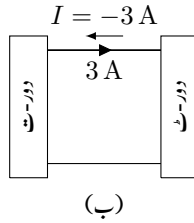
$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.1}$$

اور تکملہ صورت[6] میں یوں

$$q = \int_{-\infty}^{t} i \,\mathrm{d}t \tag{1.2}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں برقی بار کو q سے ظاہر کیا گیا ہے اور برقی رو کو i سے ظاہر کیا گیا ہے۔بدلتا رو متغیرات کو انگریزی کے چھوٹے حروف تہجی مثلاً i یا q سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ غیر متغیر مقدار کو انگریزی کے بڑے حروف تہجی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔یوں غیر متغیر رو کو I اور غیر متغیر بار کو Q سے ظاہر کیا جائے گا۔

بار کی اکائی کو کولمب[7] کہتے ہیں جسے C کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ رو کی اکائی کو ایمپیئر[8] کہتے ہیں۔ایمپیئر کی علامت A ہے۔اگر تار سے ایک سیکنڈ دورانیے میں ایک کولمب کا بار گزر رہا ہو تب تار میں ایک ایمپیئر کی برقی رو پائی جائے گی۔

روایتی طور پر تصور کیا جاتا تھا کہ تار میں مثبت بار کی حرکت سے برقی رو پیدا ہوتی ہے۔اب ہم جانتے ہیں کہ حقیقت میں موصل تار میں مثبت ایٹم ساکن ہوتے ہیں اور آزاد منفی الیکٹران کی حرکت سے رو پیدا ہوتی ہے۔اس حقیقت کے باوجود، تصور کیا جاتا ہے کہ مثبت بار کی حرکت برقی رو کو جنم دیتی ہے۔شکل 1.2-الف میں فی سیکنڈ 3 C کا بار بائیں سے دائیں جانب منتقل ہو رہا ہے جو بائیں سے دائیں جانب 3 A رو کو جنم دیتی ہے۔ شکل 1.2-ب میں

شکل 1.2: مثبت بار اور منفی بار کی حرکت سے پیدا رو۔

شکل 1.3: برقی رو کو بیان کرنے کے درست طریقے۔

فی سیکنڈ $-2\,\mathrm{C}$ کا بار دائیں سے بائیں جانب منتقل ہو رہا ہے جو بائیں سے دائیں جانب $2\,\mathrm{A}$ کی رو پیدا کرتی ہے۔ بار کا قطب اور سمت بہاو جانتے ہوئے رو کی مقدار اور سمت کا تعین ممکن ہوتا ہے۔

غیر متغیر برقی رو کو یک سمت رو[9] کہتے ہیں۔ یک سمت رو کی مقدار وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی۔ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی برقی رو کو بدلتا رو[10] کہتے ہیں۔ ان دونوں کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔ موبائل کی بیٹری یک سمت رو پیدا کرتی ہے جبکہ گھریلو پنکھا بدلتا رو سے چلتا ہے۔

شکل 1.3-الف میں دور ت اور دور ٹ کو دو تاروں سے آپس میں جوڑا گیا ہے۔ بالائی تار میں دور ت سے دور ٹ کی جانب تین ایمپیئر کی رو پائی جاتی ہے۔ اس تار پر تیر کا نشان رو کی سمت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ تار کے نیچے $3\,\mathrm{A}$ لکھ

---

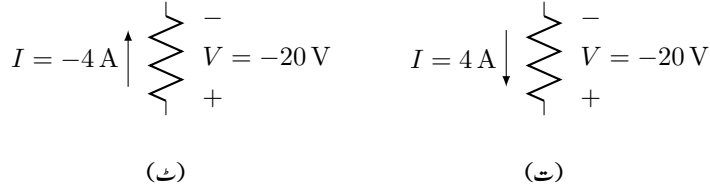
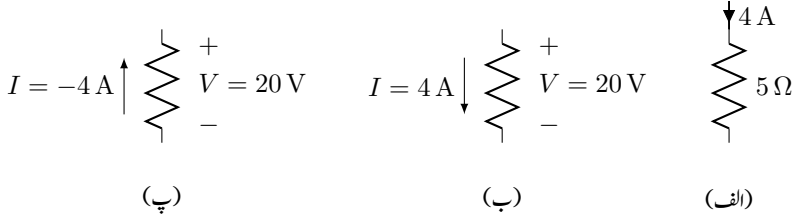
[4] electric circuit
[5] differential form
[6] integral form
[7] Coulomb
[8] Ampere
[9] direct current, DC
[10] alternating current, AC

$I = -4\,\mathrm{A}$ ↑ + $V = 20\,\mathrm{V}$ −
(پ)

$I = 4\,\mathrm{A}$ ↓ + $V = 20\,\mathrm{V}$ −
(ب)

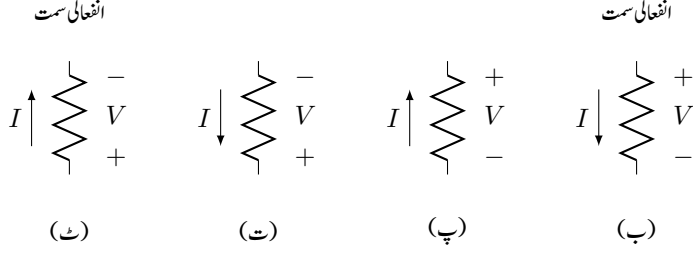
$4\,\mathrm{A}$ $5\,\Omega$
(الف)

$I = -4\,\mathrm{A}$ ↑ − $V = -20\,\mathrm{V}$ +
(ٹ)

$I = 4\,\mathrm{A}$ ↓ − $V = -20\,\mathrm{V}$ +
(ت)

شکل 1.4: مزاحمت کی رو اور دباو لکھنے کے چار ممکنہ طریقے۔

کر رو کی مقدار بیان کی گئی ہے۔اب تصور کریں کہ تار پر تیر کا نشان نہیں دیا گیا ہے۔ایسی صورت میں برقی رو I کو یا تو دور ت سے دور ٹ کی جانب تصور کیا جا سکتا ہے اور یا دور ٹ سے دور ت کی جانب۔پہلی صورت کو شکل-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں تار سے ہٹ کر دور ت سے دور ٹ کی جانب تیر سے رو I کو دکھایا گیا ہے۔چونکہ اصل رو اسی سمت میں ہے لہٰذا $I = 3\,\mathrm{A}$ لکھا جائے گا۔دوسری صورت کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے جہاں دور ٹ سے دور ت کی جانب تیر کھینچا گیا ہے۔یوں شکل-ب میں برقی رو کی سمت دور ٹ سے دور ت کی جانب لی گئی ہے۔چونکہ اصل رو کی سمت تصور کردہ سمت کے الٹ ہے لہٰذا یہاں $I = -3\,\mathrm{A}$ لکھا جائے گا۔شکل-الف اور شکل-ب میں دکھائے گئے دونوں طریقے درست ہیں۔

شکل 1.4-الف میں $5\,\Omega$ کی مزاحمت میں $4\,\mathrm{A}$ کی رو پائی جاتی ہے۔اس مزاحمت کے دونوں سرے مزید پرزہ جات سے جڑے ہیں جنہیں شکل میں نہیں دکھایا گیا ہے۔شکل-ب تا شکل-ٹ میں مزاحمت پر دباو اور مزاحمت میں رو کو مختلف طریقوں سے لکھا گیا ہے۔کسی بھی دو متغیرات کو کل چار انداز میں لکھا جا سکتا ہے۔یہی بات دباو اور رو کے لئے بھی درست ہے لہٰذا انہیں لکھنے کے کل چار طریقے ہیں۔شکل 1.5 میں برقی دباو اور برقی رو کی مقدار لکھے بغیر یہی چار طریقے دوبارہ دکھائے گئے ہیں۔ان میں شکل-ب اور شکل-ٹ کے طرز کو **غیر فعال سمت کی ترکیب**[11] کہتے ہیں۔غیر فعال سمت کی ترکیب میں دباو V اور رو I کی سمتیں یوں چنی جاتی ہیں کہ برقی پرزے میں رو

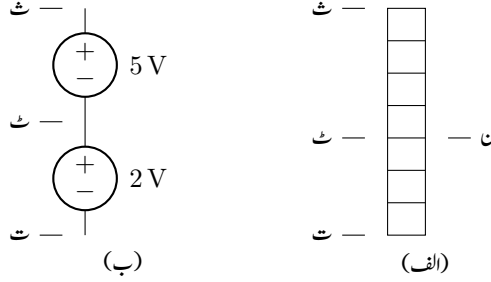
[11] passive sign convention

شکل 1.5: غیر فعال سمت کی ترکیب کی پہچان۔

مثبت سرے سے داخل ہوتی ہے۔یوں شکل-ب میں مزاحمت کے بالائی سرے کو دباو کا مثبت سرا چنا گیا ہے لہٰذا غیر فعال سمت کی ترکیب میں اسی سرے سے رو مزاحمت میں داخل ہو گی۔اسی طرح شکل-ٹ میں مزاحمت کا نچلا سرا دباو کا مثبت سرا ہے لہٰذا غیر فعال سمت کی ترکیب میں اسی سرے سے مزاحمت میں رو داخل ہو گی۔یاد رہے کہ غیر فعال سمت کی ترکیب میں اصل برقی رو اور برقی دباو کی درست سمتوں کا کوئی کردار نہیں۔قانونِ اوہم[12] اور طاقت کے حساب میں غیر فعال سمت کی ترکیب استعمال کی جاتی ہے۔

غیر فعال سمت کی ترکیب میں برقی پرزے پر دباو کی سمت چننے کے بعد رو کی سمت یوں چنی جاتی ہے کہ چنے گئے دباو کے مثبت سر سے پرزے میں رو داخل ہو۔

عام زندگی میں اونچائی کو زمین سے ناپا جاتا ہے جہاں زمین کی اونچائی صفر کے برابر لی جاتی ہے۔یوں اونچائی کے ناپ میں زمین کو نقطہ حوالہ[13] لیا جاتا ہے۔شکل 1.6-الف میں سات منزلہ عمارت دکھائی گئی ہے۔اگر زمین نقطہ ت پر ہو تب نقطہ ن مثبت تین پڑھا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس اگر زمین نقطہ ٹ پر ہو تب نقطہ ن زمین یعنی صفر پر ہے جبکہ زمین نقطہ ث پر ہونے کی صورت میں نقطہ ن منفی چار پر ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نقطہ ن کی مطلق اونچائی کوئی معنی نہیں رکھتی۔اونچائی صرف اس صورت میں معنی خیز ہوتی ہے جب نقطہ حوالہ بھی بیان کیا جائے۔

برقی دباو بھی بالکل اونچائی کی طرح ناپا جاتا ہے۔یوں شکل 1.6-ب میں نقطہ ت کے حوالے سے نقطہ ٹ مثبت دو وولٹ $2\,\mathrm{V}$ پر ہے جبکہ نقطہ ث کے حوالے سے نقطہ ٹ منفی پانچ وولٹ $-5\,\mathrm{V}$ پر ہے۔اسی طرح نقطہ ٹ کے حوالے سے نقطہ ت $-2\,\mathrm{V}$ پر اور نقطہ ث $5\,\mathrm{V}$ پر ہیں۔نقطہ ت کے حوالے سے نقطہ ث $7\,\mathrm{V}$ پر ہے جبکہ نقطہ ث کے حوالے سے نقطہ ت $-7\,\mathrm{V}$ پر ہے۔یاد رہے کہ نقطہ حوالہ کا برقی دباو صفر تصور کیا جاتا ہے۔

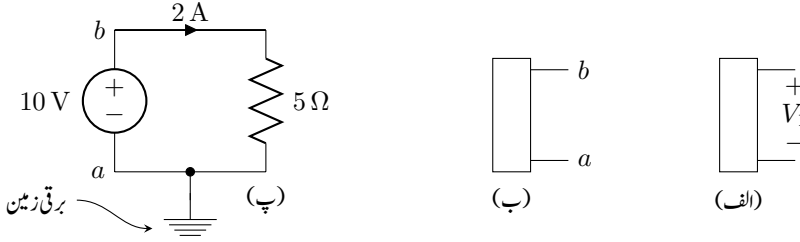
[12] Ohm's law
[13] reference

شکل 1.6: برقی دباو میں نقطہ حوالہ کی اہمیت۔

برقی دباو کی قیمت بھی بیان کرتے ہوئے ضروری ہے کہ نقطہ حوالہ بیان کیا جائے۔ برقی دور میں دباو کی نشاندہی کرتے ہوئے نقطہ حوالہ کو منفی کی علامت $(-)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ مطلوبہ نقطے کو مثبت علامت $(+)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں شکل 1.7-الف میں نچلی تار نقطہ حوالہ ہے۔ یوں اگر $V_1 = 4\,\mathrm{V}$ ہو تب نچلی تار کی نسبت سے بالائی تار مثبت چار وولٹ پر ہو گا۔ اسی طرح $V_1 = -7\,\mathrm{V}$ کی صورت میں نچلی تار کی نسبت سے بالائی تار منفی سات وولٹ پر ہو گا جس کا مطلب ہے کہ بالائی تار کو حوالہ لیتے ہوئے نچلی تار کا برقی دباو مثبت سات وولٹ ہو گا۔ شکل 1.7-ب میں نچلی تار کو a نام دیا گیا ہے جبکہ بالائی تار کو b کہا گیا ہے۔ اس صورت میں نچلی تار کے حوالے سے بالائی تار کے دباو کو V_{ba} لکھا جاتا ہے۔ یوں اگر V_{ba} کی قیمت منفی ہو تب بالائی تار کے حوالے سے نچلی تار پر مثبت دباو ہو گا۔ برقی دور میں عموماً کسی ایک نقطے کو **برقی زمین**[14] چنا جاتا ہے۔ یوں مختلف مقامات کے دباو بیان کرتے ہوئے ہر مرتبہ برقی زمین کی نشاندہی کرنا ضروری نہیں ہوتا۔ شکل 1.7-پ میں برقی زمین کی علامت استعمال کی گئی ہے۔ برقی زمین کا برقی دباو صفر کے برابر لیا جاتا ہے۔ جب کسی نقطے کے دباو کو برقی زمین کی نسبت سے ناپا جائے تب نقطہ حوالہ کا ذکر کرنا ضروری نہیں ہوتا۔ یوں اس شکل میں بالائی تار کا برقی دباو $V_b = 10\,\mathrm{V}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں زیر نوشت میں نقطہ حوالہ کا ذکر نہیں کیا گیا۔ شکل-پ میں اب بھی $V_{ba} = 10\,\mathrm{V}$ یا $V_{ab} = -10\,\mathrm{V}$ لکھا جا سکتا ہے۔

1.2 قانونِ اوہم

قانونِ اوہم[15] سے آپ بخوبی واقف ہیں

$$V = IR \tag{1.3}$$

electrical ground[14]
Ohm's law[15]

شکل 1.7: برقی دباو کا اظہار۔

جو مزاحمت کی برقی رو اور مزاحمت کے برقی دباو کا تعلق بیان کرتا ہے۔اس قانون[16] کے استعمال میں دباو V اور رو I کو غیر فعال سمت کی ترکیب سے چنا جاتا ہے۔شکل 1.8 میں ایک عدد مزاحمت اور دو عدد منبع دباو کا دور دکھایا گیا ہے۔برقی زمین کے حوالے سے مزاحمت کے بائیں سرے پر $5\,\mathrm{V}$ اور دائیں سرے پر $9\,\mathrm{V}$ دباو پایا جاتا ہے۔قانون اوہم میں مزاحمت کے دو سروں کے مابین برقی دباو استعمال کیا جاتا ہے۔یوں مزاحمت کے ایک سرے کو حوالہ لیتے ہوئے مزاحمت کے دوسرے سرے پر برقی دباو لیا جاتا ہے۔شکل-الف میں مزاحمت کا بایاں سرا بطور حوالہ چنا گیا ہے جبکہ مزاحمت کے دائیں سرے کا برقی دباو لیا جائے گا۔یہ بات مزاحمت کے قریب V_R کے بائیں جانب $(-)$ کی علامت اور دائیں جانب $(+)$ کی علامت سے ظاہر کی جاتی ہے۔یوں غیر فعال سمت کی ترکیب کے تحت برقی رو کی سمت دائیں سے بائیں جانب چنی جائے گی۔شکل-الف میں یوں

$$V_R = 9 - 5 = 4\,\mathrm{V}$$

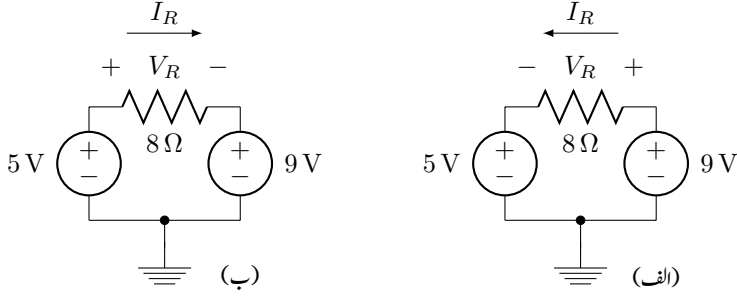
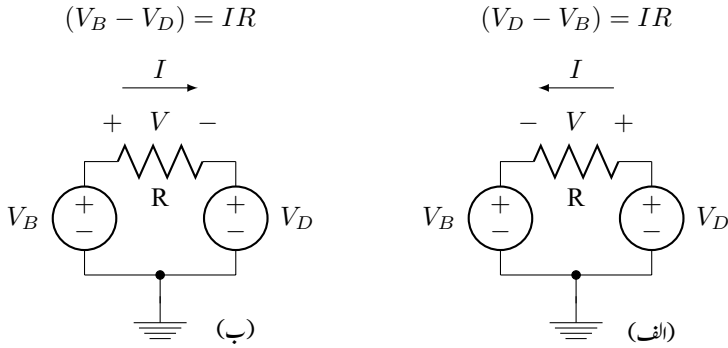
ہو گا جسے اوہم کے قانون میں استعمال کرتے ہوئے

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{4}{8} = 0.5\,\mathrm{A}$$

حاصل ہوتا ہے۔حاصل برقی رو کی قیمت مثبت مقدار ہے جس کا مطلب ہے کہ رو کی سمت وہی ہے جو شکل-الف میں چنی گئی ہے۔

شکل 1.8-ب میں مزاحمت کا دایاں سرا بطور نقطہ حوالہ چنا گیا ہے۔یوں V_R کے دائیں جانب $(-)$ کی علامت لگائی گئی ہے۔غیر فعال سمت کی ترکیب کے تحت رو کی سمت بائیں سے دائیں کو چنی گئی ہے۔یہاں

$$V_R = 5 - 9 = -4\,\mathrm{V}$$

[16] یہ قانون جرمنی کے جارج سائمن اوہم نے پیش کیا۔

شکل 1.8: قانونِ اوہم اور غیر فعال سمت کی ترکیب۔

شکل 1.9: قانونِ اوہم کا صحیح استعمال۔

کے برابر ہے جسے اوہم کے قانون میں استعمال کرتے ہوئے

$$I_R = \frac{-4}{8} = -0.5\,\mathrm{A}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں V_R کی قیمت منفی حاصل ہوئی جس کا مطلب ہے کہ حقیقت میں مزاحمت پر برقی دباو چنی گئی سمت کے الٹ ہے۔ اسی طرح رو I_R کی قیمت بھی منفی حاصل ہوئی ہے جس کا مطلب ہے کہ حقیقت میں رو چنی گئی سمت کے الٹ ہے یعنی برقی رو حقیقت میں دائیں سے بائیں جانب کو ہے۔

شکل 1.9 میں قانون اوہم کا صحیح استعمال دکھایا گیا ہے۔

1.3 توانائی اور طاقت

ثقلی میدان[17] میں میکانی بار m پر قوت $F = mg$ عمل کرتی ہے جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کے برابر ہے۔یوں ثقلی میدان کے مخالف m کو h بلندی تک پہنچانے کی خاطر $w = Fh = mgh$ توانائی درکار ہے۔بالکل اسی طرح **برقی میدان**[18] E میں برقی بار q پر $F = qE$ قوت عمل کرتی ہے اور برقی میدان کے مخالف h فاصلے تک بار کو منتقل کرنے کی خاطر

$$w = qEh \tag{1.4}$$

توانائی درکار ہے۔برقی میدان میں ابتدائی نقطے سے اختتامی نقطے تک اکائی برقی بار منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کو ابتدائی نقطے کے حوالے سے اختتامی نقطے کا برقی دباو کہا جاتا ہے۔

مثال 1.1: برقی میدان $E = 600\,\mathrm{V\,m^{-1}}$ میں $0.2\,\mathrm{C}$ بار قوت کے مخالف $12\,\mathrm{mm}$ فاصلہ دُور منتقل کیا جاتا ہے۔درکار توانائی حاصل کریں۔ابتدائی نقطہ i اور اختتامی نقطہ k کے مابین برقی دباو دریافت کریں۔

حل:درکار توانائی

$$w = 0.2 \times 600 \times 0.012 = 1.44\,\mathrm{J}$$

کے برابر ہے جبکہ برقی دباو

$$V_{ki} = \frac{1.44}{0.2} = 7.2\,\mathrm{V}$$

کے برابر ہے۔

مساوات 1.4 کی تفرقی صورت

$$\mathrm{d}w = Eh\,\mathrm{d}q$$

[17] gravitational field
[18] electric field

لکھی جا سکتی ہے جو چھوٹے برقی بار $\mathrm{d}q$ کو منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی $\mathrm{d}w$ دیتی ہے۔یوں اکائی بار کو منتقل کرنے کی خاطر $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q}$ توانائی درکار ہو گی جسے برقی دباو v کہتے ہیں یعنی

$$v = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q} \tag{1.5}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

مساوات 1.5 کو مساوات 1.1 سے ضرب دینے سے

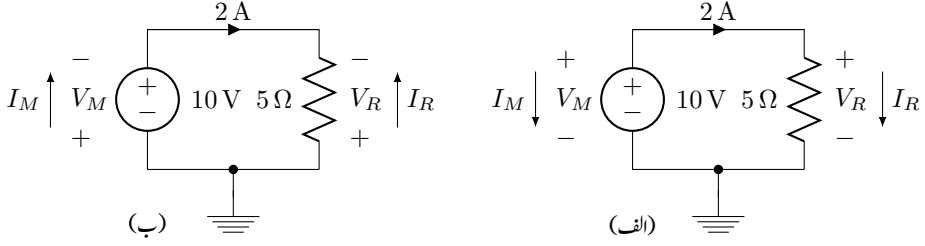
$$v \times i = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}q} \times \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = p \tag{1.6}$$

حاصل ہوتا ہے جو **طاقت**[19] p کو ظاہر کرتا ہے۔فی سیکنڈ درکار توانائی کو طاقت کہتے ہیں۔طاقت کی اکائی **واٹ**[20] W ہے۔مندرجہ بالا مساوات کی تکملہ صورت درج ذیل ہے۔

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} vi \, \mathrm{d}t \tag{1.7}$$

آئیں ان معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 1.10 پر غور کریں جہاں 10 V کے **منبع برقی دباو**[21] کے ساتھ $5\,\Omega$ کی **برقی مزاحمت**[22] جوڑی گئی ہے۔اس دور میں برقی رو کو منبع پیدا کرتی ہے لہٰذا منبع کو **فعال پرزہ**[23] جبکہ مزاحمت کو **غیر فعال پرزہ**[24] کہا جاتا ہے۔**غیر فعال سمت کی ترکیب** کا نام اسی حقیقت سے نکلا ہے کہ اس ترکیب کے استعمال سے غیر فعال پرزہ جات پر مثبت طاقت حاصل ہوتی ہے۔

قانون اوہم[25] کے تحت شکل 1.10 کے دور میں **سمت گھڑی**[26] 2 A کی برقی رو پائی جائے گی جسے دور میں بالائی تار پر تیر کے نشان سے دکھایا گیا ہے۔دور میں 2 A برقی رو سے مراد یہ ہے کہ دور میں کسی بھی نقطے پر اگر دیکھا جائے تو اس نقطے سے فی سیکنڈ 2 C بار گزرے گا۔ اس دور میں نچلی تار کے حوالے سے بالائی تار پر مثبت دس

[19] power
[20] watt
[21] voltage source
[22] electrical resistance
[23] active component
[24] passive component
[25] Ohm's law
[26] clockwise

شکل 1.10: طاقت کی پیداوار اور طاقت کا ضیاع۔

وولٹ کا دباو ہے۔یوں مزاحمت کے بالائی یعنی مثبت سرے سے مزاحمت کے نچلے یعنی منفی سرے کی جانب فی سیکنڈ دو کولمب بار منتقل ہوتا ہے۔یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے ثقلی میدان میں بلند مقام سے میکانی بار گر رہا ہو۔دو کولمب کا بار دس وولٹ نیچے گرتے ہوئے 20 J کی **مخفی توانائی**[27] کھوئے[28] گا جو **حرارتی توانائی**[29] میں تبدیل ہو کر مزاحمت کو گرم کرے گی۔ہم کہتے ہیں کہ مزاحمت میں فی سیکنڈ توانائی کا **ضیاع**[30] 20 J ہے یا کہ مزاحمت میں **طاقتی ضیاع**[31] 20 W ہے۔مزاحمت میں طاقت کے ضیاع کو **حراری ضیاع**[32] اور **مزاحمتی ضیاع**[33] بھی کہتے ہیں۔

غیر فعال سمت کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ہم شکل 1.10-الف میں منبع کے دباو کو V_M اور مزاحمت کے دباو کو VR چننے کے بعد ان دباو کے مثبت سر سے منفی سر کی جانب رو کی سمت چنتے ہیں۔یوں حاصل منبع کی برقی رو I_M اور مزاحمت کی برقی رو I_R کو شکل-الف میں دکھایا گیا ہے۔شکل- کو دیکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
V_M &= 10\,\mathrm{V}\\
V_R &= 10\,\mathrm{V}\\
I_M &= -2\,\mathrm{A}\\
I_R &= 2\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

---

[27] potential energy
[28] مخفی توانائی کی اصطلاح خفیہ توانائی سے حاصل کی گئی ہے۔
[29] thermal energy
[30] loss
[31] power loss
[32] thermal loss
[33] resistive loss

ان قیمتوں کو مساوات 1.6 میں پر کرتے ہوئے منبع اور مزاحمت کی طاقت حاصل کرتے ہیں۔

طاقت کی منفی قیمت، طاقت کی پیداوار کو ظاہر کرتی ہے $\quad P_M = 10 \times (-2) = -20\,\mathrm{W}$

طاقت کی مثبت قیمت، طاقت کی ضیاع کو ظاہر کرتی ہے $\quad P_R = 10 \times 2 = 20\,\mathrm{W}$

یہاں غیر متغیر طاقت کو بڑے حروف تہجی میں P_M اور P_R لکھا گیا۔مزاحمت کی طاقت مثبت مقدار حاصل ہوئی ہے جبکہ منبع کی طاقت منفی مقدار ہے۔یوں مساوات 1.6 سے حاصل مثبت مقدار طاقت کے ضیاع کو ظاہر کرتی ہے جبکہ منفی مقدار طاقت کی پیدا وار کو ظاہر کرتی ہے۔

شکل 1.10-ب میں برقی دباو کے رخ الٹ چنے گئے جس کی وجہ سے رو کی سمتیں بھی الٹ رخ ہیں۔یوں

$$\begin{aligned} V_M &= -10\,\mathrm{V} \\ V_R &= -10\,\mathrm{V} \\ I_M &= 2\,\mathrm{A} \\ I_R &= -2\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

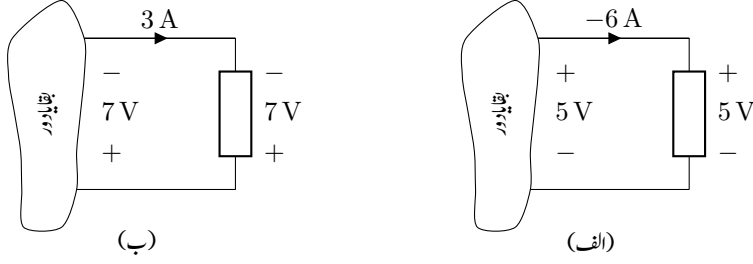
لکھے جائیں گے جن سے دوبارہ

طاقت کی منفی قیمت، طاقت کی پیداوار کو ظاہر کرتی ہے $\quad P_M = (-10) \times 2 = -20\,\mathrm{W}$

طاقت کی مثبت قیمت، طاقت کی ضیاع کو ظاہر کرتی ہے $\quad P_R = (-10) \times (-2) = 20\,\mathrm{W}$

حاصل ہوتے ہیں۔

مثال 1.2: شکل 1.11 میں دو ادوار دکھائے گئے ہیں۔دریافت کریں کہ آیا بیرونی پرزہ بقایا دور کو طاقت فراہم کرتا ہے یا کہ اس سے طاقت حاصل کرتا ہے۔طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

حل: شکل-الف میں برقی رو کی قیمت منفی لکھی گئی ہے جس کا مطلب ہے کہ حقیقت میں رو تیر کے نشان کے الٹ سمت میں ہے۔رو کی سمت الٹ تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ بقایا دور کے مثبت سرے پر رو اندر داخل ہوتی ہے۔یوں بقایا دور غیر فعال ہے۔بیرونی پرزے کے مثبت سرے سے حقیقی رو خارج ہوتی ہے لہٰذا یہ فعال پرزہ ہے۔یوں بیرونی پرزہ طاقت فراہم کرتا ہے جبکہ بقایا دور میں طاقت خرچ ہوتا ہے۔یہی نتائج غیر فعال سمت کے

شکل 1.11: فعال اور غیر فعال پرزے کی مثال۔

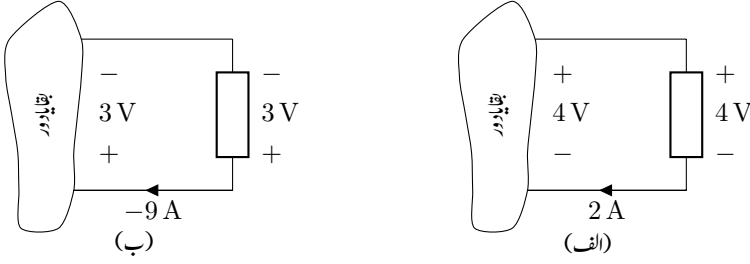
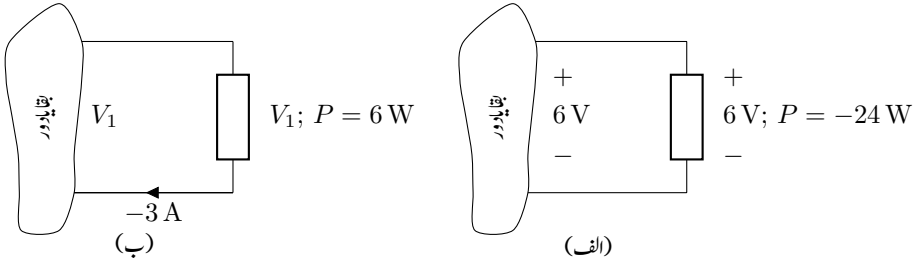
ترکیب سے یوں حاصل ہوتی ہے۔بیرونی پرزے کے برقی دباو کو دیکھتے ہوئے رو کی دکھائی گئی سمت ہی استعمال کی جائے گی۔یوں بیرونی پرزے کی طاقت $P = 5 \times (-6) = -30\,\mathrm{W}$ ہے جو طاقت کی پیداوار ہے۔باقی دور میں رو کی غیر فعال سمت دکھائی گئی سمت کے الٹ ہے لہٰذا طاقت $P = 5 \times 6 = 30\,\mathrm{W}$ حاصل ہوتی ہے جو طاقت کے ضیاع کو ظاہر کرتا ہے۔آپ نے دیکھا کہ بیرونی پرزہ $30\,\mathrm{W}$ طاقت پیدا کرتا ہے جبکہ بقایا دور اتنی ہی طاقت استعمال کرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں قانونِ بقا[34] کارآمد ہے۔کسی بھی دور میں توانائی کی پیداوار اور خرچ برابر ہوتے ہیں۔

شکل-ب میں رو نچلی تار میں دائیں سے بائیں طرف رواں ہے۔یوں بیرونی پرزے کے مثبت سرے سے رو خارج ہوتی ہے جبکہ بقایا دور کے مثبت سرے میں رو داخل ہوتی ہے۔یوں بیرونی پرزہ فعال اور بقایا دور غیر فعال ہے۔بیرونی پرزے کی طاقت $P = 7 \times (-3) = -21\,\mathrm{W}$ ہے جو طاقت کی پیداوار ہے جبکہ باقی دور کی طاقت $P = 7 \times 3 = 21\,\mathrm{W}$ ہے جو طاقت کی ضیاع کو ظاہر کرتی ہے۔

مشق 1.1: شکل 1.12 میں بیرونی پرزے کی طاقت حاصل کریں۔

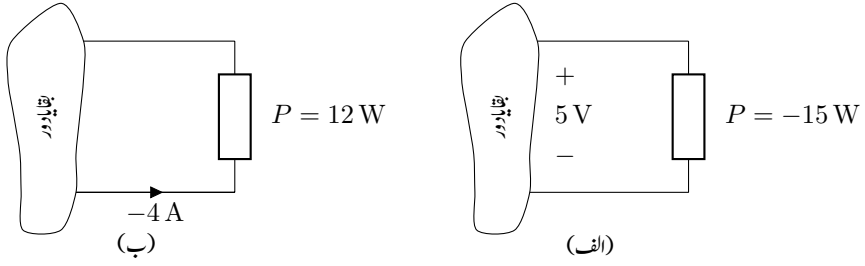
جوابات: (الف) $8\,\mathrm{W}$ ؛ (ب) $27\,\mathrm{W}$

---

[34] law of conservation of energy

شکل 1.12: فعال اور غیر فعال پرزے کی مشق۔

شکل 1.13: طاقت اور ایک متغیرہ دیا گیا ہے۔ دوسرا دریافت کرنا ہے۔

مثال 1.3: شکل 1.13-الف میں برقی رو کی مقدار اور سمت حاصل کریں جبکہ شکل-ب میں برقی دباو اور اس کا مثبت سرا دریافت کریں۔

حل: شکل-الف میں بیرونی پرزے کی طاقت منفی ہے۔ یوں بیرونی پرزہ طاقت پیدا کرتا ہے لہٰذا اس کے مثبت سرے سے رو خارج ہو گی یعنی دور میں گھڑی کے الٹ سمت میں رو پائی جائے گی۔ رو کی قیمت $4\,\mathrm{A}$ ہو گی۔

شکل-ب میں بیرونی پرزے کی طاقت مثبت ہے لہٰذا اس میں طاقت کا ضیاع ہو گا اور برقی رو مثبت سرے سے پرزے میں داخل ہو گی۔ دور میں گھڑی کی سمت میں منفی رو دکھائی گئی ہے لہٰذا حقیقت میں رو گھڑی کے مخالف رخ ہے۔ حقیقی رو کو گھڑی کے الٹ سمت تصور کرتے ہوئے بیرونی پرزے کا نچلا سرا مثبت ہو گا اور برقی دباو کی قیمت $2\,\mathrm{V}$ ہو گی۔

شکل 1.14: طاقت اور ایک متغیرہ دیا گیا ہے۔ دوسرا دریافت کریں۔

مشق 1.2: شکل 1.14 میں نا معلوم متغیرہ دریافت کریں۔

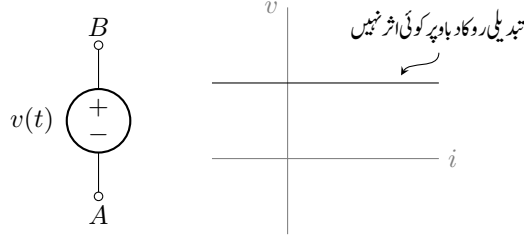
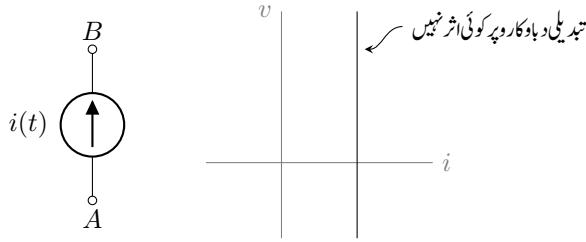
جوابات: (الف) گھڑی کے الٹ $3\,\mathrm{A}$ ؛ (ب) بالائی تار مثبت ہے جبکہ دباو $3\,\mathrm{V}$ ہے۔

آخر میں دوبارہ اس حقیقت کی نشاندہی کرتے ہیں کہ کسی بھی برقی دور میں پیداوار طاقت اور طاقت کا ضیاع برابر ہوں گے۔

1.4 برقی پرزے

برقی پرزوں کو دو اقسام میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ وہ پرزے جو طاقت پیدا کرتے ہیں **فعال پرزے**[35] کہلاتے ہیں جبکہ طاقت ضائع کرنے والے پرزوں کو **غیر فعال پرزے**[36] کہتے ہیں۔ جنریٹر اور بیٹری فعال پرزوں کی مثال ہے جبکہ مزاحمت، امالہ گیر[37] اور برق گیر[38] غیر فعال پرزے ہیں۔

فعال پرزوں پر اس باب میں غور کیا جائے گا جبکہ غیر فعال پرزوں پر اگلے باب میں تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

[35] active components
[36] passive components
[37] inductor
[38] capacitor

شکل 1.15: غیر تابع منبع دباو اور اس کا $i - v$ خط۔

شکل 1.16: غیر تابع منبع رو اور اس کا $i - v$ خط۔

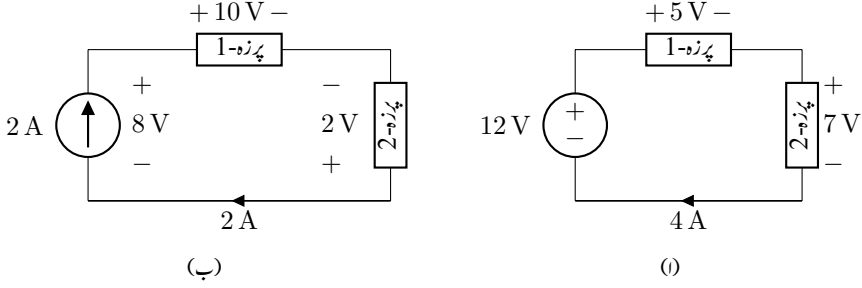
1.4.1 غیر تابع منبع

غیر تابع منبع دباو[39] سے مراد ایسا منبع ہے جو، منبع میں سے گزرتی رو کے قطع نظر، اپنے دو سروں کے درمیان مخصوص برقی دباو برقرار رکھتا ہے۔ غیر تابع منبع دباو کی علامت کو شکل 1.15 میں دکھایا گیا ہے جہاں نقطہ A کے حوالے سے نقطہ B پر $v(t)$ برقی دباو برقرار رہتا ہے۔ شکل میں غیر تابع منبع دباو کا دباو بالمقابل رو $i - v$ خط بھی دکھایا گیا ہے۔ اس خط کے مطابق برقی دباو کی مقدار پر برقی رو کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔

شکل 1.16 میں **غیر تابع منبع رو**[40] کی علامت اور رو بالمقابل دباو $i - v$ خط دکھایا گیا ہے۔ غیر تابع منبع رو سے مراد ایسی منبع ہے جو، منبع پر دباو کے قطع نظر، مخصوص برقی رو برقرار رکھتا ہے۔ غیر تابع منبع رو کے دباو بالمقابل رو خط کے تحت منبع پر برقی دباو کی تبدیلی کا منبع کی رو پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ منبع رو میں مثبت رو کی سمت کو تیر کے نشان سے دکھایا جاتا ہے۔

عام استعمال میں منبع بقایا دور کو طاقت فراہم کرتی ہے۔ شکل 1.14-ب میں اگر بیرونی پرزہ منبع ہو تب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ منبع کو بھی طاقت فراہم کی جا سکتی ہے۔

---

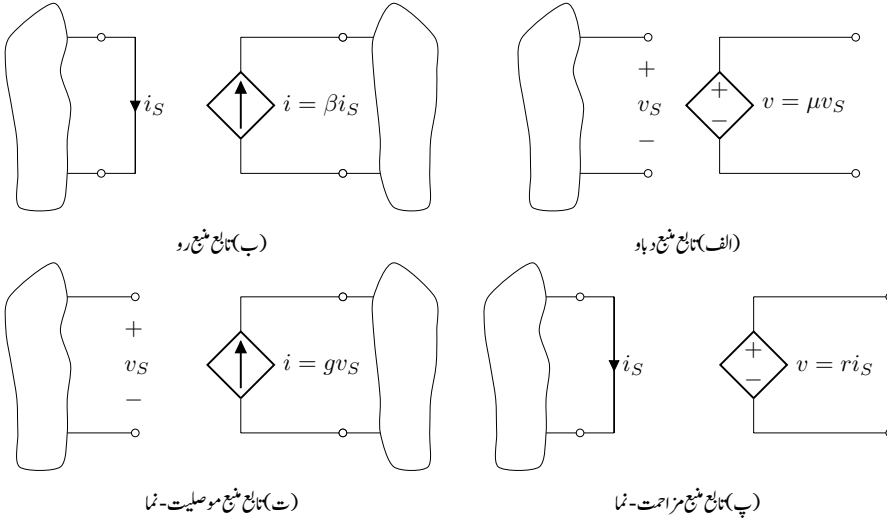
[39] independent voltage source
[40] independent current source

شکل 1.17: طاقت کا حساب۔

منبع محدود صلاحیت کا حامل ہے۔ اگرچہ ہم توقع کرتے ہیں کہ منبع دباو کسی بھی قیمت کی برقی رو فراہم کرتے ہوئے پیدا کردہ برقی دباو برقرار رکھے گا، حقیقت میں کوئی بھی منبع کسی محدود رو کی حد تک ایسا کر پاتا ہے۔

مثال 1.4: شکل 1.17-الف میں تینوں پرزوں کی طاقت دریافت کریں۔ (اشارہ: سلسلہ وار جڑے پرزوں میں یکساں رو پائی جاتی ہے۔)

حل: منبع کے مثبت سر سے رو خارج ہو رہی ہے لہٰذا یہ پرزہ طاقت فراہم کر رہا ہے جبکہ بقایا دو پرزوں کے مثبت سر سے رو پرزے میں داخل ہوتی ہے لہٰذا ان دونوں پرزوں میں طاقت ضائع ہوتا ہے۔ منبع کی طاقت $12 \times (-4) = -48\,\mathrm{W}$ ہے جبکہ پرزہ-1 کی طاقت $5 \times 4 = 20\,\mathrm{W}$ اور پرزہ-2 کی طاقت $7 \times 4 = 28\,\mathrm{W}$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت کی ضیاع $20\,\mathrm{W} + 28\,\mathrm{W} = 48\,\mathrm{W}$ عین طاقت کی پیداوار کے برابر ہے۔

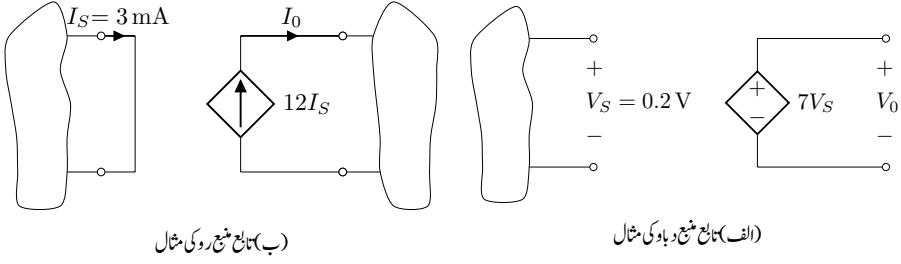
مشق 1.3: شکل 1.17-ب میں تینوں پرزوں کی طاقت حاصل کریں۔

جوابات: منبع رو کی طاقت $-16\,\mathrm{W}$ ہے۔ پرزہ-1 کی طاقت $20\,\mathrm{W}$ ہے۔ پرزہ-2 بھی منبع ہے اور اس کی طاقت $-4\,\mathrm{W}$ ہے۔

شکل 1.18: تابع منبع کے چار اقسام۔

1.4.2 تابع منبع

غیر تابع منبع دباو کے پیدا کردہ دباو کا انحصار منبع سے گزرتی رو پر بالکل نہیں ہوتا۔ اسی طرح غیر تابع منبع رو کی پیدا کردہ رو کا انحصار منبع پر موجود دباو پر بالکل نہیں ہوتا۔اس کے برعکس **تابع منبع دباو**[41] کا پیدا کردہ دباو، دور میں کسی مخصوص مقام کی رو یا دباو پر منحصر ہوتا ہے۔اسی طرح **تابع منبع رو**[42] کی پیدا کردہ رو، دور میں کسی مخصوص مقام کی رو یا دباو پر منحصر ہوتا ہے۔تابع منابع برقیات کے میدان میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں جہاں برقیاتی پرزہ جات مثلاً دو جوڑ ٹرانزسٹر[43] یا میدانی ٹرانزسٹر[44] کے **ریاضی نمونے**[45] تابع منبع سے بنائے جاتے ہیں۔متعدد ٹرانزسٹر پر مبنی برقیاتی ادوار کا حسابی حل انہیں ریاضی نمونوں کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

غیر تابع منبع کو گول دائرے سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ تابع منبع کو ہیرے کی شکل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔شکل 1.18 میں چار اقسام کے تابع منابع دکھائے گئے ہیں۔شکل-الف میں **تابع منبع دباو**[46] کی پیدا کردہ دباو کا انحصار بائیں جانب کے دباو v_S پر ہے۔ یوں v_S **ضابط دباو**[47] کہلاتا ہے۔یہ منبع μv_S دباو پیدا کرتا ہے۔ شکل-ب میں **تابع منبع**

[41] dependent voltage source
[42] dependent current source
[43] bipolar transistor, BJT
[44] MOSFET
[45] mathematical model
[46] dependent voltage source
[47] control voltage

شکل 1.19: تابع منبع دباو اور تابع منبع رو کے استعمال کی مثال۔

رو[48] کو i_S قابو کرتا ہے۔ ان دو اقسام کے منابع کے مستقل μ اور β بے بُعد[49] مقدار ہیں۔ شکل-پ میں i_s رو پیدا کردہ دباو کو قابو کرتی ہے۔ اس منبع کے مستقل r کا بعُد[50] $\mathrm{V\,A^{-1}}$ ہے جو عین مزاحمت کی بُعد ہے۔ اسی لئے اس منبع کو **تابع منبع مزاحمت** نما[51] کہا جاتا ہے۔ شکل-ت میں **تابع منبع موصلیت** نما[52] کی پیدا کردہ رو کا انحصار v_S پر ہے۔ اس منبع کے مستقل g کا بُعد $\mathrm{A\,V^{-1}}$ ہے جو موصلیت کی بھی بُعد ہے۔

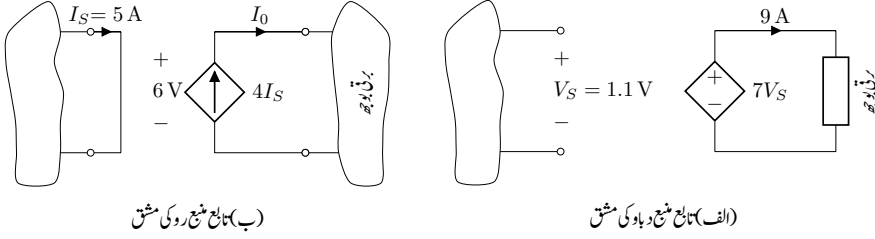
مثال 1.5: شکل 1.19-الف میں خارجی دباو اور شکل-ب میں خارجی رو دریافت کریں۔

حل: شکل-الف میں ضابط دباو $0.2\,\mathrm{V}$ اور منبع کا مستقل 7 ہے۔ یوں پیدا کردہ دباو $0.2 \times 7 = 1.4\,\mathrm{V}$ ہو گا۔ شکل-ب میں ضابط رو $3\,\mathrm{mA}$ اور منبع کا مستقل 12 ہے۔ یوں پیدا کردہ رو $0.003 \times 12 = 36\,\mathrm{mA}$ ہو گی۔

اس مثال میں تابع منبع دباو داخلی دباو کو 7 گنا بڑھاتا ہے گویا منبع بطور ایمپلیفائر دباو[53] کام کرتا ہے اور اس ایمپلیفائر

[48] depended current source
[49] dimensionless
[50] dimension
[51] dependent transresistance source
[52] dependent transconductance source
[53] voltage amplifier

(ب) تابع منبع رو کی مشق

(الف) تابع منبع دباو کی مشق

شکل 1.20: تابع منبع دباو اور تابع منبع رو کے استعمال کی مشق۔

کی **افزائش دباو**[54] 7 ہے۔اسی طرح شکل-ب میں تابع منبع رو نے داخلی رو کو 12 گنا بڑھا کر خارج کیا، گویا یہ منبع بطور **ایمپلیفائر رو**[55] کام کرتا ہے اور اس ایمپلیفائر کی **افزائش رو**[56] کی **قیمت** 12 ہے۔

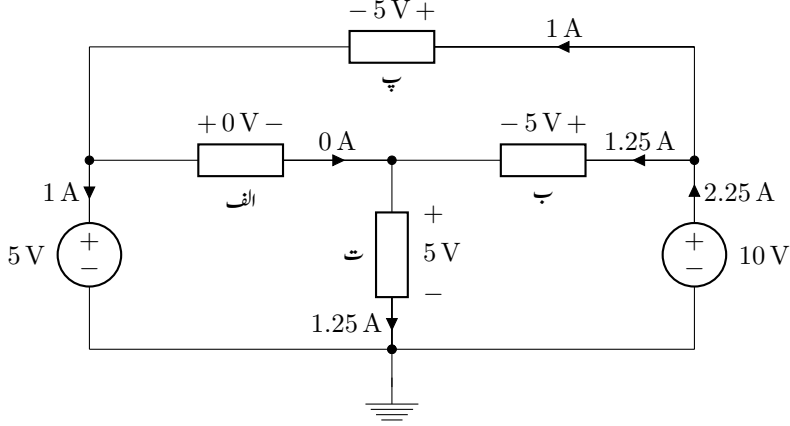
شکل 1.18-پ بالکل اسی طرح داخلی ضابط رو کی نسبت سے برقی دباو خارج کرتے ہوئے بطور **ایمپلیفائر مزاحمت-نما**[57] کردار ادا کرتا ہے جہاں منبع کا مستقل **افزائش مزاحمت-نما**[58] کہلاتا ہے۔ شکل 1.18-ت بطور **ایمپلیفائر موصلیت-نما**[59] کام کرتا ہے اور اس کے مستقل کو **افزائش موصلیت-نما**[60] کہتے ہیں۔

مشق 1.4: شکل 1.20 میں برقی بوجھ کی طاقت دریافت کریں۔

جوابات: (الف): 69.3 W ، (ب) 120 W

مثال 1.6: شکل 1.21 میں تمام پرزہ جات کی طاقت دریافت کریں۔

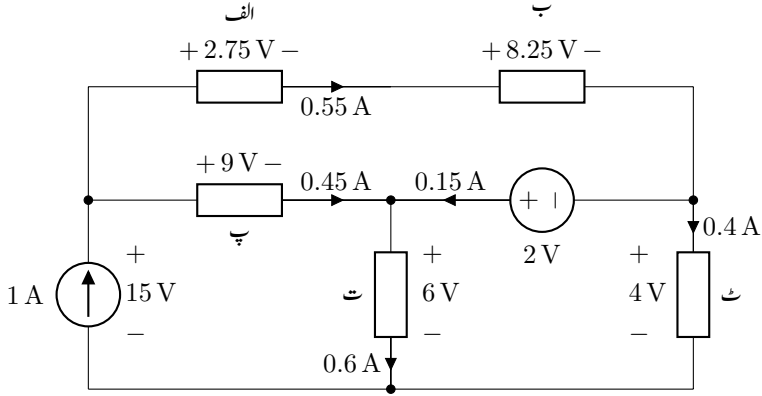
---

voltage gain[54]
current amplifier[55]
current gain[56]
transresistance amplifier[57]
transresistance gain[58]
transconductance amplifier[59]
transconductance gain[60]

شکل 1.21: مثال 1.6 کا دور۔

حل: بوجھ-الف میں برقی رو صفر ہے اور اس کے دونوں سروں کے مابین دباو بھی صفر ہے لہٰذا اس کی طاقت $0 \times 0 = 0\,\mathrm{W}$ ہے۔ بوجھ-ب کی طاقت $5 \times 1.25 = 6.25\,\mathrm{W}$ ہے۔ بوجھ-پ کی طاقت $5 \times 1 = 5\,\mathrm{W}$ اور بوجھ-ت کی طاقت $5 \times 1.25 = 6.25\,\mathrm{W}$ ہے۔ بائیں منبع کی طاقت $5 \times 1 = 5\,\mathrm{W}$ جبکہ دائیں منبع کی طاقت $10 \times (-2.25) = -22.5\,\mathrm{W}$ ہے۔

کل طاقت کا ضیاع $0 + 6.25 + 5 + 6.25 + 5 = 22.5\,\mathrm{W}$ ہے۔ دایاں منبع تمام طاقت پیدا کرتا ہے جبکہ بائیں منبع کو ازخود طاقت درکار ہے۔

مشق 1.5: شکل 1.22 کے تمام پرزوں میں طاقت حاصل کریں۔ کیا طاقت کی پیدا وار اور اس کا ضیاع برابر ہیں۔

جوابات: بالترتیب الف تا ٹ: $1.5125\,\mathrm{W}$ ، $4.5375\,\mathrm{W}$ ، $4.05\,\mathrm{W}$ ، $3.6\,\mathrm{W}$ ، $1.6\,\mathrm{W}$ ؛ منبع دباو کی طاقت $-0.3\,\mathrm{W}$ اور منبع رو کی طاقت $-15\,\mathrm{W}$ ہے۔ دور میں کل طاقت کی پیداوار $15.3\,\mathrm{W}$ ہے۔ اتنی ہی طاقت پیدا بھی ہوتی ہے لہٰذا دونوں برابر ہیں۔

شکل 1.22: طاقت کے حصول کی مشق۔

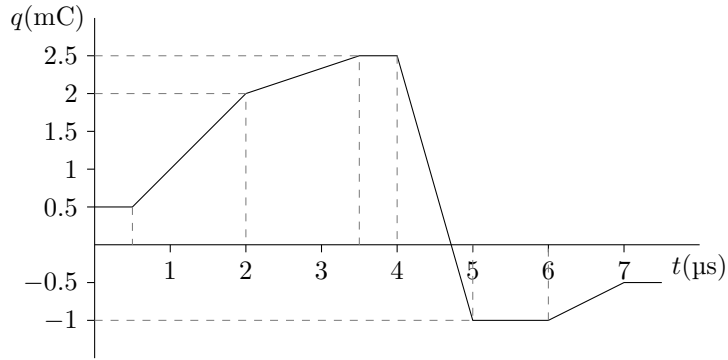
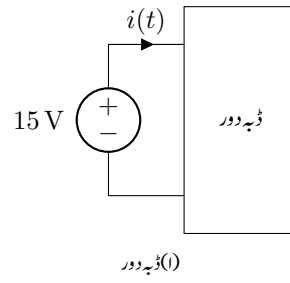
مثال 1.7: شکل 1.23-الف میں ڈبہ دور دکھایا گیا ہے جس میں برقی بار بھری جا رہی ہے۔ برقی بار بالمقابل وقت کا خط شکل-ب میں دیا گیا ہے۔ اس خط سے برقی رو بالمقابل وقت کا خط حاصل کریں۔

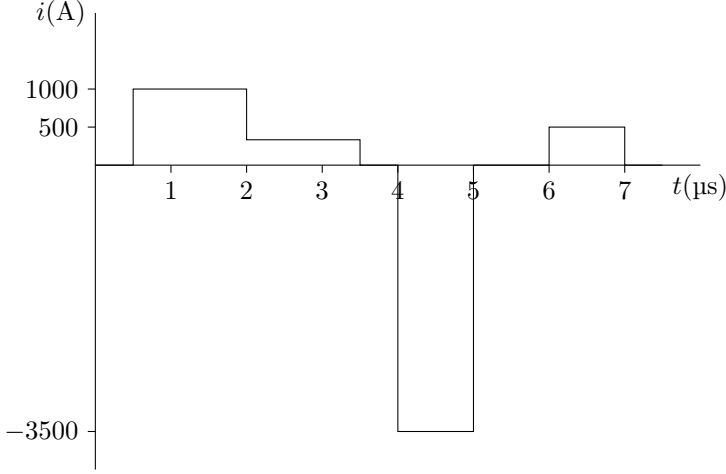
حل: وقت $t = 0$ تا $t = 0.5\,\mu\text{s}$ تک برقی بار بنا تبدیل ہوئے $0.5\,\text{mC}$ رہتا ہے لہٰذا $\Delta q = 0$ ہے اور یوں اس دورانیے میں

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{0\,\text{C}}{0.5\,\mu\text{s}} = 0\,\text{A} \qquad (0 < t < 0.5\,\mu\text{s})$$

ہو گا۔ وقت $t = 0.5\,\mu\text{s}$ تا $t = 2\,\mu\text{s}$ کے دوران برقی بار $0.5\,\text{mC}$ سے تبدیل ہو کر $2\,\text{mC}$ ہو جاتا ہے لہٰذا اس دورانیے کے لئے

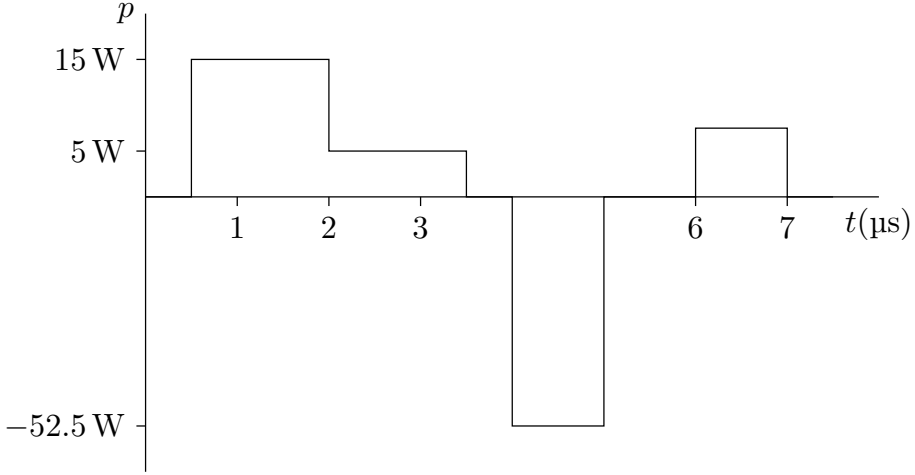
$$i = \frac{2\,\text{mC} - 0.5\,\text{mC}}{2\,\mu\text{s} - 0.5\,\mu\text{s}} = 1000\,\text{A} \qquad (0.5\,\mu\text{s} < t < 2\,\mu\text{s})$$

(ا) ڈبہ دور

(ب) بار بالمقابل وقت کا خط۔

شکل 1.23: مثال 1.7 کا شکل۔

شکل 1.24: برقی رو مثال 1.7

ہو گا۔اسی طرح باقی دورانیوں میں

$$
\begin{aligned}
&i = \frac{2.5\,\mathrm{mC} - 2\,\mathrm{mC}}{3.5\,\mu\mathrm{s} - 2\,\mu\mathrm{s}} = 333.33\,\mathrm{A} && (2\,\mu\mathrm{s} < t < 3.5\,\mu\mathrm{s})\\
&i = \frac{2.5\,\mathrm{mC} - 2.5\,\mathrm{mC}}{4\,\mu\mathrm{s} - 3.5\,\mu\mathrm{s}} = 0\,\mathrm{A} && (3.5\,\mu\mathrm{s} < t < 4\,\mu\mathrm{s})\\
&i = \frac{-1\,\mathrm{mC} - 2.5\,\mathrm{mC}}{5\,\mu\mathrm{s} - 4\,\mu\mathrm{s}} = -3500\,\mathrm{A} && (4\,\mu\mathrm{s} < t < 5\,\mu\mathrm{s})\\
&i \frac{-1\,\mathrm{mC} - (-1\,\mathrm{mC})}{6\,\mu\mathrm{s} - 5\,\mu\mathrm{s}} = 0\,\mathrm{A} && (5\,\mu\mathrm{s} < t < 6\,\mu\mathrm{s})\\
&i = \frac{-0.5\,\mathrm{mC} - (-1\,\mathrm{mC})}{7\,\mu\mathrm{s} - 6\,\mu\mathrm{s}} = 500\,\mathrm{A} && (6\,\mu\mathrm{s} < t < 7\,\mu\mathrm{s})\\
&i = 0\,\mathrm{A} && (7\,\mu\mathrm{s} < t)
\end{aligned}
$$

اور اس کے بعد $i = 0\,\mathrm{A}$ ہے۔ان نتائج کو شکل 1.24 میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بار نہ بدلنے کی صورت میں رو صفر ہوتی ہے۔بڑھتے بار کی صورت میں مثبت رو اور گھٹتے بار کی صورت میں منفی رو پائی جاتی ہے۔

شکل 1.25: طاقت بالمقابل وقت

مثال 1.8: مندرجہ بالا مثال میں طاقت بالمقابل وقت حاصل کریں۔

حل: طاقت $p = vi$ ہوتا ہے۔ شکل 1.23-الف سے دباو کی قیمت $15\,\mathrm{V}$ ملتی ہے جبکہ شکل 1.24 سے رو کی قیمت مختلف دورانیے کے لئے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں مختلف دورانیے کے طاقت درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
p &= 15 \times 0 = 0\,\mathrm{W} && (0 < t < 0.5\,\mathrm{\mu s})\\
p &= 15 \times 1000 = 15\,\mathrm{kW} && (0.5\,\mathrm{\mu s} < t < 2\,\mathrm{\mu s})\\
p &= 15 \times 333.33 = 5\,\mathrm{kW} && (2\,\mathrm{\mu s} < t < 3.5\,\mathrm{\mu s})\\
p &= 15 \times 0 = 0\,\mathrm{W} && (3.5\,\mathrm{\mu s} < t < 4\,\mathrm{\mu s})\\
p &= 15 \times (-3500) = -52.5\,\mathrm{kW} && (4\,\mathrm{\mu s} < t < 5\,\mathrm{\mu s})\\
p &= 15 \times 0 = 0\,\mathrm{W} && (5\,\mathrm{\mu s} < t < 6\,\mathrm{\mu s})\\
p &= 15 \times 500 = 7.5\,\mathrm{kW} && (6\,\mathrm{\mu s} < t < 7\,\mathrm{\mu s})\\
p &= 15 \times 0 = 0\,\mathrm{W} && (7\,\mathrm{\mu s} < t)
\end{aligned}
$$

ان جوابات کو شکل 1.25 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 1.9: آج کل کمپیوٹر[61] کا زمانہ ہے اور یو-ایس-بی[62] یعنی **عمومی سلسلہ وار پھاٹک** کا استعمال عام ہے۔ کسی بھی کمپیوٹر یا **عددی دور**[63] کو **عددی مواد**[64] جن برقی تاروں کے ذریعہ فراہم کیا جاتا ہے وہ کمپیوٹر یا عددی دور کے **داخلی پھاٹک**[65] کہلاتے ہیں اور جن تاروں کے ذریعہ کمپیوٹر یا عددی دور سے عددی مواد حاصل کیا جاتا ہے، کمپیوٹر یا عددی دور کے **خارجی پھاٹک**[66] کہلاتے ہیں۔ عمومی سلسلہ وار پھاٹک (یو-ایس-بی) پر کمپیوٹر عددی مواد حاصل بھی کر سکتا ہے اور خارج بھی کر سکتا ہے۔ یوں یہ **داخلی-خارجی پھاٹک**[67] ہے۔ اس پھاٹک کی مدد سے کمپیوٹر کے ساتھ بیرونی آلات مثلاً موبائل فون، عددی کیمرہ وغیرہ جوڑے جا سکتے ہیں۔ یہ پھاٹک بیرونی آلات کو برقی طاقت فراہم کرنے کی صلاحیت بھی رکھتا ہے۔ یہ پھاٹک چار عدد برقی تاروں پر مشتمل ہے جن میں دو تار عددی مواد کے ترسیل اور دو تار برقی طاقت کی فراہمی کے لئے استعمال ہوتے ہیں۔ یہ پھاٹک عام حالت میں $100\,\mathrm{mA}$ برقی رو فراہم کر سکتا ہے جبکہ سافٹ ویئر کے ذریعہ پھاٹک سے برقی رو کی فراہمی $500\,\mathrm{mA}$ تک بڑھائی جا سکتی ہے۔

یو-ایس-بی پھاٹک استعمال کرتے ہوئے موبائل کی بے بار[68] بیٹری میں بار بھرا جاتا ہے۔ بیٹری کی سکت $1700\,\mathrm{mA\,h}$ ہے۔ الف) بیٹری کی سکت کولمب C میں حاصل کریں۔ ب) اگر پھاٹک $100\,\mathrm{mA}$ رو فراہم کر رہا ہو تب بیٹری کو مکمل بھرنے میں کتنی دیر لگے گی۔

حل: الف) مکمل بھری بیٹری میں کل بار ہی بیٹری کی سکت ہوتی ہے۔ بیٹری کی سکت کو کولمب C کی بجائے $\mathrm{A\,h}$ میں بیان کیا جاتا ہے۔ دی گئی بیٹری کی سکت

$$Q = I \times t = 1700 \times 10^{-3} \times 3600 = 6120\,\mathrm{C}$$

ہے جہاں ایک گھنٹہ 3600 سیکنڈ کے برابر ہے۔

ب) یوں $100\,\mathrm{mA}$ کی رو سے بیٹری بھرنے میں

$$t = \frac{6120}{100 \times 10^{-3}} = 61\,200\,\mathrm{s} = 17\,\mathrm{h}$$

computer[61]
USB Universal Serial Port[62]
digital circuit[63]
digital data[64]
input port[65]
output port[66]
input-output port[67]
discharged[68]

سترہ گھنٹے درکار ہوں گے۔

سوالات

سوال 1.1: ایک تار میں $1.5\,\mathrm{A}$ رو پائی جاتی ہے۔اس تار پر کسی نقطے سے $45\,\mathrm{s}$ میں کتنا بار گزرتا ہے۔

جواب: $67.5\,\mathrm{C}$

سوال 1.2: ایک تار سے $22\,\mathrm{s}$ میں کل 10^{21} الیکٹران گزرتے ہیں۔تار میں اوسط رو دریافت کریں۔

جواب: $7.27\,\mathrm{A}$

سوال 1.3: $20\,\mathrm{A}$ بیٹری چارجر کتنی دیر میں $4000\,\mathrm{C}$ بار فراہم کرے گا۔

جواب: $200\,\mathrm{s}$

سوال 1.4: آسمانی بجلی $60\,\mathrm{\mu s}$ کے لئے $20\,\mathrm{kA}$ فراہم کرتی ہے۔آسمانی بجلی میں کل بار دریافت کریں۔

جواب: $1.2\,\mathrm{C}$

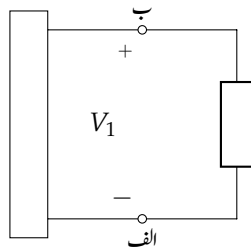
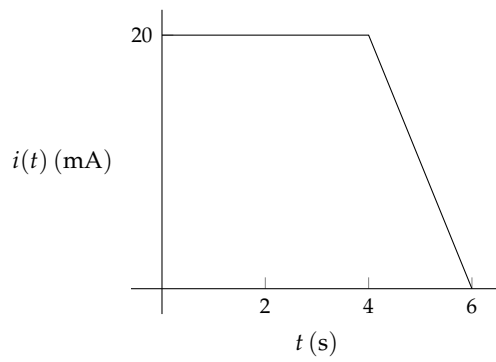
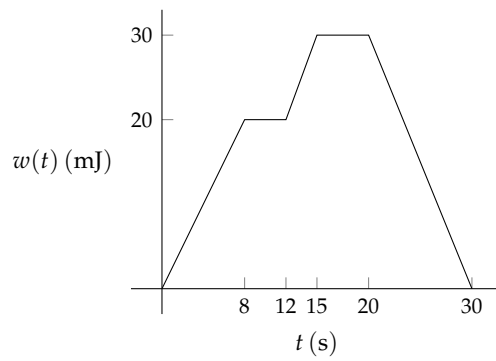
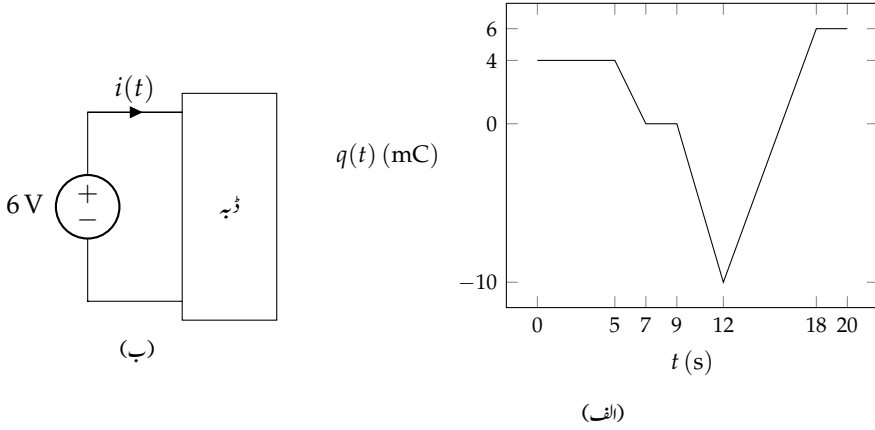
سوال 1.5: ایک تار میں $32\,\mathrm{s}$ میں $88\,\mathrm{C}$ بار گزرتا ہے۔تار میں رو دریافت کریں۔

جواب: $2.75\,\mathrm{A}$

سوال 1.6: شکل 1.26 میں نقطہ-الف سے نقطہ-ب تک بیرونی پرزے میں دس کولومب کا بار گزرتا ہے جبکہ پرزے میں توانائی کا ضیاع پچاس جاول ہے۔دباو V_1 حاصل کریں۔

جواب: $V_1 = -5\,\mathrm{V}$

سوال 1.7: ایک پرزے کا رو بالمقابل وقت شکل 1.27 میں دیا گیا ہے۔ان بیس سیکنڈ دورانیے میں کتنا بار پرزے میں داخل ہو گا۔

جواب: $100\,\mathrm{mC}$

شکل 1.26: سوال 1.6 کا دور۔

شکل 1.27: سوال 1.7 کا ترسیم۔

شکل 1.28: سوال 1.9 کا ترسیم۔

شکل 1.29: سوال 1.10 کا ترسیم۔

سوال 1.8: ایک پرزے کے مثبت سر سے $q(t) = 22e^{-5t}\,\text{mA}$ بار داخل ہوتا ہے جبکہ پرزے پر دباو $v(t) = 15e^{-2t}\,\text{V}$ ہے۔ دورانیے $0 \le t \le 3\,\text{s}$ میں پرزے کو کتنی توانائی منتقل ہوتی ہے۔

جواب: $47.14\,\text{mJ}$

سوال 1.9: ایک پرزے کو منتقل توانائی بالمقابل وقت ترسیم شکل 1.28 میں دیا گیا ہے جبکہ پرزے پر $2\,\text{V}$ دباو پایا جاتا ہے۔ ان تیس سیکنڈ دورانیے میں پرزے کو کتنا بار فراہم کیا گیا ہے۔

جواب: $107\,\text{mC}$

سوال 1.10: ایک پرزے کے مثبت سر پر داخلی بار بالمقابل وقت ترسیم شکل 1.29-الف میں دیا گیا ہے جبکہ پرزے پر $6\,\text{V}$ دباو پایا جاتا ہے۔ ان بیس سیکنڈ دورانیے میں پرزے کو کتنی توانائی فراہم کی جاتی ہے۔ دور کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

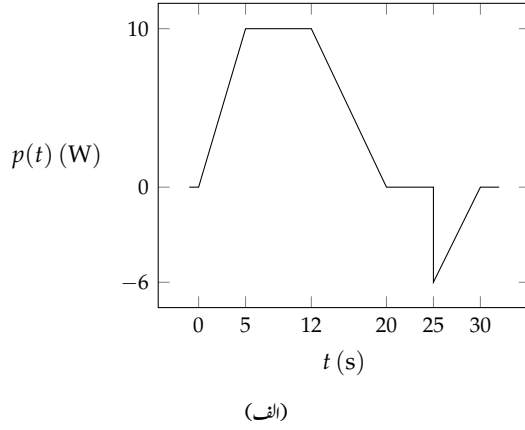
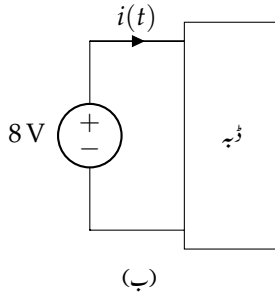
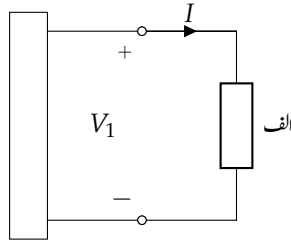
جواب: $159\,\text{mJ}$

سوال 1.11: ایک ڈبے کو فراہم طاقت بالمقابل وقت ترسیم شکل 1.30-الف میں دیا گیا ہے۔ ان تیس سیکنڈ دورانیے میں ڈبے کو کتنی توانائی فراہم کی گئی؟۔ دور کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

جواب: $120\,\text{J}$

سوال 1.12: شکل 1.31 میں پرزہ الف کو مہیا یا اس سے حاصل طاقت درج ذیل صورتوں میں دریافت کریں۔

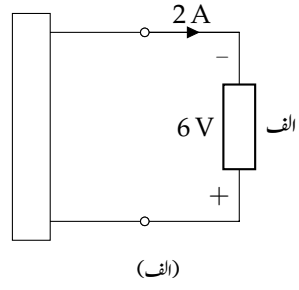
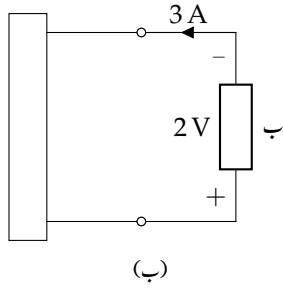
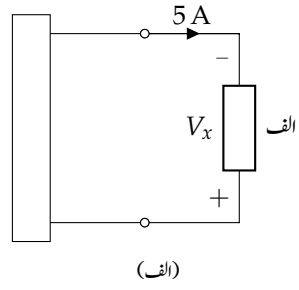
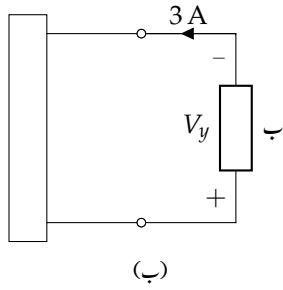
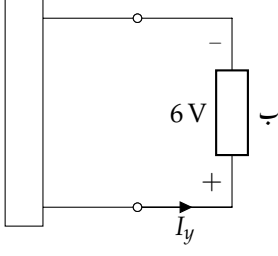
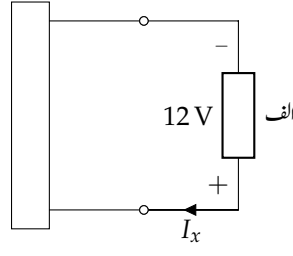
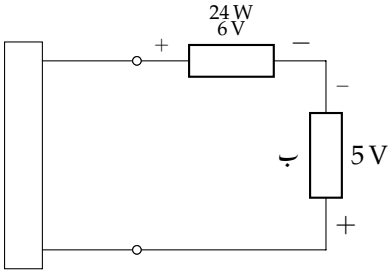
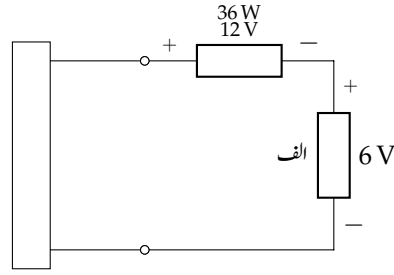
(الف)

(ب)

شکل 1.30: سوال 1.11 کا ترسیم۔

شکل 1.31: سوال 1.12 کا دور۔

- $V_1 = 6\,\mathrm{V}$ اور $I = 2\,\mathrm{A}$ ہیں۔
- $V_1 = -3\,\mathrm{V}$ اور $I = 7\,\mathrm{A}$ ہیں۔
- $V_1 = 5\,\mathrm{V}$ اور $I = -4\,\mathrm{A}$ ہیں۔
- $V_1 = -4\,\mathrm{V}$ اور $I = -2\,\mathrm{A}$ ہیں۔

جوابات: $12\,\mathrm{W}$ ، $-21\,\mathrm{W}$ ، $-20\,\mathrm{W}$ ، $8\,\mathrm{W}$

سوال 1.13: شکل 1.32 میں پرزہ الف اور ب کو مہیا یا حاصل طاقت دریافت کریں۔

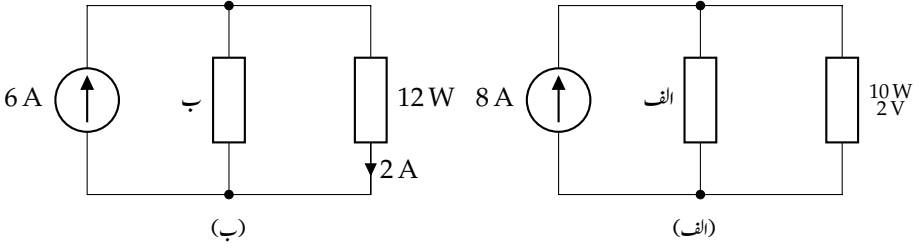
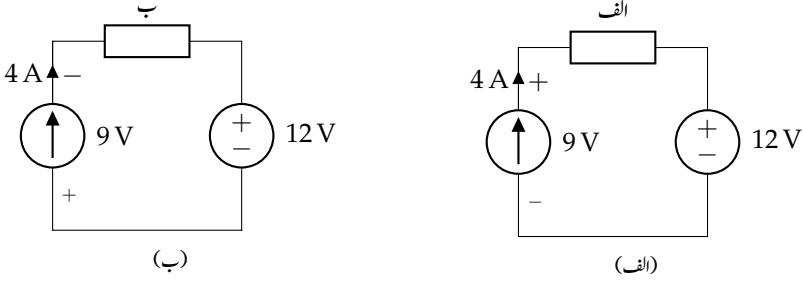
جوابات: پرزہ الف سے $12\,\mathrm{W}$ طاقت حاصل کی جا رہی ہے۔ پرزہ ب کو $6\,\mathrm{W}$ فراہم کی جا رہی ہے۔

شکل 1.32: سوال 1.13 کا دور۔

شکل 1.33: سوال 1.14 کا دور۔

شکل 1.34: سوال 1.15 کا دور۔

شکل 1.35: سوال 1.16 کا دور۔

سوال 1.14: شکل 1.33 میں پرزہ الف کو 20 W فراہم کی جا رہی ہے جبکہ پرزہ ب سے 12 W حاصل کیا جا رہا ہے۔ دباو V_x اور V_y دریافت کریں۔ س جوابات: $V_x = -4\,\mathrm{V}$ ، $V_y = -4\,\mathrm{V}$

سوال 1.15: شکل 1.34 میں پرزہ الف کو 48 W فراہم کی جا رہی ہے جبکہ پرزہ ب سے 36 W حاصل کی جا رہی ہے۔ رو I_x اور I_y دریافت کریں۔

جوابات: $I_x = -4\,\mathrm{A}$ ، $I_y = -6\,\mathrm{A}$

سوال 1.16: شکل 1.35-الف میں ایک پرزے کو 36 W فراہم کئے جاتے ہیں جبکہ پرزے پر دباو 12 V ہے۔ پرزہ الف کی طاقت دریافت کریں۔ کیا اس پرزے کو طاقت فراہم کی جا رہی ہے؟ شکل-ب میں پرزہ ب کے لئے بھی حل کریں۔

جوابات: پرزہ الف کو 18 W فراہم کی جاتی ہے جبکہ پرزہ ب سے 20 W حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 1.36: سوال 1.17 کا دور۔

شکل 1.37: سوال 1.18 کا دور۔

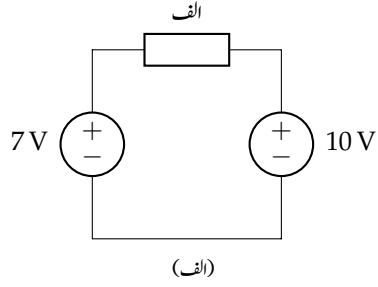
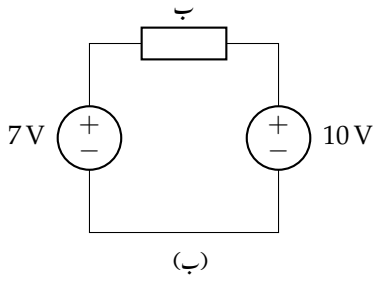
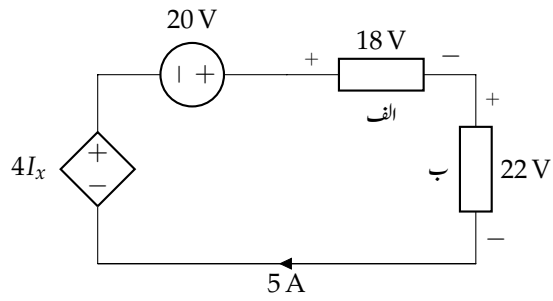
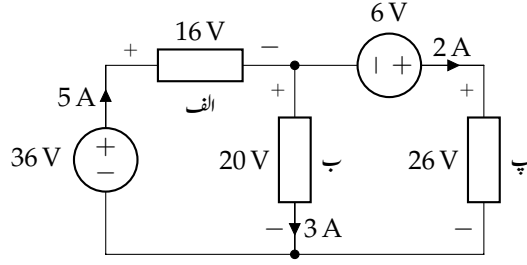
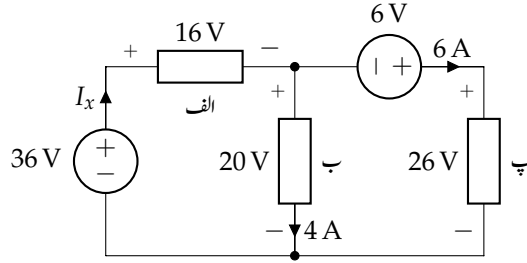
سوال 1.17: شکل 1.36-الف میں ایک پرزے کو 10 W فراہم کئے جاتے ہیں جبکہ پرزے پر دباو 2 V ہے۔ پرزہ الف کی طاقت دریافت کریں۔ کیا اس پرزے کو طاقت فراہم کی جا رہی ہے؟ شکل-ب کو بھی حل کریں۔

جوابات: پرزہ الف کو 2 W فراہم کئے جاتے ہیں۔ پرزہ ب کو 24 W فراہم کئے جاتے ہیں۔

سوال 1.18: شکل 1.37 میں پرزہ الف اور ب کی طاقت دریافت کریں۔

جوابات: پرزہ الف 12 W فراہم کرتا ہے۔ پرزہ ب سے 84 W حاصل کیا جاتا ہے۔

سوال 1.19: شکل 1.38-الف میں پرزہ الف 6 W فراہم کرتا ہے۔ اس میں رو کی مقدار اور سمت دریافت کریں۔ شکل-ب میں پرزہ ب کو 12 W طاقت فراہم کی جاتی ہے۔ پرزہ ب میں رو دریافت کریں۔

جوابات: پرزہ الف کے دائیں سر سے 2 A نکل کر 10 V کے منبع میں داخل ہوتی ہے۔ پرزہ ب میں 4 A پائی جاتی ہے جو پرزے میں دائیں سے بائیں جانب رواں ہے۔

شکل 1.38: سوال 1.19 کا دور۔

شکل 1.39: سوال 1.20 کا دور۔

شکل 1.40: سوال 1.21 کا دور۔

شکل 1.41: سوال 1.22 کا دور۔

سوال 1.20: شکل 1.39 میں پرزہ الف اور ب کی طاقت دریافت کریں۔

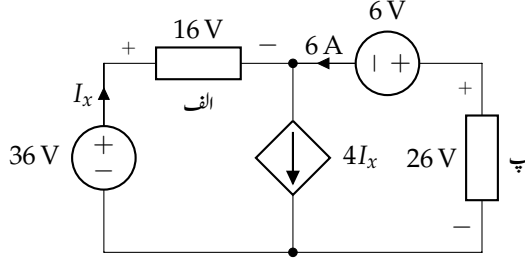
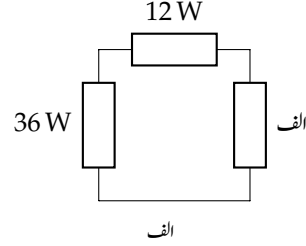
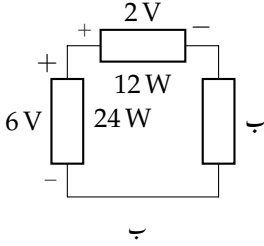
جوابات: پرزہ الف کو 90 W مہیا کیا جاتا ہے۔ پرزہ ب کو 110 W مہیا کیا جاتا ہے۔

سوال 1.21: شکل 1.40 میں پرزہ الف، ب اور پ کی طاقت دریافت کریں۔

جوابات: تینوں پرزوں کو طاقت فراہم کی جاتی ہے۔الف کو 80 W ، ب کو 60 W اور پ کو 52 W طاقت فراہم کی جاتی ہے۔

سوال 1.22: شکل 1.41 میں رو I_x دریافت کریں۔

جوابات: $I_x = 10\,\mathrm{A}$

سوال 1.23: شکل 1.42 میں پرزہ الف اور ب کی طاقت دریافت کریں۔

شکل 1.42: سوال 1.23 کا دور۔

شکل 1.43: سوال 1.24 کا دور۔

جوابات: پرزہ الف کو 32 W فراہم کیا جاتا ہے جبکہ پرزہ ب سے 156 W حاصل ہوتا ہے۔

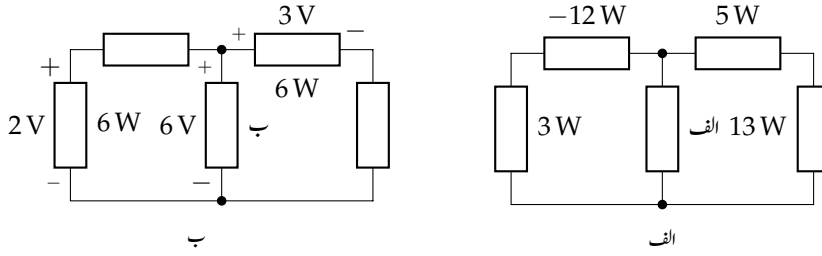
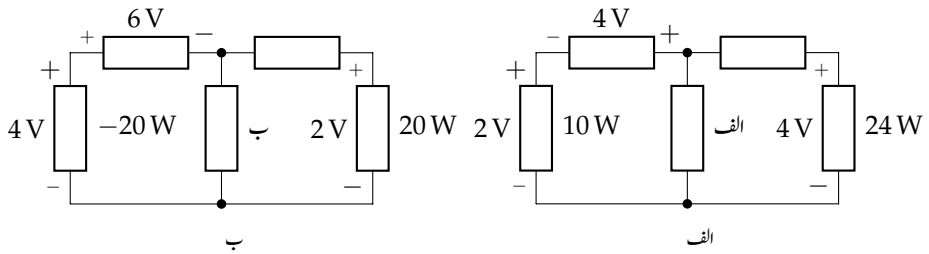
سوال 1.24: شکل 1.43-الف میں پرزہ الف کی طاقت دریافت کریں۔ شکل-ب میں پرزہ ب کی رو، دباو اور طاقت دریافت کریں۔

جوابات: پرزہ الف کو 24 W فراہم کیا جاتا ہے۔ پرزہ ب کی رو 4 A ، دباو 4 V اور اس کو فراہم کردہ طاقت 16 W ہے۔

سوال 1.25: شکل 1.44-الف میں پرزہ الف کی طاقت دریافت کریں۔ شکل-ب میں پرزہ ب کی رو، دباو اور طاقت دریافت کریں۔

جوابات: پرزہ الف سے 9 W حاصل کی جاتی ہے۔ پرزہ ب سے 30 W حاصل کی جاتی ہے۔

سوال 1.26: شکل 1.45-الف میں پرزہ الف کی طاقت دریافت کریں۔ شکل-ب میں پرزہ ب کی رو، دباو اور طاقت دریافت کریں۔

جوابات: پرزہ الف سے 66 W حاصل کی جاتی ہے۔ پرزہ ب کو 10 W فراہم کی جاتی ہے۔

شکل 1.44: سوال 1.25 کا دور۔

شکل 1.45: سوال 1.26 کا دور۔

باب 2

مزاحمتی ادوار

2.1 قانون اوہم

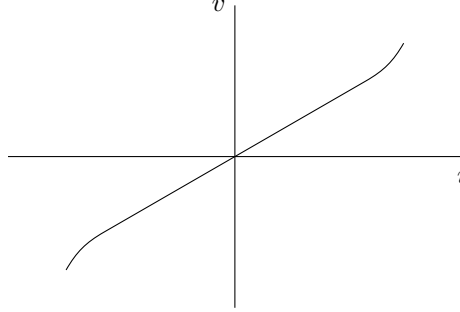
شکل 2.1-الف میں **کارتیسی محدد**[1] پر سیدھے خطوط دکھائے گئے ہیں۔ بالائی خط کی مساوات $y = m_1x + c_1$ ہے جہاں خط کی **ڈھلوان**[2] m_1 ہے جبکہ خط y محدد کو c_1 پر کاٹتا ہے۔ نچلی خط کی ڈھلوان m_2 ہے جبکہ یہ محدد کے مبدا $(0,0)$ سے گزرتی ہے لہٰذا یہ خط y محدد کو 0 پر کاٹتی ہے اور یوں اس کی مساوات $y = m_2x$ ہے۔

(ا) سیدھے خطوط اور ان کی ریاضی مساوات۔

(ب) مزاحمت کے برقی دباو بالمقابل رو خط اور اوہم کا قانون۔

شکل 2.1: قانون اوہم دراصل سیدھے خط کی مساوات ہے۔

---

[1] Cartesian coordinates
[2] slope

شکل 2.2: غیر خطی دباو بالمقابل رو کی تعلق۔

مزاحمت کے دو سروں کے مابین مختلف برقی دباو v نافذ کرتے ہوئے برقی رو i ناپی گئی۔ برقی دباو کو عمودی محدد اور برقی رو کو افقی محدد پر رکھتے ہوئے ان کے تعلق کو شکل 2.1-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس خط کو مزاحمت کی **دباو بالمقابل رو** خط کہا جاتا ہے۔شکل-ب کا شکل-الف کی نچلی خط کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے اس خط کو

$$v = Ri \qquad \text{قانون اوہم} \tag{2.1}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں خط کی ڈھلوان کو R لکھا اور **برقی مزاحمت**[3] یا صرف **مزاحمت** پکارا جاتا ہے۔اس مساوات کو **قانون اوہم**[4] کہتے ہیں۔شکل-ب میں مزاحمت R کو بطور ڈھلوان دکھایا گیا ہے۔

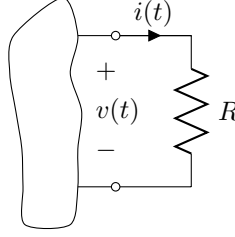
$$R = \frac{v_2 - v_1}{i_2 - i_1} = \frac{\Delta v}{\Delta i} \qquad \text{مزاحمت کی تعریف} \tag{2.2}$$

شکل 2.1-ب میں دباو اور رو راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔راست تناسبی تعلق کو **خطی**[5] تعلق کہا جاتا ہے۔اگرچہ اس کتاب میں مزاحمت کو **خطی پرزہ**[6] ہی تصور کیا جائے گا، یہ جاننا ضروری ہے کہ کئی نہایت اہم اقسام کے پرزے غیر خطی مزاحمت کی خاصیت رکھتے ہیں۔عام استعمال میں 220 V پر جلنے والا بلب غیر خطی مزاحمت کی مثال ہے۔اس بلب کے $v - i$ تعلق کو شکل 2.2 میں دکھایا گیا ہے۔

وقت کے ساتھ بدلتا دباو اور بدلتا رو کی صورت میں قانون اوہم

$$v(t) = Ri(t) \tag{2.3}$$

---

electrical resistance[3]
Ohm's law[4]
linear[5]
linear component[6]

شکل 2.3: اوہم کا قانون اور مزاحمتی ضیاع۔

لکھا جائے گا جہاں وقت t کے ساتھ بدلتے برقی دباو اور بدلتا برقی رو کو چھوٹے حروف میں لکھا گیا ہے۔ مساوات 2.3 سے مزاحمت کا بُعد $\mathrm{V\,A^{-1}}$ حاصل ہوتا ہے جسے اوہم[7] پکارا اور Ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں اگر کسی مزاحمت پر $10\,\mathrm{V}$ کا برقی دباو لاگو کرنے سے مزاحمت میں $5\,\mathrm{A}$ کی رو گزرے تب مزاحمت کی قیمت $R = \frac{10}{5} = 2\,\Omega$ ہو گی۔

شکل 2.3 میں برقی دور کے ساتھ مزاحمت R جڑی ہے۔ مزاحمت کا دباو $v(t)$ اور رو $i(t)$ ہیں۔ صفحہ 10 پر مساوات 1.6 کے تحت اس مزاحمت میں طاقت کا ضیاع

$$p(t) = v(t)i(t)$$

ہو گا۔ اس مساوات میں برقی دباو $v(t)$ میں قانون اوہم پُر کرتے ہوئے

$$p(t) = Ri(t) \times i(t) = Ri^2(t)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح طاقتی ضیاع کی مساوات میں $i(t)$ کی جگہ قانون اوہم استعمال کرتے ہوئے

$$p(t) = v(t) \times \frac{v(t)}{R} = \frac{v^2(t)}{R}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مندرجہ بالا تین مساوات کو اکٹھے لکھتے ہیں۔

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{v^2(t)}{R} \qquad \text{مزاحمتی ضیاع} \tag{2.4}$$

درج بالا مساوات مزاحمت کی طاقت دیتی ہے۔ یہ طاقت حرارتی توانائی میں تبدیل ہوتی ہے جس سے مزاحمت کا درجہ حرارت بڑھتا ہے۔

[7] Ohm

مزاحمت کے علاوہ موصلیت[8] G بھی بہت مقبول ہے جہاں

$$G = \frac{1}{R} \tag{2.5}$$

کے برابر ہے۔ موصلیت کی اکائی سیمنز[9] S ہے جہاں

$$1\,\mathrm{S} = 1\,\mathrm{A\,V^{-1}} \tag{2.6}$$

کے برابر ہے۔ مساوات 2.5 کے استعمال سے اوہم کے قانون کو

$$i(t) = Gv(t) \tag{2.7}$$

اور مزاحمت کی طاقت کو

$$p(t) = Gv^2(t) = \frac{i^2(t)}{G} \tag{2.8}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

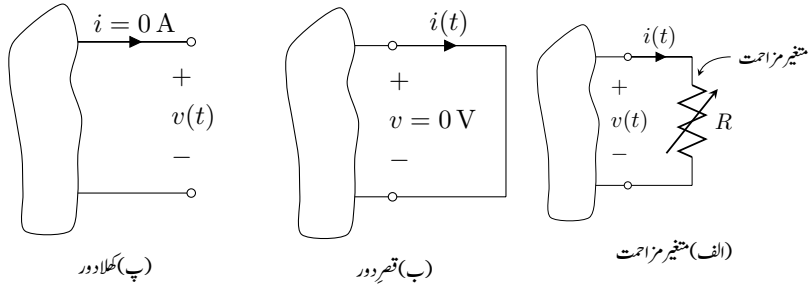
مثال 2.1: ایک عدد مزاحمت پر $20\,\mathrm{V}$ لاگو کرنے سے مزاحمت میں $4\,\mathrm{A}$ پیدا ہوتی ہے۔ اس کی موصلیت دریافت کریں۔

حل: مساوات 2.7 کی مدد سے

$$G = \frac{i}{v} = \frac{4}{20} = 0.2\,\mathrm{S}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہی جواب، اوہم کے قانون سے $R = \frac{20}{4} = 5\,\Omega$ لکھتے اور $G = \frac{1}{R} = 0.2\,\mathrm{S}$ سے بھی حاصل ہوتا ہے۔

شکل 2.4-الف میں برقی دور کے ساتھ متغیر مزاحمت[10] جڑا دکھایا گیا ہے۔ مزاحمت پر ترچھا تیر کھینچ کر متغیر مزاحمت کو ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر متغیر مزاحمت کی قیمت کم کرتے کرتے صفر کر دی جائے تو کسی بھی رو $i(t)$ کی صورت میں مزاحمت پر لاگو برقی دباو، قانون اوہم کے تحت $v = i(t) \times 0 = 0\,\mathrm{V}$ ہو گا۔ یہ صورت حال شکل-ب میں دکھائی گئی ہے اور اس صورت کو قصر دور[11] کہتے ہیں۔ دو نقطوں کو موصل تار سے جوڑ کر قصر دور کیا جاتا ہے۔ اس

conductance[8]
Siemens[9]
variable resistor[10]
short circuit[11]

شکل 2.4: قصر دور اور کھلا دور۔

کے بر عکس اگر متغیر مزاحمت کی قیمت لامحدود کر دی جائے تب کسی بھی دباو $v(t)$ پر، قانون اوہم کے تحت $i = \frac{v(t)}{\infty} = 0\,\text{A}$ ہو گی۔ایسی صورت، جسے کھلا دور[12] کہتے ہیں کو شکل-پ میں دکھائی گئی ہے۔کسی بھی دو نقطوں کو کھلا دور کرنے کا مطلب یہ ہے کہ ان نقطوں کے مابین مزاحمت لامحدود کر دی جائے۔قصر دور پر ہر صورت صفر دباو پایا جاتا ہے جبکہ کھلا دور پر ہر صورت صفر رو پائی جاتی ہے۔

مثال 2.2: شکل 2.5-الف میں رو اور مزاحمتی طاقت دریافت کریں۔

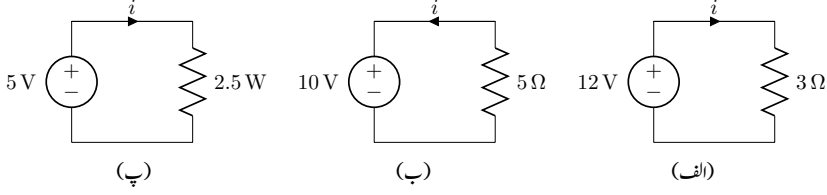
حل: قانون اوہم سے مزاحمت میں رو

$$i = \frac{12}{3} = 4\,\text{A}$$

حاصل ہوتی ہے اور یوں مزاحمتی طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$p = v \times i = 12 \times 4 = 48\,\text{W}$$

یہی جواب مساوات 2.4 میں دئے دیگر کلیات سے بھی حاصل ہو گا یعنی

$$p = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{12^2}{3} = 48\,\text{W}$$
$$p = i^2(t)R = 4^2 \times 3 = 48\,\text{W}$$

شکل 2.5: مزاحمتی ادوار مثال 2.2 تا مثال 2.4

مثال 2.3: شکل 2.5-ب میں رو اور مزاحمتی طاقت دریافت کریں۔

حل: مزاحمت کا بالائی سرا مثبت ہے لٰہذا اس میں رو کی سمت اوپر سے نیچے ہو گی جو دکھلائے گئی سمت کے الٹ ہے۔ اس طرح دی گئی سمت میں رو کی قیمت منفی ہو گی یعنی

$$i = -\frac{10}{5} = -2\,\mathrm{A}$$

جبکہ مزاحمت طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$p = i^2 R = 20\,\mathrm{W}$$

مثال 2.4: شکل 2.5-پ میں رو اور مزاحمتی دریافت کریں۔

حل: دور میں طاقت کی پیداوار اور ضیاع برابر لیتے ہوئے طاقت کی مساوات $p = vi$ سے منبع کی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$i = \frac{p}{v} = \frac{2.5}{5} = 0.5\,\mathrm{A}$$

---

[12] open circuit

اوہم کے قانون سے مزاحمت کی قیمت درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$R = \frac{v}{i} = \frac{5}{0.5} = 10\,\Omega$$

مثال 2.5: شکل 2.6-الف میں مزاحمت کی رو اور طاقت دریافت کریں۔

حل: قانون اوہم میں مزاحمت کا دباو $v_R = 15\,\text{V} - 3\,\text{V} = 12\,\text{V}$ لیتے ہوئے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$i = \frac{v_R}{R} = \frac{12}{10} = 1.2\,\text{A}$$

اسی طرح مزاحمت کا دباو $12\,\text{V}$ لیتے ہوئے اس کی طاقت درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$p = vi = 12 \times 1.2 = 14.4\,\text{W}$$

یہی جواب مساوات 2.4 میں دیے دیگر کلیات سے بھی حاصل کرتے ہیں۔

$$p = i^2R = 1.2^2 \times 10 = 14.4\,\text{W}$$
$$p = \frac{v_R^2}{R} = \frac{12^2}{10} = 14.4\,\text{W}$$

شکل 2.6: مزاحمتی ادوار مثال 2.5 تا مثال 2.6

مثال 2.6: شکل 2.6-ب میں مزاحمت میں رو اور طاقت دریافت کریں۔دائیں منبع کی طاقت بھی دریافت کریں۔

حل: بائیں منبع کی طاقت اور دباو دیے گئے جس سے منبع کی مثبت سر سے خارج ہوتی رو کی قیمت $12\,\mathrm{A}$ حاصل ہوتی ہے۔مزاحمت کا دباو $8\,\mathrm{V}$ ہے لٰہذا اس کی مزاحمت

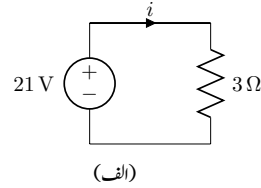
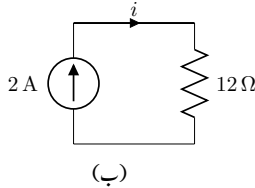
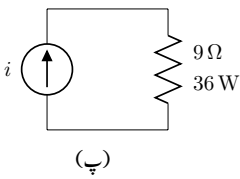
$$R = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}\,\Omega$$

ہو گی۔اس طرح مزاحمت کی طاقت

$$p = vi = 8 \times 12 = 96\,\mathrm{W}$$

ہو گا۔دائیں منبع کو طاقت فراہم کی جا رہی ہے جس کی قیمت درج ذیل ہے۔

$$p = vi = 2 \times 12 = 24\,\mathrm{W}$$

یوں کل $96 + 24 = 120\,\mathrm{W}$ طاقت فراہم کی جا رہی ہے جو طاقت کی پیدا وار کے عین برابر ہے۔

شکل 2.7: مزاحمتی ادوار مشق 2.1 تا مشق 2.3

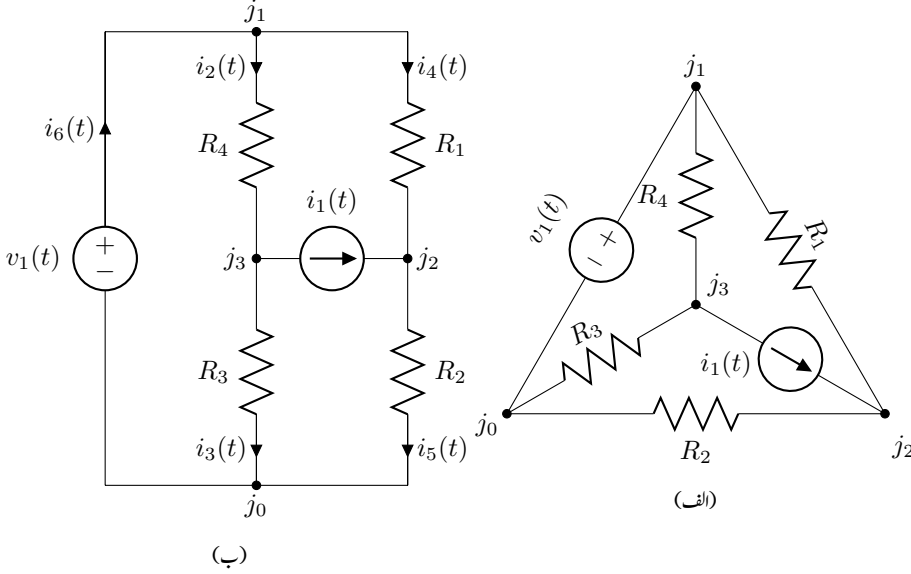
مشق 2.1: شکل 2.7-الف میں مزاحمت کی رو اور طاقت حاصل کریں۔ منبع کی طاقت بھی حاصل کریں۔

جوابات: $i = 7\,\mathrm{A}$ ، $p = 147\,\mathrm{W}$ ، $p = -147\,\mathrm{W}$

مشق 2.2: شکل 2.7-ب میں مزاحمت کا دباو اور طاقت حاصل کریں۔ منبع کی طاقت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $v = 24\,\mathrm{V}$ ، $p = 48\,\mathrm{W}$ ، $p = -48\,\mathrm{W}$

مشق 2.3: شکل 2.7-پ میں مزاحمت کی رو اور دباو حاصل کریں۔ منبع کی طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $i = 2\,\mathrm{A}$ ، $v = 18\,\mathrm{V}$ ، $p = -36\,\mathrm{W}$

شکل 2.8: جوڑ اور دائرے۔

2.2 قوانین کرخوف

اوہم کے قانون سے ایک مزاحمت اور ایک منبع پر مبنی دور آسانی سے حل ہوتا ہے البتہ زیادہ پرزوں پر مبنی دور حل کرتے ہوئے اس کا استعمال قدر مشکل ہوتا ہے۔ زیادہ پرزہ جات کے ادوار **قوانین کرخوف**[13] [14] کی مدد سے نہایت آسانی کے ساتھ حل ہوتے ہیں۔ برقی دور میں برقی پرزوں کو موصل تاروں سے آپس میں جوڑا جاتا ہے۔ موصل تار کی مزاحمت کو صفر اوہم تصور کیا جاتا ہے لہٰذا ان میں طاقت کا ضیاع صفر ہو گا۔ یوں طاقت کی پیداوار اور ضیاع صرف برقی پرزوں میں ممکن ہے۔

اس سے پہلے کہ ہم کرخوف کے قوانین پر غور کریں، ہم کچھ اصطلاحات مثلاً **جوڑ**[15]، **دائرہ**[16] اور **شاخ**[17] جاننے کی کوشش کرتے ہیں۔ شکل 2.8-الف میں مزاحمت R_2 ، R_3 اور منبع V_1 نقطہ j_0 پر جڑے ہیں۔ اس نقطے کو جوڑ j_0 کہا جائے گا۔ اسی شکل میں جوڑ j_1 ، j_2 اور j_3 بھی دکھائے گئے ہیں۔ شکل 2.8-ب میں اسی شکل کو

[13] Kirchoff's laws
[14] جرمنی کے گستاف روبرٹ کرخوف نے ان قوانین کو 1845 میں پیش کیا۔
[15] node
[16] loop
[17] branch

قدر مختلف طریقے سے دکھایا گیا ہے۔یہاں بھی ان جوڑوں کی نشاندہی کی گئی ہے۔کسی بھی دو یا دو سے زیادہ پرزوں کو جوڑنے والے موصل تار کو جوڑ تصور کیا جاتا ہے۔یوں شکل-الف میں جوڑ j_0 نقطہ مانند ہے جبکہ شکل-ب میں نچلی پوری تار جوڑ j_0 ہے۔جوڑ کو ظاہر کرنے والی تار کی لمبائی کچھ بھی ہو سکتی ہے۔

کسی بھی دور میں متعدد راستے ممکن ہیں۔ شکل 2.8 میں جوڑ j_1 سے مزاحمت R_4 کے راستے جوڑ j_3 تک پہنچا جا سکتا ہے جہاں سے منبع $i_1(t)$ کے راستے جوڑ j_1 اور پھر مزاحمت R_1 کے راستے واپس جوڑ j_1 تک پہنچا جا سکتا ہے۔ایسا بند راستہ جو ابتدائی جوڑ پر ہی اختتام پذیر ہو بند راستہ کہلاتا ہے۔ایسا بند راستہ جس پر کسی بھی جوڑ سے صرف ایک مرتبہ گزرا جائے دائرہ[18] کہلاتا ہے۔ اس طرح R_1 ، $i_1(t)$ اور R_4 دائرہ ہے۔اسی طرح R_1 ، R_2 ، R_3 اور R_4 بھی دائرہ ہے۔دائرے کی ایک اور مثال $v_1(t)$ ، R_4 ، $i_1(t)$ اور R_2 ہے۔اس کے برعکس R_4 ، $i_1(t)$ ، R_2 ، R_3 ، $i_1(t)$ اور R_1 دائرہ نہیں ہے چونکہ اس میں جوڑ j_2 اور جوڑ j_3 سے دو مرتبہ گزرا گیا۔

برقی دور میں ہر برقی پرزے کو شاخ[19] کہتے ہیں۔ شکل 2.8 میں کل چھ (6) شاخ ہیں۔جوڑ j_3 پر تین شاخ یعنی R_4 ، R_3 اور $i_1(t)$ جڑتے ہیں۔جوڑ j_0 پر تین شاخ $v_1(t)$ ، R_2 اور R_3 جڑتے ہیں۔آئیں اب **قوانین کرخوف** کی بات کریں۔

کرخوف کا قانون برائے برقی رو کہتا ہے کہ کسی بھی جوڑ پر داخلی برقی رو کا مجموعہ خارجی برقی رو کے مجموعے کے عین برابر ہوتا ہے۔

کرخوف کے قانون برائے برقی رو کو کرخوف **قانونِ** رو کہا جائے گا۔اس قانون کو کسی بھی جوڑ کے لئے یوں

$$\sum i_{\text{داخلی}} = \sum i_{\text{خارجی}} \qquad \text{کرخوف قانونِ رو} \tag{2.9}$$

لکھا جاتا ہے۔شکل 2.8-ب میں جوڑ j_0 پر درج بالا مساوات سے

$$i_3(t) + i_5(t) = i_6(t) \qquad \text{جوڑ } j_0 \tag{2.10}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح بقایا جوڑوں پر کرخوف قانونِ رو سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں جہاں مساوی علامت $(=)$ کے بائیں جانب داخلی رو کا مجموعہ اور دائیں جانب خارجی رو کا مجموعہ ہے۔

$$i_6(t) = i_2(t) + i_4(t) \qquad \text{جوڑ } j_1 \tag{2.11}$$

$$i_1(t) + i_4(t) = i_5(t) \qquad \text{جوڑ } j_2 \tag{2.12}$$

$$i_2(t) = i_1(t) + i_3(t) \qquad \text{جوڑ } j_3 \tag{2.13}$$

---

[18] loop
[19] branch

اگر جوڑ پر تمام رو کی سمت خارجی تصور کی جائے تب کرخوف قانون رو[20] کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $i_s(t)$ شاخ s میں جوڑ سے خارج رو ہے اور جوڑ کے ساتھ جڑے شاخوں کی تعداد N ہے۔

$$\sum_{s=1}^{N} i_s(t) = 0 \qquad \text{کرخوف قانونِ رو} \tag{2.14}$$

اگر جوڑ پر تمام رو کی سمت داخلی تصور کی جائے تب بھی کرخوف قانون رو کو درج بالا لکھا جا سکتا ہے جہاں $i_s(t)$ شاخ s میں جوڑ پر داخل رو ہے۔

مساوات 2.14 کو استعمال کرتے ہوئے شکل 2.8-ب کے لئے درج ذیل لکھا جائے گا جہاں خارجی رو مثبت اور داخلی رو منفی لکھے گئے ہیں۔

$$i_6(t) - i_3(t) - i_5(t) = 0 \qquad j_0 \text{ جوڑ} \tag{2.15}$$
$$i_2(t) + i_4(t) - i_6(t) = 0 \tag{2.16}$$
$$i_5(t) - i_1(t) - i_4(t) = 0 \tag{2.17}$$
$$i_1(t) + i_3(t) - i_2(t) = 0 \tag{2.18}$$

مساوات 2.10 تا مساوات 2.13 کو مساوات 2.9 سے حاصل کیا گیا جبکہ مساوات 2.15 تا مساوات 2.18 کو مساوات 2.14 سے حاصل کیا گیا۔مساوات 2.10 میں داخلی رو یعنی $i_3(t)$ اور $i_5(t)$ کو مساوی نشان $(=)$ کی دوسری جانب منتقل کرنے سے مساوات 2.15 حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات 2.9 اور مساوات 2.14 عین برابر ہیں۔

مساوات 2.16، مساوات 2.17 اور مساوات 2.18 کو جمع کرنے کے بعد منفی ایک (-1) سے ضرب دینے سے مساوات 2.15 حاصل ہوتا ہے۔یوں مندرجہ بالا چار ہمزاد مساوات[21] میں صرف تین عدد مساوات غیر تابع[22] مساوات ہیں۔ان میں کسی بھی تین مساوات کے استعمال سے چوتھی مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ دو آزاد متغیرات حاصل کرنے کی خاطر دو عدد غیر تابع مساوات درکار ہوتے ہیں۔یوں آزاد متغیرات x اور y مندرجہ ذیل ہمزاد مساوات میں سے کسی بھی دو مساوات کو بیک وقت حل کرنے سے حاصل کرنا ممکن ہے۔ان میں کسی بھی دو عدد مساوات کو غیر تابع تصور کرتے ہوئے تیسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے لہٰذا تیسری تابع مساوات

[20] Kirchoff's Current Law, KCL
[21] simultaneous equations
[22] independent equations

شکل 2.9: کرخوف قانونِ رو کو بکریوں پر بھی لاگو کیا جا سکتا ہے۔

ہے جو کوئی نئی معلومات فراہم نہیں کرتی۔تابع مساوات غیر ضروری مساوات ہوتی ہے جسے لکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔

$$x + y = 3$$
$$x - y = 1$$
$$x - 3y = -1$$

جس برقی دور میں کل J عدد جوڑ پائے جاتے ہوں، اس میں $J-1$ غیر تابع مساوات حاصل ہوتے ہیں لہٰذا کسی بھی ایک جوڑ کے بغیر بقایا تمام پر جوڑ پر مساوات کئے جاتے ہیں۔

کرخوف قانونِ رو کے استعمال میں اصل رو کی سمت کو نہیں دیکھا جاتا بلکہ صرف متغیرات $i_1(t)$ ، $i_2(2)$ ، $i_3(t)$ ، $\cdots$ کی سمت کو دیکھتے ہوئے مساوات لکھی جاتی ہے۔یوں شکل 2.8-ب میں جوڑ j_2 پر $i_1(t)$ کو داخلی تصور کیا جائے گا اگرچہ $i_1(t) = -3\,\mathrm{A}$ کی صورت میں رو حقیقت میں دکھائی گئی سمت کے الٹ ہو گی۔

کرخوف قانونِ رو عمومی مساوات ہے جسے ہم روزمرہ زندگی میں برقی رو کی بجائے مختلف چیزوں پر لاگو کرتے ہیں۔شکل 2.9-الف میں ایک گڈریا پورے دن بکریاں چرانے کے بعد انہیں شام کو پہاڑی سے نیچے ایک پگڈنڈی پر اتار رہا ہے۔گڈریا اپنی بکریوں کو خیر خیریت سے دکھائی گئے راستے سے نیچے اتار پاتا ہے۔نقطہ j سے نیچے دو پگڈنڈیاں ہیں۔اگر بالائی پگڈنڈی پر b_1 بکریاں اترتے گنی جائیں تو آپ یقین کر سکتے ہیں کہ نچلی دو پگڈنڈیوں پر کل اتنی ہی بکریاں اترے گی یعنی $b_1 = b_2 + b_3$ ہو گا۔ تار میں کسی بھی مقام سے فی سیکنڈ گزرتی برقی بار کو برقی رو کہتے ہیں۔یوں برقی رو کی بات کرتے ہوئے ہم حقیقت میں برقی بار کی بات کرتے ہیں۔تار میں برقی بار کا وجود الیکٹران پر ہے جس کی تعداد نا تو کم ہوتی ہے اور نا ہی بڑھتی ہے۔اسی لئے بالکل پگڈنڈی پر چلتی بکریوں کی طرح تار میں چلتے الیکٹران کی تعداد بھی برقرار رہتی ہے اور کسی جوڑ پر آمدی الیکٹران کی تعداد اس جوڑ سے خارج ہوتے الیکٹران کے برابر ہو گی۔طبیعیات کے اصولوں کے تحت کسی بھی جوڑ پر برقی بار کا انبار نہیں جمع ہوتا۔[23]

[23] میں امید کرتا ہوں کہ میری شاگردہ فرحانہ مشتاق کی طرح آپ کو بھی گڈریا کی مثال سے کرخوف قانونِ رو کی سمجھ آگئی ہو گی۔

کرخوف قانونِ رو کسی بھی بند سطح کے لئے درست ہے۔ شکل 2.9-ب میں ہلکی سیاہی میں بند سطح میں داخل بکریوں کی تعداد سطح سے خارج بکریوں کے برابر ہو گی۔اس شکل میں بند سطح کو جوڑ j تصور کیا جا سکتا ہے۔

مثال 2.7: شکل 2.10-الف میں نا معلوم رو دریافت کریں۔

حل:جوڑ j_2 پر داخلی رو $2\,\mathrm{mA}+5\,\mathrm{mA}$ ہے جو خارجی رو i_4 کے برابر ہو گی یعنی

$$i_4 = 5\,\mathrm{mA} + 2\,\mathrm{mA} = 7\,\mathrm{mA}$$

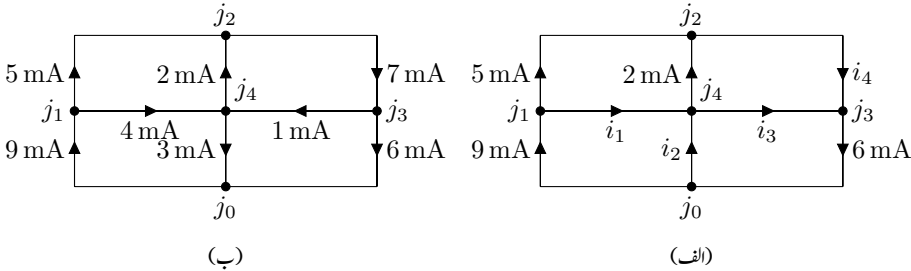
جوڑ j_3 پر داخلی رو کا مجموعہ i_4+i_3 ہے جو خارجی $6\,\mathrm{mA}$ کے برابر ہو گا۔یوں درج بالا حاصل کردہ i_4 کی قیمت پُر کرتے ہوئے

$$7\,\mathrm{mA} + i_3 = 6\,\mathrm{mA}$$

سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$i_3 = -1\,\mathrm{mA}$$

جو منفی قیمت ہے۔ منفی i_3 کا مطلب ہے کہ حقیقت میں رو دکھائی گئی سمت کے الٹ ہے۔ شکل 2.10-ب میں حقیقی سمت دکھائی گئی ہے۔یوں حقیقت میں جوڑ j_3 سے جوڑ j_4 کی جانب $1\,\mathrm{mA}$ رو پائی جاتی ہے۔جوڑ j_0 پر داخلی رو $6\,\mathrm{mA}$ ہے جبکہ خارجی رو کا مجموعہ $i_2+9\,\mathrm{mA}$ ہے لہٰذا

$$9\,\mathrm{mA} + i_2 = 6\,\mathrm{mA}$$

شکل 2.10: کرخوف قانون رو کی مثال۔

ہو گا جس سے

$$i_2 = -3\,\mathrm{mA}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں حقیقت میں جوڑ j_4 سے جوڑ j_0 کی جانب $3\,\mathrm{mA}$ رو پائی جائے گی۔جوڑ j_1 پر داخلی رو $9\,\mathrm{mA}$ ہے جبکہ خارجی رو کا مجموعہ $i_1 + 5\,\mathrm{mA}$ ہے۔یوں

$$9\,\mathrm{mA} = i_1 + 5\,\mathrm{mA}$$

لکھا کر

$$i_1 = 4\,\mathrm{mA}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل-الف میں جوڑ j_4 پر

$$i_1 + i_2 = i_3 + 2\,\mathrm{mA}$$

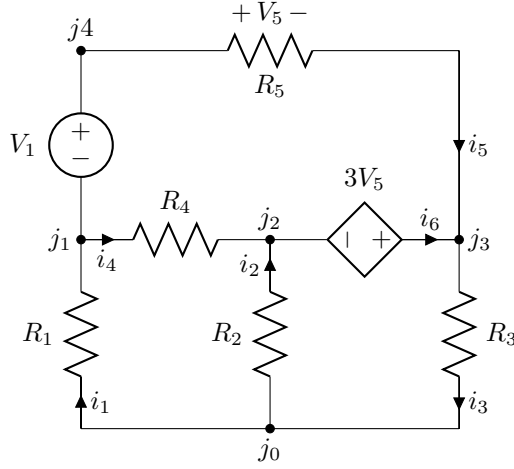
لکھا جا سکتا ہے۔ہم $i_3 = -1\,\mathrm{mA}$ اور $i_2 = -3\,\mathrm{mA}$ پہلے حاصل کر چکے ہیں۔یہ قیمتیں پُر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} i_1 &= i_3 + 2\,\mathrm{mA} - i_2 \\ &= -1\,\mathrm{mA} + 2\,\mathrm{mA} - (-3\,\mathrm{mA}) \\ &= 4\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

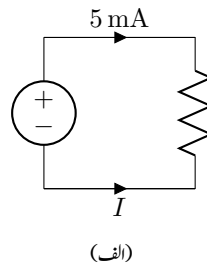
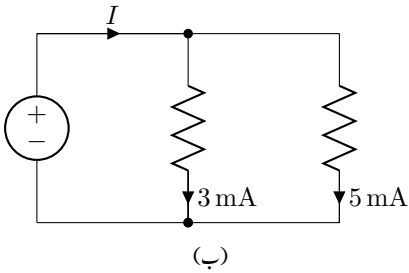
ہی حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کرخوف قانونِ رو لکھتے ہوئے i_1 ، i_2 ، i_3 ، $\cdots$ کے دکھائے گئے سمتوں سے ہی انہیں داخلی یا خارجی رو گنا جاتا ہے۔

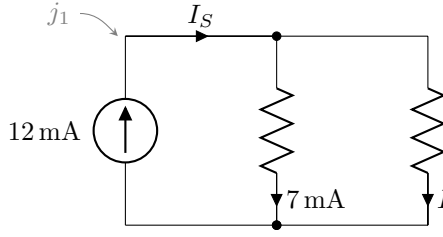
مثال 2.8: شکل 2.11 میں تمام جوڑ پر کرخوف قانونِ رو کی مساوات لکھیں۔

حل:جوڑ j_0 تا جوڑ j_4 بالترتیب مساوات لکھتے ہیں۔خارجی رو کو مثبت تصور کیا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \\ i_4 + i_5 - i_1 &= 0 \\ i_6 - i_2 - i_4 &= 0 \\ i_3 - i_5 - i_6 &= 0 \\ i_5 &= i_5 \end{aligned}$$

شکل 2.11: کرخوف قانون رو کی دوسری مثال۔

مشق 2.4: شکل 2.12 میں I دریافت کریں۔

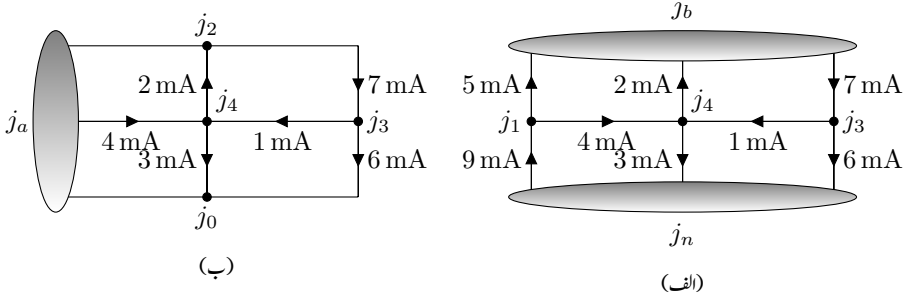
جواب: (الف): $I=-5\,\mathrm{mA}$ ، (ب): $I=8\,\mathrm{mA}$

شکل 2.12: کرخوف قانونِ رو کا پہلا مشق۔

مشق 2.5: شکل 2.13 میں I_S اور I حاصل کریں۔

شکل 2.13: مشق 2.5 کی شکل۔

جوابات: $I_S = 12\,\mathrm{mA}$ ، $I = 5\,\mathrm{mA}$ ؛ برقی رو I_S حاصل کرنے کی خاطر نقطہ j_1 کو جوڑ تصور کریں۔

مثال 2.9: شکل 2.10-ب میں کسی بھی جگہ بند سطح کھینچ کر دیکھا جا سکتا ہے کہ کرخوف قانونِ رو بند سطح پر لاگو ہوتا ہے۔ شکل 2.14-الف میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔ بالائی اور نچلی سطح کے داخلی اور خارجی رو دریافت کریں۔

حل: بالائی سطح کو جوڑ تصور کیا جا سکتا ہے۔ شکل میں اس جوڑ کو j_b کہا گیا ہے۔ بالائی سطح پر مجموعی داخلی رو $5\,\mathrm{mA} + 2\,\mathrm{mA}$ ہے۔ اس سے $7\,\mathrm{mA}$ رو خارج ہوتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ داخلی اور خارجی رو برابر ہیں۔

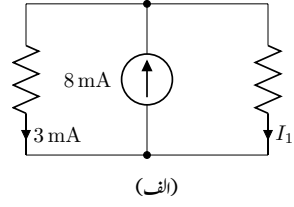
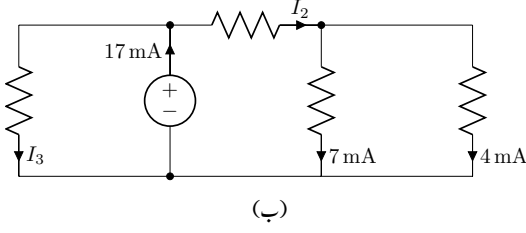
نچلی سطح پر داخلی رو $3\,\mathrm{mA} + 6\,\mathrm{mA}$ ہے اور خارجی رو $9\,\mathrm{mA}$ ہے۔ اس سطح پر بھی داخلی اور خارجی رو برابر ہیں۔ نچلی سطح کو جوڑ j_n کہا گیا ہے۔

شکل 2.14: کرخوف قانونِ رو ہر بند سطح پر لاگو ہوتا ہے۔

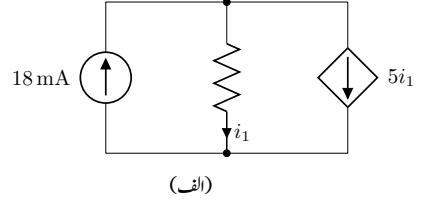
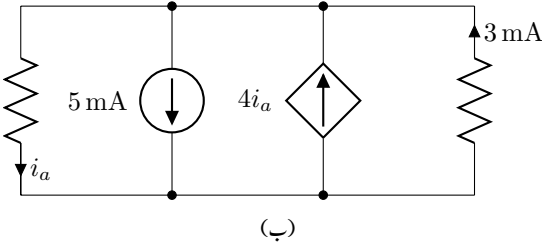
آپ شکل 2.10-ب پر کسی بھی جگہ پر بند سطح کھینچ کر دیکھ سکتے ہیں کہ اس سطح پر داخلی رو عین سطح سے خارجی رو کے برابر ہو گی۔

مشق 2.6: شکل 2.14-ب میں بند سطح کی داخلی اور خارجی رو حاصل کریں۔

جوابات: داخلی رو $9\,\text{mA}$ ہے اور خارجی رو بھی $9\,\text{mA}$ ہے۔

مشق 2.7: شکل 2.15 میں نا معلوم رو دریافت کریں۔

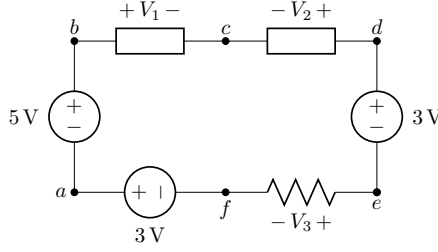
جواب: $I_1 = 5\,\text{mA}$ ، $I_2 = 11\,\text{mA}$ اور $I_3 = 6\,\text{mA}$

شکل 2.15: مشق 2.7 میں استعمال ہونے والا دور۔

مشق 2.8: شکل 2.16-الف میں i_1 اور شکل-ب میں i_a دریافت کریں۔

شکل 2.16: مشق 2.8 میں استعمال ہونے والا دور۔

جوابات: $i_1 = 3\,\mathrm{mA}$ ، $i_a = \frac{2}{3}\,\mathrm{mA}$

کرخوف کا دوسرا قانون، کرخوف قانون برائے برقی دباو ہے۔اس قانون کو عموماً کرخوف قانون دباو[24] کہا جاتا ہے۔

کرخوف قانونِ دباو کہتا ہے کہ کسی بھی بند راہ پر بڑھتے برقی دباو کا مجموعہ، گھٹتے برقی دباو کے مجموعے کے عین برابر ہو گا۔

[24] Kirchoff's voltage law, KVL

شکل 2.17: کرخوف قانونِ دباو۔

شکل 2.17 میں جوڑ a سے برقی دور میں گھڑی کے سمت گھومتے ہوئے بڑھتے دباو کا مجموعہ

$$\text{بڑھتا دباو} = 5 + V_2 + 3$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ گھٹتے دباو کا مجموعہ

$$\text{گھٹتا دباو} = V_1 + 3 + V_3$$

حاصل ہوتا ہے۔کرخوف قانون دباو کے تحت یہ قیمتیں برابر ہیں یعنی

$$5 + V_2 + 3 = V_1 + 3 + V_3$$

ہو گا۔اس مساوات کو یوں

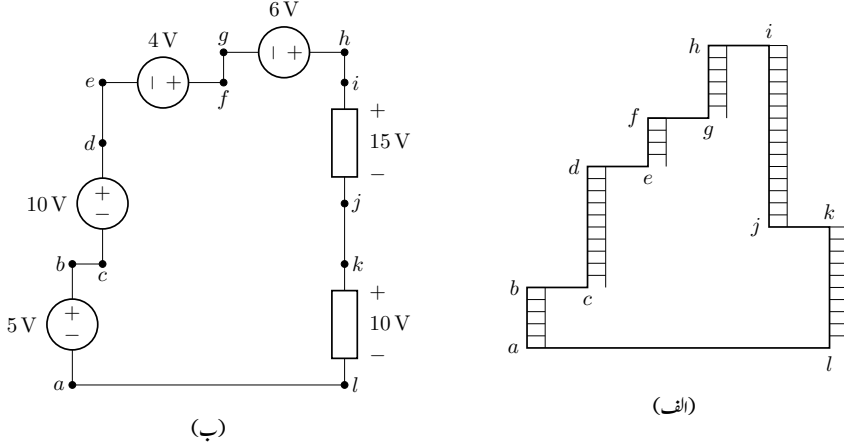
$$5 + V_2 + 3 - V_1 - 3 - V_3 = 0 \tag{2.19}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔یوں کرخوف قانون دباو کو

$$\sum_{b=1}^{B} V_b = \sum_{g=1}^{G} V_g \qquad \text{کرخوف قانونِ دباو} \tag{2.20}$$

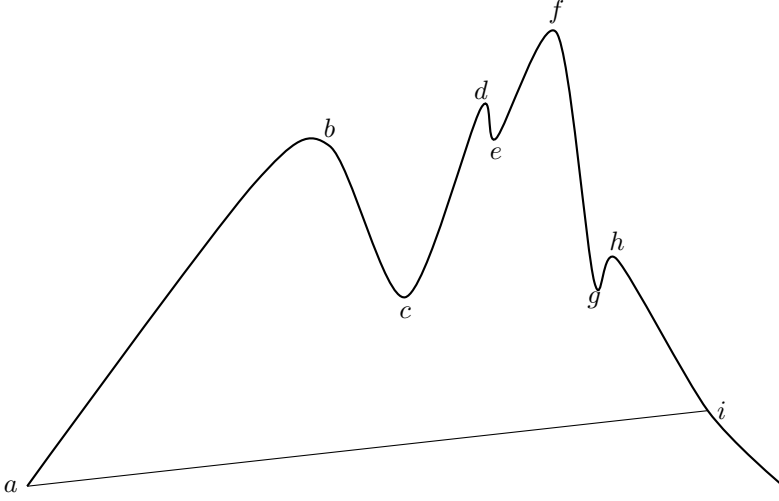
لکھا جا سکتا ہے جہاں بند دائرے میں بڑھتے دباو کی تعداد B اور گھٹتے دباو کی تعداد G ہے۔

شکل 2.17 میں بڑھتے دباو کو مثبت اور گھٹتے دباو کو منفی لکھتے ہوئے مجموعہ حاصل کرنے سے عین مساوات 2.19 حاصل ہوتا ہے لہٰذا کرخوف قانون دباو کو درج ذیل مساوات کی صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sum_{s=1}^{S} V_s = 0 \qquad \text{کرخوف قانونِ دباو} \tag{2.21}$$

شکل 2.18: کرخوف قانون دباو اور بلندی۔

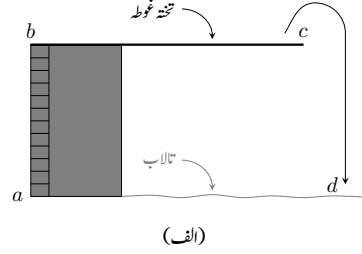
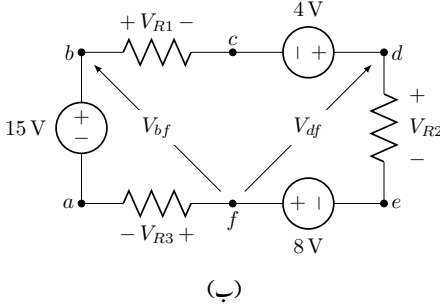
اس مساوات میں اگر بڑھتے دباو کو مثبت لکھا جائے تب گھٹتے دباو کو منفی لکھا جائے گا اور اگر گھٹتے دباو کو مثبت لکھا جائے تب بڑھتے دباو کو منفی لکھا جائے گا۔

شکل 2.9 میں کرخوف قانونِ رو کو پہاڑی سے اترتی بکریوں کی مدد سے سمجھایا گیا۔آئیں کرخوف قانون دباو کو شکل 2.18 کی مدد سے سمجھیں۔

شکل 2.18-الف میں ایک عمارت کا بیرونی خاکہ دکھایا گیا ہے۔عمارت کے بائیں طرف سیڑھی کو استعمال کرتے ہوئے پہلی منزل b تک پہنچنا ممکن ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ a سے پانچ سیڑھی بلندی پر b واقع ہے۔یوں a سے b تک پہنچنے پر آپ پانچ سیڑھی بلندی اختیار کریں گے۔اس حقیقت کو ریاضیاتی طور پر $B_{ba} = 5$ لکھا جاتا ہے۔پہلی منزل کی چھت b تا c ہے یوں b سے c تک چلنے میں آپ کی بلندی جوں کی توں رہے گی۔اسی طرح d تک پہنچنے کی خاطر مزید دس سیڑھیاں چڑھنی ہو گی یعنی $B_{dc} = 10$ ۔یوں a سے d کی اونچائی پندرہ سیڑھی ہے۔ان حقائق کو ریاضیاتی طور پر $B_{da} = B_{ba} + B_{dc}$ لکھا جائے گا۔اسی طرح a سے h تک $B_{ha} = B_{ba} + B_{dc} + B_{fe} + B_{hg}$ ہو گا۔اب i سے j پہنچنے کے لئے پندرہ سیڑھی اترنا ہو گا یعنی $B_{ja} = B_{ba} + B_{dc} + B_{fe} + B_{hg} - B_{ij}$ جس میں قیمتیں پر کرتے ہوئے $B_{ja} = 5 + 10 + 4 + 6 - 15 = 10$ حاصل ہوتا ہے۔اب j تک پہنچنے کے لئے ضروری نہیں کہ عمارت کے بائیں جانب سے ہی ہم سیڑھیاں چڑھنے شروع ہو جائیں۔ہم عمارت کے دائیں جانب سیڑھی استعمال کرتے ہوئے a سے k چڑھ سکتے ہیں جہاں سے $B_{ka} = 10$ حاصل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ a سے j کی اونچائی کا انحصار اس پر بالکل نہیں کہ ہم کس

شکل 2.19: کرخوف قانونِ دباو اور پہاڑی پر چڑتی بکریاں۔

راستے پر چلتے ہوئے اس بلندی کو ناپیں۔اگر عمارت کے بائیں جانب نقطہ a سے شروع ہو کر تمام سیڑھیاں استعمال کرتے ہوئے واپس نقطہ a پہنچا جائے تو ہم کل پچیس سیڑھیاں بلندی تک پہنچنے کے بعد اتنا ہی واپس اتر چکے ہوں گے۔اس حقیقت کو $B_{ba} + B_{dc} + B_{fe} + B_{hg} - B_{ij} - B_{kl} = 0$ لکھا جا سکتا ہے جس کے تحت کسی بھی بند راہ پر چلنے سے جتنا اوپر چلا جائے اتنا ہی نیچے چلنا ہو گا۔یہی کچھ شکل 2.19 سے بھی دیکھا جا سکتا ہے جہاں فرحانہ پورا دن بکریاں چرانے کے بعد واپس ابتدائی نقطہ a پہنچتی ہے۔اگر پورے راستے پر ہر قدم اونچائی ناپی جائے تو جواب صفر ہی حاصل ہو گا۔

شکل 2.18-الف کا مساوی برقی دور شکل 2.18-ب میں دکھایا گیا ہے۔شکل 2.18-الف میں b تا c بلندی برقرار رہتی ہے۔شکل 2.18-ب میں b تا c برقی دباو برقرار رہتا ہے۔اسی طرح شکل-الف میں d تا e بلندی برقرار رہتی ہے۔شکل 2.18-ب میں d تا e برقی دباو برقرار رہتا ہے۔شکل-الف میں برقرار بلندی کو افقی دکھایا جاتا ہے جبکہ بلندی میں تبدیلی کو عمودی دکھایا جاتا ہے۔شکل-ب میں برقرار برقی دباو کو تار ظاہر کرتی ہے اور ایسی تار کو جوڑ[25] کہا جاتا ہے۔شکل-ب میں $V_{ba} = 5\,\mathrm{V}$ لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح $V_{dc} = 10\,\mathrm{V}$ اور $V_{da} = V_{ba} + V_{dc}$ لکھا جائے گا۔اسی طرح $V_{ja} = V_{ba} + V_{dc} + V_{fe} + V_{hg} - V_{ij}$ سے $V_{ja} = 10\,\mathrm{V}$ حاصل ہوتا ہے۔شکل-ب میں a سے شروع ہو کر گھڑی کی سمت میں پورا چکر کاٹتے ہوئے $V_{ba} + V_{dc} + V_{fe} + V_{hg} - V_{ij} - V_{kl} = 0$ لکھا جا سکتا ہے جہاں بڑھتے دباو کو مثبت لکھا گیا ہے۔اسی

[25] node

شکل 2.20: کرخوف قانون دباو کے استعمال میں بند دائرہ فرضی ہو سکتا ہے۔

طرح j سے شروع ہو کر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے $V_{ij}-V_{hg}-V_{fe}-V_{dc}-V_{ba}+V_{kl}=0$ لکھا جا سکتا ہے۔اگر ہم گھٹتے دباو کو مثبت لکھیں تب j سے شروع ہو کر گھڑی کے الٹ چلتے ہوئے $-V_{ij}+V_{hg}+V_{fe}+V_{dc}+V_{ba}-V_{kl}=0$ لکھا جائے گا۔عام زندگی میں برقرار بلندی افقی سطح کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا شکل 2.18-الف میں افقی لکیر برقرار بلندی کو ظاہر کرتی ہے۔برقی دور میں برقرار دباو کو افقی لکیر سے ظاہر کرنے کی کوئی روایت نہیں۔یوں شکل 2.18-ب میں افقی لکیر $b-c$ اور عمودی لکیر $d-e$ برقرار دباو کو ظاہر کرتے ہیں۔برقی دور میں موصل تار پر دباو تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا تار ہی برقرار دباو کو ظاہر کرتی ہے۔

کرخوف قانون دباو کے استعمال بند دائرے پر ہوتا ہے۔ایسا بند دائرہ فرضی بھی ہو سکتا ہے۔آئیں ایسی ایک مثال دیکھیں۔شہروں میں پانی کے تالاب پر عموماً غوطہ لگانے کی خاطر اونچائی پر تختہ نسب ہوتا ہے جہاں سے غوطہ خور قلابازیاں کھاتا ہوا پانی تک پہنچتا ہے۔ شکل 2.20-الف میں ایسا ہی تختہ غوطہ[26] دکھایا گیا ہے جس تک بائیں جانب نسب سیڑھی کے ذریعہ پہنچا جا سکتا ہے۔اس سیڑھی کو استعمال کرتے ہوئے غوطہ خور a سے b تک چڑھتا ہے۔یہاں سے وہ دوڑ لگاتا ہوا c پہنچ کر ہوا میں قلابازیاں کھاتا ہوا نیچے تالاب میں ڈبکی لگاتا ہے۔ شکل میں تیر کی لکیر غوطہ خور کے گرنے کو دکھاتی ہے۔اب a سے b اور یہاں سے c تک حقیقی راہ پائی جاتی ہے جس پر غوطہ خور چلتا ہے لیکن c سے d تک کوئی سیڑھی نہیں ہے۔یہ بس خلاء میں فرضی راہ ہے جس پر غوطہ خور نیچے اترتا ہے جس کے بعد وہ واپس a تک لوٹتے ہوئے بند دائرے پر چال قدمی پوری کرتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بارہ سیڑھیاں چڑنے کے بعد غوطہ خور بارہ[27] سیڑھی ہی نیچے گرتا ہے۔

آئیں اب یہی کچھ برقی دور میں بھی دیکھیں۔ایسا شکل 2.20-ب کی مدد سے دیکھتے ہیں۔گھٹتے دباو کو مثبت لکھتے ہوئے، a سے گھڑی کی سمت چل کر ایک چکر کے بعد $-15+V_{R1}-4+V_{R2}-8+V_{R3}=0$ لکھا جا سکتا

[26] diving board
[27] جی مجھے معلوم ہے کہ غوطہ خور اوپر چھلانگ لگا کر بارہ سیڑھی سے زیادہ بلندی سے گرتا ہے۔ مجھے امید ہے کہ آپ تمام گفتگو کی اصل مقصد سمجھ گئے ہوں گے۔

ہے جس سے

$$V_{R1} + V_{R2} + V_{R3} = 15 + 4 + 8$$

حاصل ہوتا ہے۔ایسا حقیقی راہ پر کیا گیا۔آئیں اب f سے a اور یہاں سے b کے بعد فرضی راہ پر واپس f پہنچیں۔فرضی راہ کو نوک دار لکیر سے دکھایا گیا ہے جہاں تیر کا نشان مثبت سرے کو ظاہر کرتی ہے۔یوں

$$V_{R3} - 15 + V_{bf} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں گھٹتے دباو کو مثبت لکھا گیا ہے۔اس سے

$$V_{bf} = 15 - V_{R3}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں اگر $V_{R3} = 7\,\mathrm{V}$ ہو تب $V_{bf} = 8\,\mathrm{V}$ ہو گا۔ یہاں بتلاتا چلوں کہ اس کتاب میں گھٹتے دباو کو ہی مثبت لکھا جائے گا۔ایسا لکھنے میں آپ کو شروع میں کچھ دقت ہو سکتی ہے۔اسی طرح دیگر فرضی بند دائروں پر مندرجہ ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} V_{R3} - 15 + V_{R1} - 4 + V_{df} &= 0 \\ 8 - V_{R2} + V_{df} &= 0 \\ -V_{bf} + V_{R1} - 4 + V_{df} &= 0 \end{aligned}$$

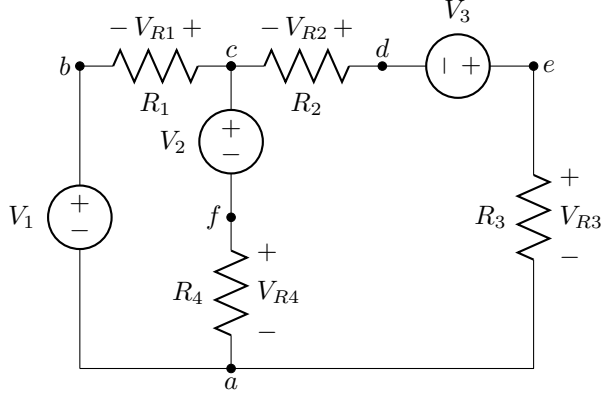
جہاں پہلی اور دوسری مساوات میں گھڑی کی سمت جبکہ دوسری مساوات میں گھڑی کی الٹ سمت چلا گیا ہے۔یوں اگر $V_{R1} = 9\,\mathrm{V}$ ، $V_{R2} = 11\,\mathrm{V}$ اور $V_{R3} = 7\,\mathrm{V}$ ہوں تب $V_{df} = 3\,\mathrm{V}$ اور $V_{bf} = 8\,\mathrm{V}$ ہوں گے۔

شکل 2.21 میں کرخوف قانون دباو استعمال کرتے ہوئے کل تین عدد مساوات لکھنا ممکن ہے۔یہ مساوات بائیں بند دائرہ $abcfa$ ، دائیں بند دائرہ $afcdea$ اور بیرونی بند دائرہ $abcdea$ پر لکھے جائیں گے جنہیں یہاں پیش کرتے ہیں۔

$$-V_1 - V_{R1} + V_2 + V_{R4} = 0 \tag{2.22}$$

$$-V_{R4} - V_2 - V_{R2} - V_3 + V_{R3} = 0 \tag{2.23}$$

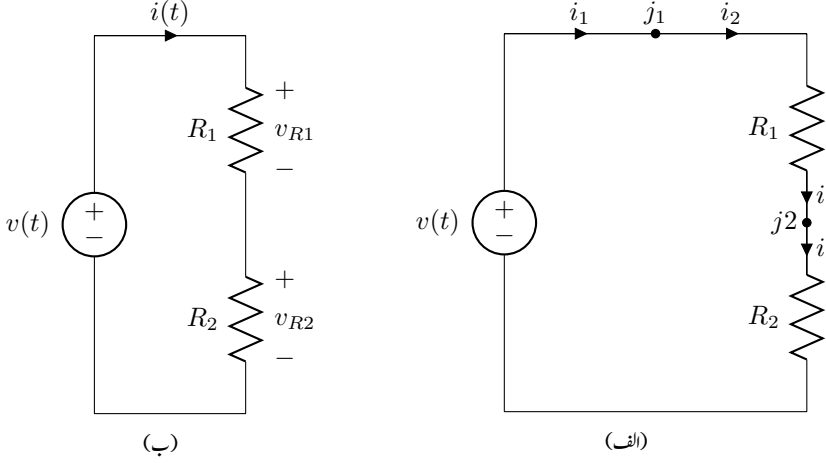
$$-V_1 - V_{R1} - V_{R2} - V_3 + V_{R3} = 0 \tag{2.24}$$

مساوات 2.22 اور مساوات 2.23 کو آپس میں جمع کرنے سے مساوات 2.24 حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مساوات 2.23 سے مساوات 2.24 منفی کرنے سے مساوات 2.22 حاصل ہوتا ہے۔یوں ان میں سے کسی بھی دو مساوات سے تیسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ایسی صورت میں دو عدد مساوات کو **غیر تابع مساوات** کہتے ہیں جبکہ ان سے

شکل 2.21: تابع اور غیر تابع مساوات۔

حاصل تیسری مساوات **تابع مساوات**[28] کہلاتی ہے۔آپ جانتے ہیں کہ دو آزاد متغیرات حاصل کرنے کی خاطر دو عدد غیر تابع مساوات درکار ہوتے ہیں۔یوں آزاد متغیرات x اور y مندرجہ ذیل ہمزاد مساوات میں سے کسی بھی دو مساوات کو بیک وقت حل کرنے سے حاصل کرنا ممکن ہے۔ان میں کسی بھی دو عدد مساوات کو غیر تابع تصور کرتے ہوئے تیسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے لہٰذا تیسری تابع مساوات ہے جو کوئی نئی معلومات فراہم نہیں کرتی۔تابع مساوات غیر ضروری مساوات ہوتی ہے جسے لکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔

$$
\begin{aligned}
x+y&=3\\
x-y&=-1\\
3x+y&=5
\end{aligned}
$$

شکل 2.21 صرف دو عدد غیر تابع مساوات مہیا کرتا ہے لہٰذا اگرچہ ہم اس دور کے لئے تین مساوات لکھ سکتے ہیں لیکن ایسا کرنے کی کوئی ضرورت نہیں۔کسی بھی دور میں مساوات لکھنے سے پہلے بند دائرے چنے جاتے ہیں۔بند دائرے یوں چنیں کہ دور میں نسب تمام اجزاء کسی نہ کسی دائرے کا حصہ بنے۔یوں کم سے کم تعداد کے بند دائرے چننے سے کم سے کم مساوات حاصل ہوں گے۔کم تعداد کے مساوات حل کرنا نسبتاً زیادہ آسان ہوتا ہے۔

[28] dependent equation

شکل 2.22: سلسلہ وار جڑے مزاحمت میں دباو کی تقسیم۔

2.3 سلسلہ وار جڑے پرزوں میں رو

کرخوف کے قوانین جاننے کے بعد آئیں انہیں چند سادہ ادوار پر لاگو کرتے ہوئے کچھ کارآمد نتائج حاصل کریں۔ شکل 2.22-الف میں منبع دباو $v(t)$ کے ساتھ سلسلہ وار دو عدد مزاحمت جڑے ہیں۔ منبع ہر نقطے پر دور میں دباو اور رو نافذ کرتا ہے۔ منبع اور R_1 آپس میں جوڑ j_1 پر ملتے ہیں۔ منبع کی رو i_1 اور مزاحمت میں داخل ہوتی رو کو i_2 تصور کرتے ہوئے جوڑ j_1 پر کرخوف قانون رو لاگو کرتے ہوئے $i_1 = i_2$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں منبع اور مزاحمت R_1 میں بالکل برابر رو پائی جاتی ہے۔ یہی ترکیب مزاحمت R_1 اور مزاحمت R_2 کے جوڑ j_2 پر لاگو کرتے ہوئے $i_2 = i_3$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں اگر $i_1 = 3\,\mathrm{mA}$ ہوتی تب i_2 اور i_3 بھی $3\,\mathrm{mA}$ ہوتے اور یہ برقی رو دور میں گھڑی کی سمت گھومتی۔ اس حقیقت کو یوں بہتر بیان کیا جا سکتا ہے کہ سلسلہ وار پرزوں میں یکساں برقی رو پائی جاتی ہے۔

2.4 تقسیم دباو

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ سلسلہ وار دور میں ہر مقام پر یکساں رو پائی جاتی ہے۔ اسی سلسلہ وار دور کو شکل 2.22-ب میں دوبارہ پیش کیا گیا ہے جہاں دور کی رو کو $i(t)$ لکھا گیا ہے۔ شکل-ب کے لئے کرخوف قانون دباو

سے

$$v(t) = v_{R1} + v_{R2} \tag{2.25}$$

لکھا جا سکتا ہے۔کسی بھی مزاحمت میں گزرتی رو اور مزاحمت کے سروں کے مابین دباو کا تعلق قانون اوہم دیتا ہے۔یوں مزاحمت R_1 اور R_2 پر درج ذیل دباو نافذ ہوں گے۔

$$\begin{aligned} v_{R1} &= i(t)R_1 \\ v_{R2} &= i(t)R_2 \end{aligned} \tag{2.26}$$

مساوات 2.26 کو مساوات 2.25 میں پر کرتے ہوئے

$$v(t) = i(t)R_1 + i(t)R_2 \tag{2.27}$$

رو کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_1 + R_2} \tag{2.28}$$

مساوات 2.26 اور مساوات 2.28 کی مدد سے مزاحمت R_1 اور R_2 کے دباو حاصل کئے جا سکتے ہیں۔مزاحمت R_1 کا دباو

$$\begin{aligned} v_{R1} &= i(t)R_1 \\ &= \left[\frac{v(t)}{R_1 + R_2}\right] R_1 \end{aligned}$$

یا

$$v_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v(t) \tag{2.29}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح مزاحمت R_2 کا دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v(t) \tag{2.30}$$

مساوات 2.29 اور مساوات مساوات 2.30 تقسیم دباو کے مساوات ہیں۔آئیں ان کی افادیت ایک مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال 2.10: شکل 2.22 میں $v(t) = 15\,\mathrm{V}$ ہے جبکہ مزاحمت $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ اور $R_2 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ ہیں۔دونوں مزاحمت کے دباو حاصل کریں۔منبع اور مزاحمتوں کی طاقت دریافت کریں۔

مساوات 2.29 سے

$$v_{R1} = \frac{15 \times 1000}{1000 + 2000} = 5\,\mathrm{V}$$

اور مساوات 2.30 سے

$$v_{R2} = \frac{15 \times 2000}{1000 + 2000} = 10\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جوابات یوں بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں کہ پہلے مساوات 2.28 سے رو

$$i(t) = \frac{15}{1000 + 2000} = 5\,\mathrm{mA}$$

حاصل کریں اور پھر قانون اوہم سے

$$v_{R1} = i(t)R_1 = 5 \times 10^{-3} \times 1000 = 5\,\mathrm{V}$$
$$v_{R2} = i(t)R_2 = 5 \times 10^{-3} \times 2000 = 10\,\mathrm{V}$$

لکھیں۔منبع کی طاقت

$$p_{\text{منبع}} = 15 \times (-5 \times 10^{-3}) = -75\,\mathrm{mW}$$

جبکہ R_1 کی طاقت

$$p_{R1} = 5 \times 5 \times 10^{-3} = 25\,\mathrm{mW}$$

اور R_2 کی طاقت

$$p_{R2} = 10 \times 5 \times 10^{-3} = 50\,\mathrm{mW}$$

حاصل ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ طاقت کی پیداوار اور ضیاع برابر ہیں۔

مزاحمت کی طاقت مساوات 2.4 میں دئے دیگر کلیات سے بھی حاصل کر کے دیکھتے ہیں۔

$$p_{R1} = i^2(t)R_1 = (5\times10^{-3})^2 \times 1000 = 25\,\text{mW}$$
$$p_{R1} = \frac{v_{R1}^2}{R_1} = \frac{5^2}{1000} = 25\,\text{mW}$$
$$p_{R2} = i^2(t)R_2 = (5\times10^{-3})^2 \times 2000 = 50\,\text{mW}$$
$$p_{R2} = \frac{v_{R2}^2}{R_2} = \frac{10^2}{2000} = 50\,\text{mW}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سلسلہ وار مزاحمت جوڑنے سے داخلی دباو کو مختلف قیمتوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔دو سے زیادہ مزاحمت سلسلہ وار جوڑتے ہوئے داخلی دباو کو زیادہ حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ تقسیم دباو کے مساوات کے تحت داخلی دباو سلسلہ وار جڑے مزاحمت پر مزاحمت کی قیمت کے نسبت سے تقسیم ہوتے ہیں۔مندرجہ بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ تقسیم دباو کی مساوات سے مزاحمت کا دباو حاصل کرتے ہوئے برقی رو کا حصول درکار نہیں ہوتا۔آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ زیادہ قیمت کی مزاحمت پر زیادہ دباو پیدا ہوتی ہے اور اس میں طاقت کا ضیاع بھی زیادہ ہوتا ہے۔

مشق 2.9: شکل 2.22 میں $v(t) = 10\,\text{V}$ ہے جبکہ مزاحمت $R_1 = 2\,\text{k}\Omega$ ہے۔ مزاحمت R_2 پر $6\,\text{V}$ درکار ہیں۔اس مزاحمت کی قیمت حاصل کریں اور اس میں طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔ منبع کی پیدا کردہ طاقت بھی دریافت کریں۔ اگر R_2 کی قیمت $2\,\text{k}\Omega$ ہوتی تب R_2 کا دباو اور طاقت کے علاوہ منبع کی پیدا کردہ طاقت کیا ہوتی۔

جواب: $R_2 = 3\,\text{k}\Omega$ ، $12\,\text{mW}$ ، $-20\,\text{mW}$ ، $5\,\text{V}$ ، $12.5\,\text{mW}$ ، $-25\,\text{mW}$

اس مشق سے ظاہر ہے کہ کل سلسلہ وار مزاحمت کی قیمت کم کرنے سے پیدا کردہ طاقت اور مزاحمت میں طاقت کا ضیاع بڑھتا ہے۔

2.5 متعدد سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت

شکل 2.23-الف میں متعدد مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔ تمام سلسلہ وار جڑے پرزوں میں یکساں رو $i(t)$ پائی جاتی ہے۔ کرخوف قانون دباو سے

$$v(t) = v_{R1} + v_{R2} + v_{R3} + \cdots + v_{Rn} \tag{2.31}$$

لکھتے ہیں جہاں قانون اوہم سے

$$\begin{aligned} v_{R1} &= i(t)R_1 \\ v_{R2} &= i(t)R_2 \\ &\vdots \\ v_{Rn} &= i(t)R_n \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$v(t) = i(t)R_1 + i(t)R_2 + \cdots + i(t)R_n$$

یا

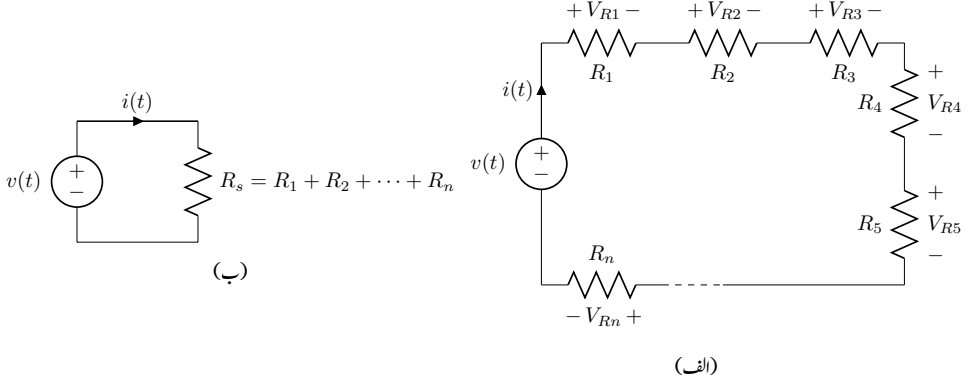
$$v(t) = i(t)\left[R_1 + R_2 + \cdots + R_n\right] \tag{2.32}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n \quad \text{متعدد سلسلہ وار جڑے مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت} \tag{2.33}$$

لکھتے ہوئے

$$v(t) = i(t)R_s \tag{2.34}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 2.32 اور مساوات 2.34 شکل 2.23-ب پر بھی پوری اترتے ہیں۔ یوں شکل 2.23-الف اور شکل 2.23-ب مساوی اشکال ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ متعدد سلسلہ وار جڑے مزاحمت کی جگہ ان کا مجموعی مزاحمت نسب کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 2.33 متعدد سلسلہ وار جڑے مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت R_s دیتی ہے۔

شکل 2.23: متعدد سلسلہ وار مزاحمت اور تقسیم دباو۔

مثال 2.11: شکل 2.23-الف میں چار عدد مزاحمت نسب ہیں جن کی قیمتیں $100\,\Omega$ ، $50\,\Omega$ ، $120\,\Omega$ اور $30\,\Omega$ ہیں۔ منبع دباو $9\,\mathrm{V}$ پیدا کرتا ہے۔ دور میں رو دریافت کریں۔ پچاس اوہم مزاحمت پر دباو بھی حاصل کریں۔

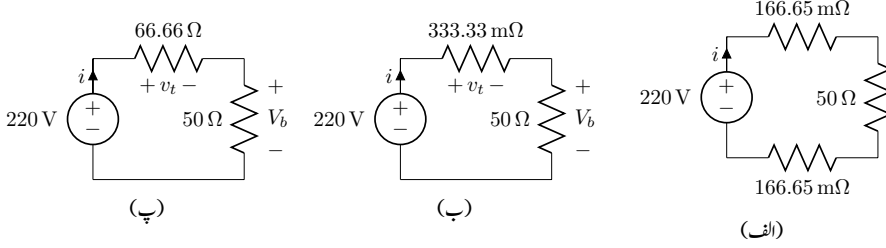
حل: مجموعی مزاحمت کی قیمت

$$R_S = 100 + 50 + 120 + 30 = 300\,\Omega$$

ہے۔ یوں قانون اوہم اور شکل-ب سے

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_S} = \frac{9}{300} = 30\,\mathrm{mA}$$

حاصل ہوتا ہے۔ پچاس اوہم مزاحمت پر دباو قانون اوہم سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_{50\,\Omega} = i(t)R = 30 \times 10^{-3} \times 50 = 1.5\,\mathrm{V}$$

شکل 2.24: برقی بوجھ کو بذریعہ تار طاقت فراہم کی جا رہی ہے۔

مثال 2.12: ایک ملی میٹر قطر کے المونیم تار کی مزاحمت $33.33\,\Omega$ فی کلومیٹر ہے۔ اس تار کو استعمال کرتے ہوئے $220\,\mathrm{V}$ منبع دباو سے $50\,\Omega$ کے مزاحمتی بوجھ کو طاقت فراہم کی جاتی ہے۔ منبع اور بوجھ کے درمیان $5\,\mathrm{m}$ کا فاصلہ ہونے کی صورت میں مزاحمت میں طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔ اگر یہ فاصلہ $1\,\mathrm{km}$ ہوتا تب جواب کیا ہوتا؟

حل: منبع کے مثبت اور منفی سروں کو بوجھ کے دو سروں کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ چونکہ ایک کلومیٹر تار کی مزاحمت $33.33\,\Omega$ ہے لہٰذا پانچ میٹر تار کی مزاحمت $166.65\,\mathrm{m\Omega}$ ہو گی۔ صورت حال شکل 2.24-الف میں دکھائی گئی ہے۔ بالائی اور نچلی تار سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا ان کے مزاحمت آپس میں جمع کئے جا سکتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے مسئلے کو شکل 2.24-ب کے طرز پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ادوار کے اشکال بناتے ہوئے عموماً ایسا ہی کرتے ہوئے تار کی مجموعی مزاحمت کو بالائی تار پر ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ نچلی تار کی مزاحمت صفر تصور کی جاتی ہے۔ دور میں رو

$$i=\frac{220}{50+0.16665}=4.3854\,\mathrm{A}$$

اور بوجھ میں طاقت کا ضیاع

$$p=i^2R=4.3854^2\times 50=962\,\mathrm{W}$$

ہے۔ یہاں غور کریں کہ تار کی مزاحمت بوجھ کی مزاحمت سے بہت کم ہے۔ ایسی صورت میں تار کی مزاحمت کو رد کیا جا سکتا ہے اور تار کو کامل موصل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے تار کی مزاحمت کو $0\,\Omega$ تصور کرتے ہوئے جوابات

$$\begin{aligned}i&=\frac{220}{50+0}=4.4\,\mathrm{A}\\p&=4.4^2\times 50=968\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان دو جوابات میں صرف

$$\left|\frac{962-968}{962}\right| \times 100 = 0.62\,\%$$

فرق پایا جاتا ہے جسے رد کیا جا سکتا ہے۔اس کے برعکس منبع اور تار کے درمیان ایک کلومیٹر فاصلے کی صورت میں صورت حال شکل-پ ظاہر کرتی ہے جہاں سے

$$i = \frac{220}{50+66.66} = 1.8858\,\text{A}$$
$$p = 1.8858^2 \times 50 = 179\,\text{W}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یہاں تار کی مزاحمت کو رد نہیں کیا جا سکتا اور اس کے اثرات کو مد نظر رکھنا ضروری ہے۔

2.6 سلسلہ وار متعدد منابع دباو اور مزاحمت

شکل 2.25-الف میں متعدد منبع دباو اور متعدد مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔سلسلہ وار دور میں یکساں رو $i(t)$ پائی جائے گی۔دور میں گھڑی کی سمت گھومتے اور گھٹتے دباو کو مثبت لکھتے ہوئے

$$v_1(t) - v_2(t) + v_{R1} + v_{R2} - v_3(t) + v_{R3} + v_{R4} + \cdots + v_k(t) + v_{Rn} = 0 \tag{2.35}$$

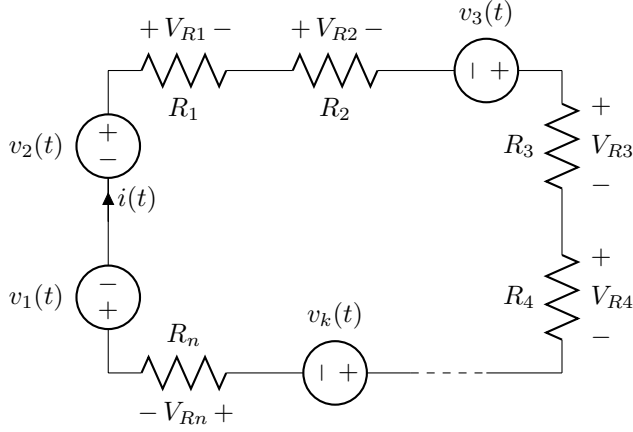
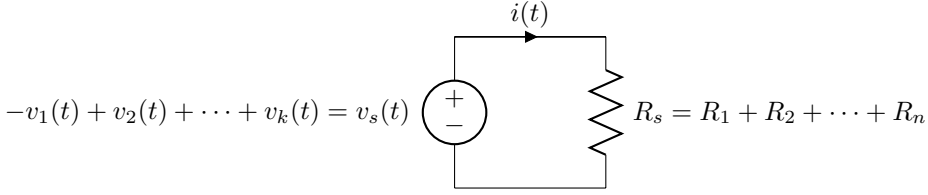
لکھا جا سکتا ہے۔منبع دباو کو ایک جانب اور مزاحمتی دباو کو دوسری جانب لکھتے ہوئے اسے درج ذیل صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$-v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \cdots - v_k(t) = v_{R1} + v_{R2} + v_{R3} + \cdots + v_{Rn} \tag{2.36}$$

قانون اوہم کی مدد سے $v_{R1} = i(t)R_1$ وغیرہ لکھتے ہوئے

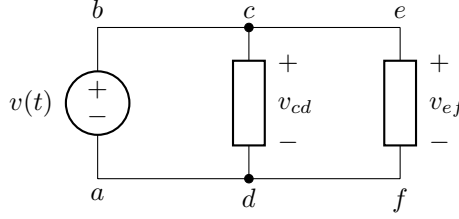
$$\begin{aligned} -v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \cdots - v_k(t) &= i(t)R_1 + i(t)R_2 + i(t)R_3 + \cdots + i(t)R_n \\ &= i(t)\left[R_1 + R_2 + \cdots + R_n\right] \end{aligned} \tag{2.37}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات میں

$$-v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \cdots - v_k(t) = v_s(t) \tag{2.38}$$
$$R_1 + R_2 + \cdots + R_n = R_s \tag{2.39}$$

شکل 2.25: متعدد منبع اور متعدد مزاحمت سلسلہ وار جڑے ہیں۔

لکھنے سے

$$v_s(t)=i(t)R_s \tag{2.40}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات سے حاصل دور کو شکل 2.25-ب میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تمام سلسلہ وار جڑے مزاحمت کی جگہ ان کا مجموعہ نسب کیا جا سکتا ہے اور اسی طرح تمام سلسلہ وار جڑے منبع کی جگہ ان کا مجموعہ نسب کیا جا سکتا ہے۔جیسا شکل 2.25-ب میں دکھایا گیا ہے، منبع کا مجموعہ حاصل کرتے وقت بڑھتے دباو کو مثبت اور گھٹتے دباو کو منفی لیا جاتا ہے۔یوں مساوات 2.40 میں مساوی نشان $(=)$ کے بائیں جانب بڑھتے دباو کا مجموعہ اور نشان کے دائیں جانب گھٹتے دباو کا مجموعہ ہے۔اس مساوات سے دور کی رو $i(t)$ حاصل کی جا سکتی ہے۔

شکل 2.26: متوازی جڑے پرزوں پر یکساں دباو پایا جاتا ہے

2.7 متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباو پایا جاتا ہے

شکل 2.26-الف میں منبع دباو کے متوازی دو عدد برقی پرزے جڑے دکھائے گئے ہیں۔بند دائرہ $abcda$ پر کرخوف قانون دباو سے

$$v(t) = v_{cd} \tag{2.41}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ بند دائرہ $abefa$ پر کرخوف قانون دباو سے

$$v(t) = v_{ef} \tag{2.42}$$

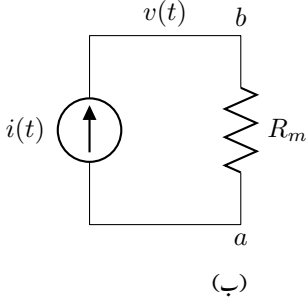
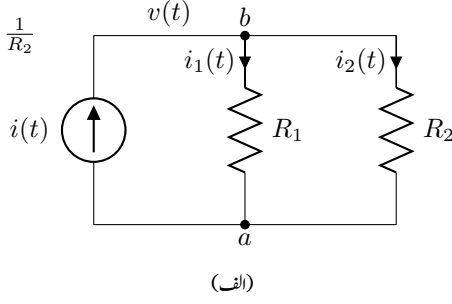
حاصل ہوتا ہے۔یوں دونوں برقی پرزوں پر $v(t)$ دباو پایا جاتا ہے۔ اس مثال میں مزید پرزے متوازی جوڑتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تمام متوازی جڑے پرزوں پر یکساں دباو پایا جاتا ہے۔

2.8 تقسیم رو اور متعدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت

شکل 2.27-الف میں منبع رو $i(t)$ کے متوازی دو عدد مزاحمت جڑے ہیں۔رو $i(t)$ متوازی جڑے مزاحمت سے گزرتی ہے جس سے اوہم کے قانون کے تحت مزاحمت پر دباو $v(t)$ پیدا ہو گا۔مزاحمت R_1 میں رو $i_1(t)$ اور مزاحمت R_2 میں رو $i_2(t)$ پائی جائے گی۔جوڑ b پر کرخوف قانون رو لکھتے ہیں۔

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) \tag{2.43}$$

مزاحمتوں کے لئے قانون اوہم سے

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{v(t)}{R_1} \\ i_2(t) &= \frac{v(t)}{R_2} \end{aligned} \tag{2.44}$$

شکل 2.27: متوازی جڑے مزاحمت کا مساوی مزاحمت۔

لکھا جا سکتا ہے۔ درج بالا تین مساوات کے ملاپ سے

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} \\
&= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v(t)
\end{aligned} \tag{2.45}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس مساوات میں قوسین میں بند قیمت کو

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \tag{2.46}$$

لکھتے ہوئے

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_m} \tag{2.47}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 2.27-ب سے یہی مساوات لکھی جا سکتی ہے۔ متوازی جڑے مزاحمتوں کی مساوی مزاحمت مساوات 2.46 سے حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 2.44 کی پہلی مساوات کو مساوات 2.45 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{i_1(t)}{i(t)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

یا

$$i_1(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i(t) \tag{2.48}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح مساوات 2.44 کے دوسری مساوات کو مساوات 2.44 سے تقسیم کرتے ہوئے

$$i_2(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i(t) \tag{2.49}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 2.48 اور مساوات 2.49 تقسیم رو کے مساوات ہیں۔

مساوات 2.46 سے دو عدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت

$$R_m = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{2.50}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مزاحمت R_1 اور R_2 کا آپس میں متوازی ہونے کو $R_1 \parallel R_2$ لکھا جاتا ہے جہاں مزاحمتوں کے درمیان دو عدد متوازی عمودی لکیریں متوازی ہونے کو ظاہر کرتی ہیں۔ یوں درج بالا مساوات کو درج ذیل صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

مثال 2.13: شکل 2.27 میں $R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ ، $R_2 = 6\,\mathrm{k\Omega}$ اور $i(t) = 8\,\mathrm{mA}$ ہیں۔مزاحمت R_1 اور مزاحمت R_2 میں رو دریافت کریں۔کل متوازی مزاحمت دریافت کریں۔مزاحمت R_1 اور R_2 میں طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔منبع کی طاقت بھی حاصل کریں۔

حل:مساوات 2.48 سے

$$i_1(t) = \left(\frac{6000}{2000 + 6000}\right) \times 8 \times 10^{-3} = 6\,\mathrm{mA}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ مساوات 2.49 سے

$$i_2(t) = \left(\frac{2000}{2000 + 6000}\right) \times 8 \times 10^{-3} = 2\,\mathrm{mA}$$

حاصل ہوتا ہے۔یہی جواب بالائی جوڑ پر کرخوف قانون رو

$$8\,\mathrm{mA} = 6\,\mathrm{mA} + i_2(t)$$

یعنی

$$i_2(2) = 8\,\mathrm{mA} - 6\,\mathrm{mA} = 2\,\mathrm{mA}$$

سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔کل متوازی مزاحمت

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{2000} + \frac{1}{6000} = \frac{1}{1500}$$

سے

$$R_m = 2\,\mathrm{k\Omega} \parallel 6\,\mathrm{k\Omega} = 1.5\,\mathrm{k\Omega}$$

حاصل ہوتا ہے۔مزاحمت R_1 میں طاقت کا ضیاع

$$p_{R1} = i_1(t)^2 R_1 = (6 \times 10^{-3})^2 \times 2000 = 72\,\mathrm{mW}$$

ہے۔اسی طرح مزاحمت R_2 کی طاقت

$$p_{R2} = i_2(t)^2 R_2 = (2 \times 10^{-3})^2 \times 6000 = 24\,\mathrm{mW}$$

ہے۔منبع کی طاقت حاصل کرنے کے لئے منبع کا دباو جاننا ضروری ہے۔مساوات 2.47 سے منبع کا دباو

$$v(t) = i(t) R_m = 8 \times 10^{-3} \times 1500 = 12\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں منبع کی طاقت درج ذیل ہو گی جو دونوں مزاحمت کے مجموعی طاقت کے عین برابر ہے۔

$$p_{\text{منبع}} = v(t) i(t) = 12 \times 8 \times 10^{-3} = 96\,\mathrm{mW}$$

اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ متوازی جڑے مزاحمتوں میں کم قیمت کے مزاحمت میں زیادہ رو پائی جاتی ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ سلسلہ وار جڑے مزاحمتوں میں تقسیم دباو کے تحت زیادہ قیمت کے مزاحمت پر زیادہ دباو پایا جاتا ہے۔

دو سے زیادہ تعداد میں متوازی جڑے مزاحمتوں کو بالکل اسی طرح حل کیا جا سکتا ہے۔یوں شکل 2.28-الف سے

$$\begin{aligned}
i(t) &= i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \cdots + i_n(t) \\
i_1(t) &= \frac{v(t)}{R_1} \\
i_2(t) &= \frac{v(t)}{R_2} \\
i_3(t) &= \frac{v(t)}{R_3} \\
&\vdots \\
i_N(t) &= \frac{v(t)}{R_N}
\end{aligned}$$

یا

$$i(t) = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}\right) v(t) \tag{2.51}$$

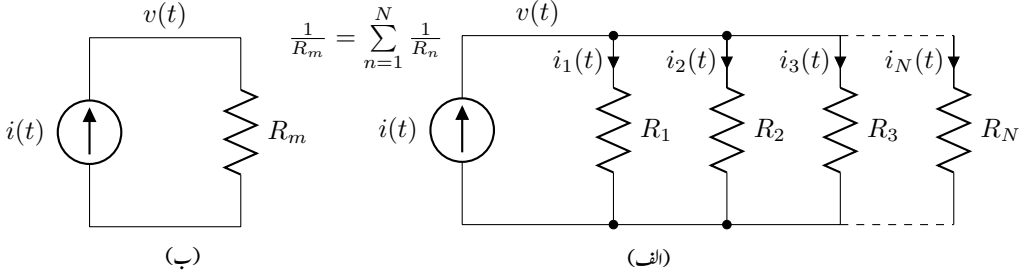
حاصل ہوتا ہے جس میں

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_m} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N} \qquad \text{متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{R_n}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

پر کرنے سے

$$i(t) = \frac{v(t)}{R_m} \tag{2.53}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل 2.28-ب سے بھی یہی مساوات حاصل ہوتی ہے لہٰذا شکل-الف اور شکل-ب مساوی ادوار ہیں۔مساوات 2.52 متعدد متوازی جڑے مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت R_m دیتی ہے۔

مثال 2.14: شکل 2.28-الف میں تین عدد مزاحمت استعمال ہوتے ہیں۔ان کی قیمتیں $2\,\mathrm{k\Omega}$ ، $4\,\mathrm{k\Omega}$ اور $5\,\mathrm{k\Omega}$ ہیں۔منبع رو $15\,\mathrm{mA}$ ہے۔مساوی متوازی مزاحمت R_m حاصل کریں۔دباو $v(t)$ حاصل کرتے ہوئے تمام مزاحمتوں میں رو حاصل کریں۔منبع کی طاقت اور مزاحمتوں میں طاقت کا ضیاع بھی دریافت کریں۔

شکل 2.28: متعدد متوازی جڑے مزاحمت کا مساوی مزاحمت۔

جوابات: مساوی مزاحمت پہلے حاصل کرتے ہیں۔ مساوات 2.52 سے

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{2000} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{5000} = \frac{19}{20000}$$

یعنی

$$R_m = 2\,\text{k}\Omega \parallel 4\,\text{k}\Omega \parallel 5\,\text{k}\Omega = \frac{20}{19}\,\text{k}\Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 2.28-ب سے

$$v(t) = 15 \times 10^{-3} \times \frac{20000}{19} \approx 15.7895\,\text{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں شکل-الف سے رو درج ذیل حاصل ہوتے ہیں جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$ عین منبع کی رو کے برابر ہے۔

$$i_1(t) = \frac{15.7895}{2000} = 7.89\,\text{mA}$$
$$i_2(t) = \frac{15.7895}{4000} = 3.95\,\text{mA}$$
$$i_3(t) = \frac{15.7895}{5000} = 3.16\,\text{mA}$$

منبع کی طاقت

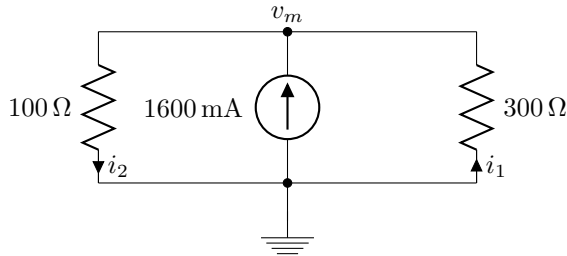
$$p_{\text{منبع}} = 15.7895 \times (-15 \times 10^{-3}) = -236.8\,\text{mW}$$

جبکہ مزاحمتوں کی طاقت

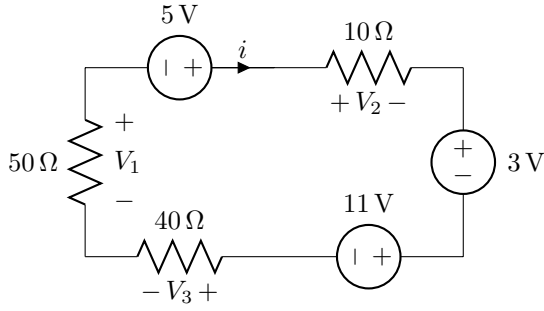
$$
\begin{aligned}
p_{2\,\mathrm{k\Omega}} &= 15.7895 \times 7.89 \times 10^{-3} = 124.58\,\mathrm{mW}\\
p_{4\,\mathrm{k\Omega}} &= 15.7895 \times 3.95 \times 10^{-3} = 62.37\,\mathrm{mW}\\
p_{5\,\mathrm{k\Omega}} &= 15.7895 \times 3.16 \times 10^{-3} = 49.89\,\mathrm{mW}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ پیدا کردہ طاقت اور طاقت کا ضیاع برابر ہیں۔متوازی جڑے مزاحمتوں میں زیادہ قیمت کے مزاحمت میں کم برقی رو پائی جاتی ہے اور اس میں طاقت کا ضیاع بھی کم ہوتا ہے۔

مشق 2.10: شکل 2.29 میں i_1 ، i_2 ، R_m اور v_m دریافت کریں۔

جوابات: $i_1 = -400\,\mathrm{mA}$ ، $i_2 = 1200\,\mathrm{mA}$ ، $R_m = 75\,\Omega$ ، $v_m = 120\,\mathrm{V}$

شکل 2.29: تقسیم رو کی مشق۔

مشق 2.11: شکل 2.30 میں R_s، i، v_1، v_2، اور v_3 دریافت کریں۔ تین وولٹ اور پانچ وولٹ منبع کی طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $R_s = 100\,\Omega$، $i = -90\,\mathrm{mA}$، $v_1 = 4.5\,\mathrm{V}$، $v_2 = -0.9\,\mathrm{V}$، $v_3 = -3.6\,\mathrm{V}$، $p_{3\,\mathrm{V}} = -0.27\,\mathrm{W}$، $p_{5\,\mathrm{V}} = 0.45\,\mathrm{W}$

شکل 2.30: تقسیم دباو کی مشق۔

متعدد متوازی منابع رو اور مزاحمت

متوازی متعدد منابع رو اور مزاحمتوں کا دور شکل 2.31-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں متوازی پرزوں پر یکساں دباو $v(t)$ پایا جاتا ہے۔یوں مزاحمت R_1 میں رو $\frac{v(t)}{R_1}$ ہو گی اور اسی طرح باقی مزاحمتوں کی رو بھی لکھی جا سکتی ہے۔بالائی جوڑ پر کرخوف قانون رو کے تحت ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
i_1(t) - i_2(t) + \cdots - i_k(t) &= \frac{v(t)}{R_1} + \frac{v(t)}{R_2} + \frac{v(t)}{R_3} + \cdots + \frac{v(t)}{R_n} \\
&= v(t)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}\right)
\end{aligned}$$

شکل 2.31-ب کی مساوات بھی درج بالا حاصل ہوتی ہے لہٰذا شکل-الف اور ب مساوی ادوار ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی دور میں متوازی منابع رو کا مساوی رو اور متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثال 2.15: شکل 2.32-الف میں $i_1(t)$ دریافت کریں۔

حل: متوازی منابع کی مساوی منبع $i(t) = 10\,\mathrm{mA} - 8\,\mathrm{mA} = 2\,\mathrm{mA}$ ہے جبکہ تمام متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت $\frac{4}{7}\,\mathrm{k\Omega}$ ہے۔شکل 2.32-ب میں مساوی دور دکھایا گیا ہے جہاں سے $v_0 = -\frac{8}{7}\,\mathrm{V}$ ملتا ہے۔یوں شکل-الف میں $i_1(t) = \frac{v_0}{2\,\mathrm{k\Omega}} = -\frac{4}{7}\,\mathrm{mA}$ ہو گی۔

2.9 سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت

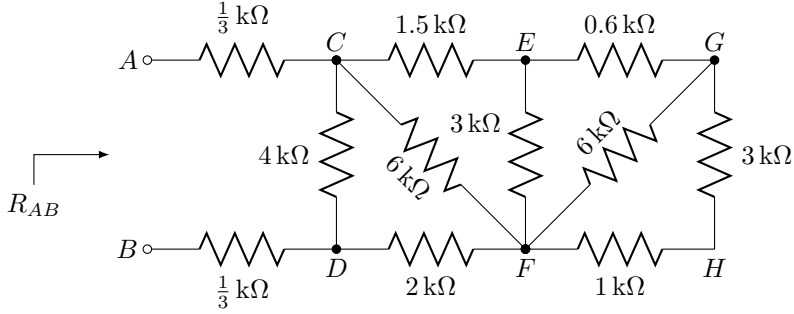
ہم جانتے ہیں کہ سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N \tag{2.54}$$

ہوتا ہے جبکہ متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N} \tag{2.55}$$

شکل 2.31: متوازی جڑے منابع رو کا مساوی منبع رو لیا جا سکتا ہے جبکہ مساوی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت لیا جا سکتا ہے۔

شکل 2.32: شکل برائے مثال 2.15

شکل 2.33: سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت۔

ہے۔آئیں ان کلیات کو استعمال کرتے ہوئے مختلف انداز میں جڑے مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر شکل 2.33 میں کو مثال بناتے ہوئے A اور B کے مابین مزاحمت R_{AB} حاصل کرتے ہیں۔

اگر آپ FGH کو دیکھیں تو یہاں $3\,\mathrm{k\Omega}$ اور $1\,\mathrm{k\Omega}$ سلسلہ وار جڑے ہیں۔دو مزاحمت تب سلسلہ وار جڑے ہوتے ہیں جب دوسری مزاحمت میں وہی رو گزرے جو پہلی میں گزرتی ہو۔ایسے مزاحمتوں کا ایک سرا آپس میں جڑا ہوتا ہے جبکہ ان کا دوسرا سرا آپس میں نہیں جڑا ہوتا۔یوں $1\,\mathrm{k\Omega}$ کا دایاں سرا اور $3\,\mathrm{k\Omega}$ کا نچلا سرا H پر آپس میں جڑے ہیں جبکہ $1\,\mathrm{k\Omega}$ کا بایاں سرا اور $3\,\mathrm{k\Omega}$ کا بالائی سرا آپس میں نہیں جڑے ہیں۔یوں ان مزاحمتوں کا مجموعی مزاحمت مساوات 2.54 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$R_{FGH} = 3000 + 1000 = 4\,\mathrm{k\Omega}$$

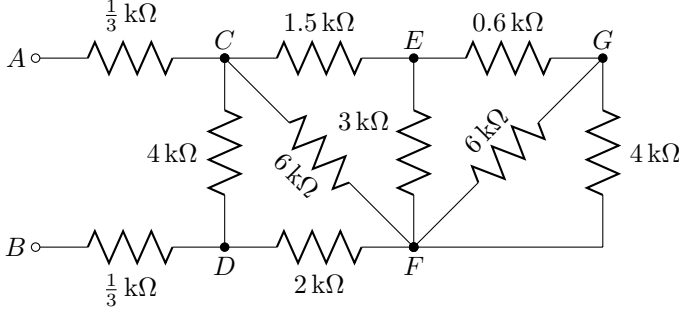
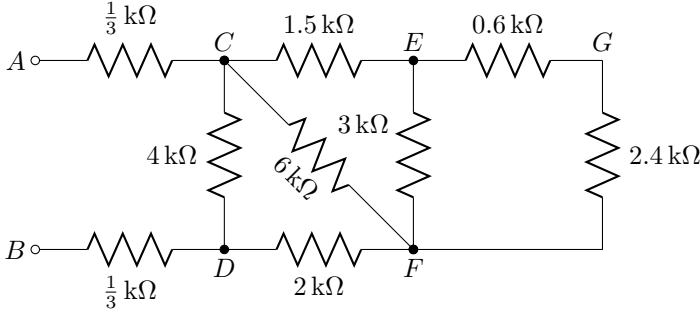
ان سلسلہ وار جڑے مزاحمتوں کی جگہ ان کا مساوی مزاحمت R_{FGH} نسب کرتے ہوئے شکل 2.34 حاصل ہوتا ہے۔اس شکل میں F اور G نقطوں کے مابین $6\,\mathrm{k\Omega}$ اور $4\,\mathrm{k\Omega}$ متوازی جڑے ہیں۔متوازی جڑے مزاحمتوں پر یکساں دباو پایا جاتا ہے۔یوں ان متوازی جڑے مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت مساوات 2.55 سے حاصل ہو گا یعنی

$$\frac{1}{R_{FG}} = \frac{1}{6000} + \frac{1}{4000} = \frac{1}{2400}$$

یا

$$R_{FG} = 6\,\mathrm{k\Omega} \parallel 4\,\mathrm{k\Omega} = 2.4\,\mathrm{k\Omega}$$

نقطہ F اور نقطہ G کے درمیان مساوی مزاحمت نسب کرنے سے شکل 2.35 حاصل ہوتا ہے۔اب آپ دیکھ سکتے ہیں کہ EGF پر $0.6\,\mathrm{k\Omega}$ اور $2.4\,\mathrm{k\Omega}$ سلسلہ وار جڑے ہیں جن کا مساوی مزاحمت

$$R_{EGF} = 600 + 2400 = 3\,\mathrm{k\Omega}$$

شکل 2.34

شکل 2.35

ہو گا۔

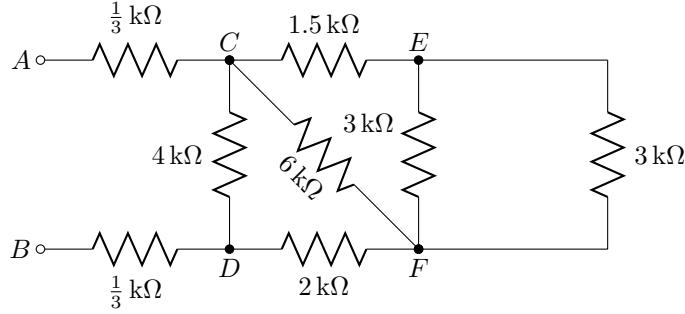
R_{EGF} کے استعمال سے شکل 2.36 حاصل ہوتا ہے جس میں E اور F کے درمیان دو عدد $3\,\mathrm{k\Omega}$ مزاحمت متوازی جڑے ہیں جن کا مساوی مزاحمت

$$\frac{1}{R_{EF}} = \frac{1}{3000} + \frac{1}{3000} = \frac{1}{1500}$$

یعنی

$$R_{EF} = 3\,\mathrm{k\Omega} \parallel 3\,\mathrm{k\Omega} = 1.5\,\mathrm{k\Omega}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں شکل 2.37-الف حاصل ہوتا ہے۔ اسی طریقے سے آگے بڑھتے ہوئے آخر کار شکل 2.37-ٹ حاصل ہوتا ہے جس سے R_{AB} درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$R_{AB} = 2\frac{2}{3}\,\mathrm{k\Omega}$$

شکل 2.36

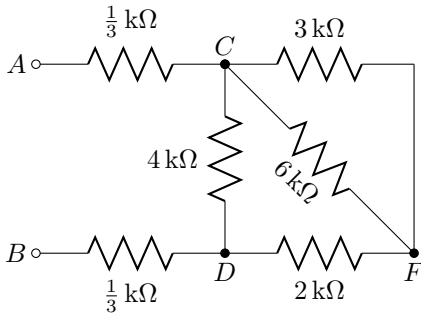
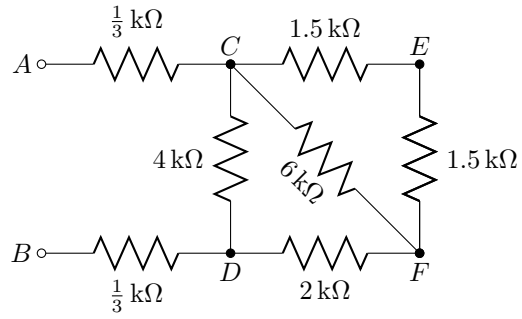
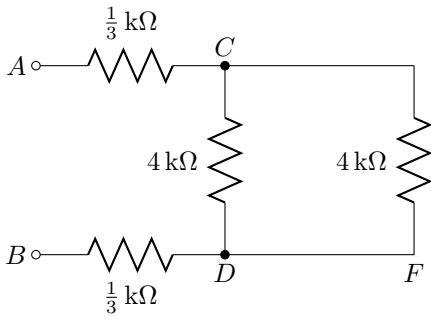
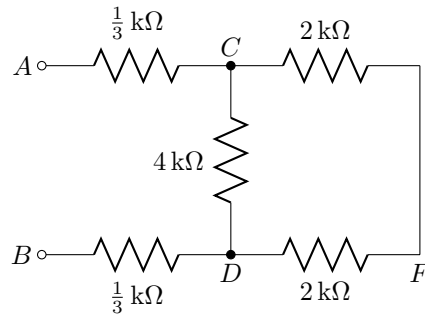
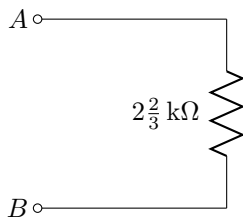
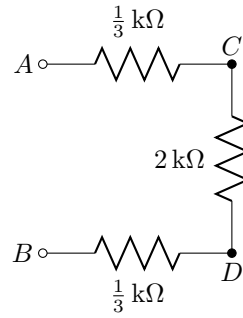
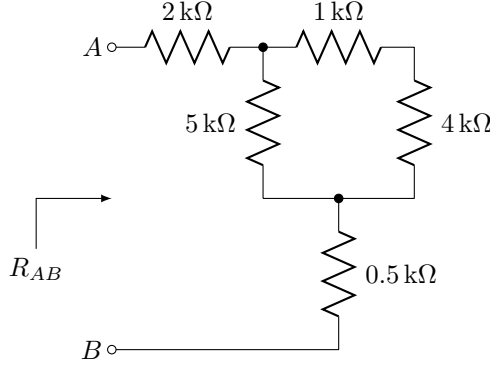
یوں شکل 2.33 کو حل کرتے کرتے آخر کار شکل 2.37-ث حاصل کیا گیا جو مساوی مزاحمت دیتا ہے۔

مشق 2.12: شکل 2.38 میں R_{AB} دریافت کریں۔

جواب: $R_{AB} = 5\,\mathrm{k\Omega}$

متعدد سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت حاصل کرتے وقت درج ذیل طریقہ کار اختیار کیا جاتا ہے۔

- داخلی برقی سروں سے دور ترین مزاحمت سے شروع کریں۔
- دو عدد سلسلہ وار مزاحمت کی جگہ ان کا مساوی مزاحمت $R_s = R_1 + R_2$ نسب کریں۔ جس جوڑ پر سلسلہ وار مزاحمت آپس میں جڑے ہوں اس جوڑ پر کوئی تیسرا پرزہ نہیں جڑا ہو سکتا۔ یوں پہلے مزاحمت سے گزرتی رو دوسری مزاحمت سے بھی گزرتی ہے۔ اگر جوڑ پر تیسرا پرزہ بھی نسب ہو تب مزاحمتوں کو سلسلہ وار جڑا تصور نہیں کیا جا سکتا۔
- دو عدد متوازی جڑے مزاحمتوں کی جگہ ان کا مساوی مزاحمت $R_m = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ نسب کریں۔ جن دو جوڑ کے ساتھ پہلا مزاحمت جڑا ہوتا ہے اگر انہیں جوڑ کے ساتھ دوسرا مزاحمت بھی جڑا ہو تب ان مزاحمتوں کو متوازی جڑا تصور کیا جاتا ہے۔ متوازی مزاحمتوں پر برابر دباو پایا جاتا ہے۔
- متواتر سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کی جگہ ان کا مساوی مزاحمت نسب کرتے ہوئے دور کے داخلی سروں تک پہنچ کر پورے دور کا مساوی مزاحمت حاصل کریں۔

$\frac{1}{3}\,\mathrm{k\Omega}$
A
C
$3\,\mathrm{k\Omega}$
$4\,\mathrm{k\Omega}$
$6\,\mathrm{k\Omega}$
B
D
$2\,\mathrm{k\Omega}$
F
(ب)
$1.5\,\mathrm{k\Omega}$
E
$1.5\,\mathrm{k\Omega}$
(الف)
(ت)
$2\,\mathrm{k\Omega}$
(پ)
$2\frac{2}{3}\,\mathrm{k\Omega}$
(ث)
(ٹ)

شکل 2.37

شکل 2.38: متعدد سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت کا دور۔

2.10 تخصیص مزاحمت

جدول 2.1 مزاحمت کی وہ مخصوص قیمتیں دیتا ہے جو عام دستیاب ہیں۔مزاحمت کی قیمت کے علاوہ اس کی **طاقت سکت**[29] اور قیمت میں **خلل**[30] بھی جاننا ضروری ہے۔اس جدول میں دئے تمام مزاحمتوں کی قیمتوں میں 5 % مزاحمتی خلل ممکن ہے۔یوں انہیں 5 % مزاحمت کہتے ہیں۔مزاحمت کی طاقتی سکت عموماً 0.25 W ، 0.5 W ، 1 W ، 2 W وغیرہ ہوتی ہے۔اس کے علاوہ زیادہ طاقت کے مخصوص مزاحمت بھی دستیاب ہیں۔

مزاحمت میں طاقت کا ضیاع حرارتی توانائی میں تبدیل ہوتا ہے جس سے مزاحمت کی درجہ حرارت بڑھتی ہے۔دو اجسام کے مابین **ایصال حرارت**[31] یا **اتصال حرارت**[32] کا دارومدار ان کے درجہ حرارت میں فرق پر منحصر ہے۔دو اجسام کے درجہ حرارت میں فرق بڑھانے سے ان کے مابین ایصال حرارت یا اتصال حرارت بڑھتی ہے۔ مزاحمت میں طاقت کے ضیاع سے مزاحمت کا درجہ حرارت ارد گرد کے ماحول سے بڑھ جاتا ہے۔ایصال حرارت اور اتصال حرارت سے مزاحمت کی حرارتی توانائی ارد گرد کے ماحول کو منتقل ہوتی ہے۔ جس درجہ حرارت پر مزاحمت کی طاقتی ضیاع اور مزاحمت سے انتقال حرارت برابر ہوں، مزاحمت کا درجہ حرارت اسی مطلق قیمت پر جا رکھتا ہے۔ ہر شے کسی مخصوص درجہ حرارت پر تباہ ہوتا ہے۔یہی مزاحمت کے لئے بھی درست ہے لہٰذا یہ ضروری ہے کہ اس کا درجہ حرارت اتنا نہ بڑھ جائے کہ مزاحمت جل کر راکھ ہو جائے۔طاقتی سکت سے مراد وہ طاقت ہے جس پر مزاحمت محفوظ رہ سکتا ہے۔اگر طاقتی ضیاع مزاحمت کے طاقتی سکت سے بڑھ جائے تو مزاحمت جل کر تباہ ہو جاتا ہے۔

---

[29] power rating
[30] tolerance
[31] heat conduction
[32] heat convection

جدول 2.1: مزاحمت کے معیاری قیمتیں۔ قیمتوں میں %5 خلل ممکن ہے۔

1.0 MΩ	100 kΩ	10 kΩ	1.0 kΩ	100 Ω	10 Ω	1.0 Ω
1.1 MΩ	110 kΩ	11 kΩ	1.1 kΩ	110 Ω	11 Ω	1.1 Ω
1.2 MΩ	120 kΩ	12 kΩ	1.2 kΩ	120 Ω	12 Ω	1.2 Ω
1.3 MΩ	130 kΩ	13 kΩ	1.3 kΩ	130 Ω	13 Ω	1.3 Ω
1.5 MΩ	150 kΩ	15 kΩ	1.5 kΩ	150 Ω	15 Ω	1.5 Ω
1.6 MΩ	160 kΩ	16 kΩ	1.6 kΩ	160 Ω	16 Ω	1.6 Ω
1.8 MΩ	180 kΩ	18 kΩ	1.8 kΩ	180 Ω	18 Ω	1.8 Ω
2.0 MΩ	200 kΩ	20 kΩ	2.0 kΩ	200 Ω	20 Ω	2.0 Ω
2.2 MΩ	220 kΩ	22 kΩ	2.2 kΩ	220 Ω	22 Ω	2.2 Ω
2.4 MΩ	240 kΩ	24 kΩ	2.4 kΩ	240 Ω	24 Ω	2.4 Ω
2.7 MΩ	270 kΩ	27 kΩ	2.7 kΩ	270 Ω	27 Ω	2.7 Ω
3.0 MΩ	300 kΩ	30 kΩ	3.0 kΩ	300 Ω	30 Ω	3.0 Ω
3.3 MΩ	330 kΩ	33 kΩ	3.3 kΩ	330 Ω	33 Ω	3.3 Ω
3.6 MΩ	360 kΩ	36 kΩ	3.6 kΩ	360 Ω	36 Ω	3.6 Ω
3.9 MΩ	390 kΩ	39 kΩ	3.9 kΩ	390 Ω	39 Ω	3.9 Ω
4.3 MΩ	430 kΩ	43 kΩ	4.3 kΩ	430 Ω	43 Ω	4.3 Ω
4.7 MΩ	470 kΩ	47 kΩ	4.7 kΩ	470 Ω	47 Ω	4.7 Ω
5.1 MΩ	510 kΩ	51 kΩ	5.1 kΩ	510 Ω	51 Ω	5.1 Ω
5.6 MΩ	560 kΩ	56 kΩ	5.6 kΩ	560 Ω	56 Ω	5.6 Ω
6.2 MΩ	620 kΩ	62 kΩ	6.2 kΩ	620 Ω	62 Ω	6.2 Ω
6.8 MΩ	680 kΩ	68 kΩ	6.8 kΩ	680 Ω	68 Ω	6.8 Ω
7.5 MΩ	750 kΩ	75 kΩ	7.5 kΩ	750 Ω	75 Ω	7.5 Ω
8.2 MΩ	820 kΩ	82 kΩ	8.2 kΩ	820 Ω	82 Ω	8.2 Ω
9.1 MΩ	910 kΩ	91 kΩ	9.1 kΩ	910 Ω	91 Ω	9.1 Ω

مثال 2.16: شکل 2.39 میں 5 % مزاحمت استعمال کیا گیا ہے۔دور میں کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ رو دریافت کریں۔دونوں صورتوں میں مزاحمتی ضیاع بھی حاصل کریں۔

حل:مزاحمت کی قیمت $9.1\,\mathrm{k\Omega}$ ہے۔اس قیمت کو علامتی قیمت[33] کہتے ہیں۔مزاحمت کی حقیقی قیمت اس سے 5 % کم یا زیادہ ممکن ہے۔یوں اس مزاحمت کی کم سے کم قیمت

$$R_{\text{کمتر}} = (1 - 0.05) \times 9100 = 8.645\,\mathrm{k\Omega}$$

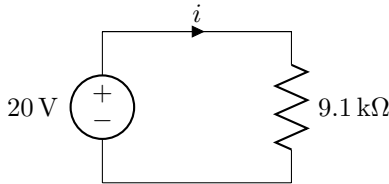
اور زیادہ سے زیادہ قیمت

$$R_{\text{بلند تر}} = (1 + 0.05) \times 9100 = 9.555\,\mathrm{k\Omega}$$

ہو سکتی ہے۔مزاحمت کی اصل قیمت ان حدود کے درمیان رہے گی۔یوں کمتر اور بلند تر رو درج ذیل ہوں گے۔

$$i_{\text{کمتر}} = \frac{20}{9555} = 2.093\,\mathrm{mA}$$
$$i_{\text{بلند تر}} = \frac{20}{8645} = 2.313\,\mathrm{mA}$$

مزاحمت میں کمتر اور بلند تر طاقت کا ضیاع درج ذیل ہو گا۔

$$p_{\text{کمتر}} = 20 \times 2.093 \times 10^{-3} = 41.86\,\mathrm{mW}$$
$$p_{\text{بلند تر}} = 20 \times 2.313 \times 10^{-3} = 46.26\,\mathrm{mW}$$

شکل 2.39:مزاحمت کی قیمت میں خلل اور طاقت کے ضیاع کی مثال۔

---

[33] typical value

مزاحمت میں طاقت کا ضیاع $42\,\mathrm{mW}$ تا $46\,\mathrm{mW}$ ممکن ہے۔یوں $0.25\,\mathrm{W}$ کی مزاحمت یہاں استعمال کی جا سکتی ہے جو $250\,\mathrm{mW}$ کی طاقتی ضیاع کو برداشت کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں اگر مزاحمت کی قیمت $100\,\Omega$ ہوتی تب رو کی علامتی قیمت $\frac{20}{100} = 0.2\,\mathrm{A}$ ہوتی اور مزاحمت ضیاع $4\,\mathrm{W}$ ہوتا۔مزاحمت کی سکت $0.25\,\mathrm{W}$ ہونے کی صورت میں مزاحمت تاب نہ لاتے ہوئے جل کر راکھ ہو جائے گا۔یوں ایسی صورت میں $4\,\mathrm{W}$ سے زیادہ طاقتی سکت[34] کا مزاحمت استعمال کرنا ضروری ہے۔

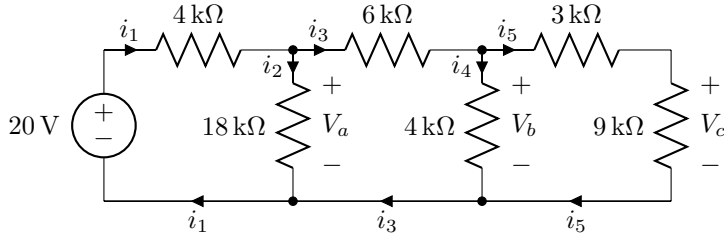
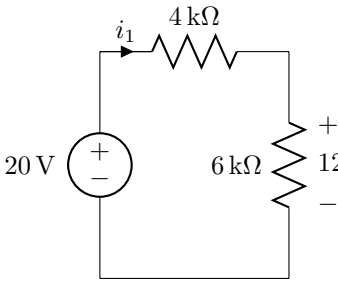
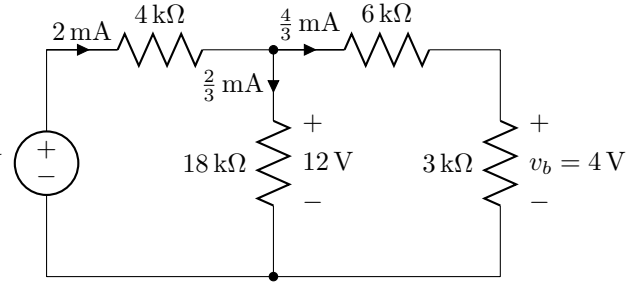
2.11 سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل

قانون اوہم اور کرخوف کے قوانین کو بطور تجزیاتی آلات استعمال کرتے ہوئے برقی ادوار حل کئے جاتے ہیں۔اب تک ہم سادہ ترین ادوار حل کرتے رہے ہیں۔اس حصے میں سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں پر مبنی بڑے ادوار حل کرنا دیکھتے ہیں۔

مثال 2.17: شکل 2.40-الف کے دور میں تمام نا معلوم دباو اور رو دریافت کریں۔

حل:ہم منبع سے دور ترین مزاحمت سے شروع کرتے ہوئے سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کی جگہ ان کا مساوی مزاحمت پر کرتے ہوئے آخر کار شکل 2.40-پ تک پہنچتے ہیں جہاں سے i_1 اور v_a کیا جا سکتا ہے۔ان قیمتوں کو کرخوف کے قوانین اور قانون اوہم کے ساتھ استعمال کرتے ہوئے مزید نا معلوم متغیرات حاصل کئے جائیں گے۔آئیں یہ عمل قدم با قدم دیکھیں۔

شکل-الف میں منبع سے دور ترین $9\,\mathrm{k\Omega}$ اور $3\,\mathrm{k\Omega}$ سلسلہ وار جڑے ہیں۔ان کا مساوی مزاحمت $9\,\mathrm{k\Omega} + 3\,\mathrm{k\Omega} = 12\,\mathrm{k\Omega}$ ہے جو $4\,\mathrm{k\Omega}$ کے متوازی ہے۔یوں ان کا مساوی مزاحمت $\frac{4\,\mathrm{k\Omega}\times 12\,\mathrm{k\Omega}}{4\,\mathrm{k\Omega}+12\,\mathrm{k\Omega}} = 3\,\mathrm{k\Omega}$ ہو گا جسے شکل-ب میں استعمال کیا گیا ہے۔شکل-ب میں $6\,\mathrm{k\Omega}$ اور $3\,\mathrm{k\Omega}$ کا مساوی $9\,\mathrm{k\Omega}$ ہے جو از خود $18\,\mathrm{k\Omega}$ کے متوازی ہے۔یوں ان کا مساوی $6\,\mathrm{k\Omega}$ ہو گا جس کے استعمال سے شکل-پ حاصل ہوتا ہے۔

[34] میں متوقع طاقتی ضیاع کی دگنا قیمت کے طاقتی سکت کا مزاحمت استعمال کرتا ہوں۔

شکل 2.40: سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے دور کی مثال۔

شکل 2.40-پ میں

$$i_1=\frac{20}{4000+6000}=2\,\text{mA}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے قانون اوہم کے تحت

$$v_a=i_1\times 6\,\text{k}\Omega=12\,\text{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں ان قیمتوں کو دکھایا گیا ہے جہاں سے ظاہر ہے کہ $18\,\text{k}\Omega$ مزاحمت پر $12\,\text{V}$ دباو ہے لہٰذا اس کی رو

$$i_2=\frac{v_a}{18\,\text{k}\Omega}=\frac{12}{18000}=\frac{2}{3}\,\text{mA}$$

ہو گی۔ شکل-الف میں قانون رو سے

$$i_1=i_2+i_3$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}i_3&=i_1-i_2\\&=2\,\text{mA}-\frac{2}{3}\,\text{mA}\\&=\frac{4}{3}\,\text{mA}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں i_3 کے استعمال سے

$$\begin{aligned}v_b&=i_3\times 3\,\text{k}\Omega\\&=\frac{4}{3}\times 10^{-3}\times 3000\\&=4\,\text{V}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب شکل-الف میں v_b جانتے ہوئے i_4 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}i_4&=\frac{v_b}{4\,\text{k}\Omega}\\&=\frac{4}{4000}\\&=1\,\text{mA}\end{aligned}$$

قانون رو سے

$$i_3 = i_4 + i_5$$

لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} i_5 &= i_3 - i_4 \\ &= \frac{4}{3}\,\text{mA} - 1\,\text{mA} \\ &= \frac{1}{3}\,\text{mA} \end{aligned}$$

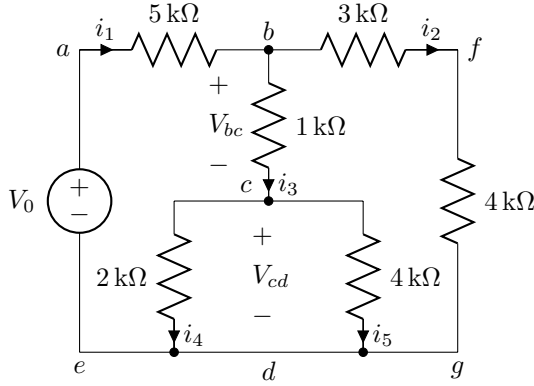
حاصل ہوتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے قانون اوہم سے

$$\begin{aligned} v_c &= i_5 \times 9\,\text{k}\Omega \\ &= \frac{1}{3} \times 10^{-3} \times 9000 \\ &= 3\,\text{V} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 2.18: شکل 2.41 میں $i_5 = 2\,\text{mA}$ ہونے کی صورت میں تمام نا معلوم متغیرات دریافت کریں۔

حل: یہ مثال گزشتہ مثال کے الٹ ہے۔ یہاں دور میں کسی ایک مقام کے رو (یا دباو) سے منبع کا دباو اور دیگر متغیرات دریافت کیے جائیں گے۔ دی معلومات سے قانون اوہم کے ذریعہ

$$\begin{aligned} v_{cd} &= i_5 \times 4\,\text{k}\Omega \\ &= 2 \times 10^{-3} \times 4000 \\ &= 8\,\text{V} \end{aligned}$$

شکل 2.41: سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کا دور۔

لکھا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے قانون اوہم کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
i_4 &= \frac{v_{cd}}{2\,\text{k}\Omega}\\
&= \frac{8}{2000}\\
&= 4\,\text{mA}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ کرخوف قانون رو

$$
\begin{aligned}
i_3 &= i_4 + i_5\\
&= 4\,\text{mA} + 2\,\text{mA}\\
&= 6\,\text{mA}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں قانون اوہم سے

$$
\begin{aligned}
v_{bc} &= i_3 \times 1\,\text{k}\Omega\\
&= 6 \times 10^{-3} \times 1000\\
&= 6\,\text{V}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ دائرہ $dcbfg$ پر کرخوف قانون دباو

$$
V_{cd} + V_{bc} = i_2 \times 3\,\text{k}\Omega + i_2 \times 4\,\text{k}\Omega
$$

لکھا جائے گا جس سے

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \frac{V_{cd}+V_{bc}}{3\,\mathrm{k\Omega}+4\,\mathrm{k\Omega}}\\
&= \frac{8+6}{3000+4000}\\
&= 2\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ کرخوف قانون رو سے

$$
\begin{aligned}
i_1 &= i_2+i_3\\
&= 2\,\mathrm{mA}+6\,\mathrm{mA}\\
&= 8\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جسے قانون اوہم میں استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
V_{ab} &= i_1\times 5\,\mathrm{k\Omega}\\
&= 8\times 10^{-3}\times 5000\\
&= 40\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے جہاں V_{ab} نقطہ b کے حوالے سے نقطہ a پر دباو ہے۔ دائرہ $eabcd$ پر کرخوف قانون دباو

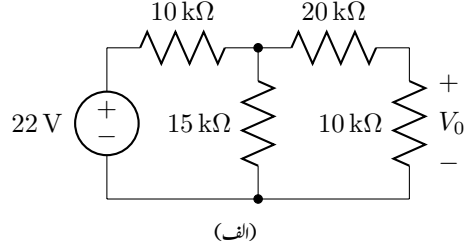
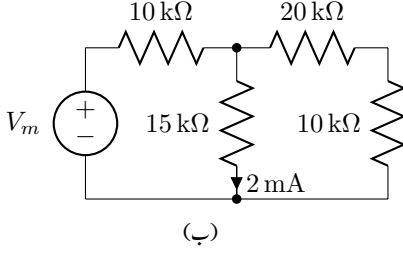
$$
V_0 = V_{ab}+V_{bc}+V_{cd}
$$

لکھا جائے گا جس سے منبع کا دباو

$$
\begin{aligned}
V_0 &= 40+6+8\\
&= 54\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

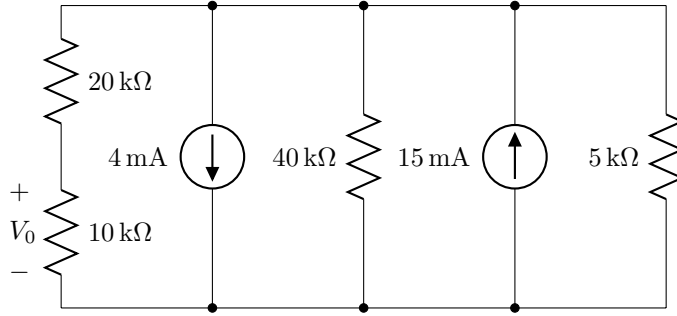
مشق 2.13: شکل 2.42-الف میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: 3.667 V

شکل 2.42: دور برائے مشق 2.13 اور مشق 2.14

مشق 2.14: شکل 2.42-ب میں V_m دریافت کریں۔

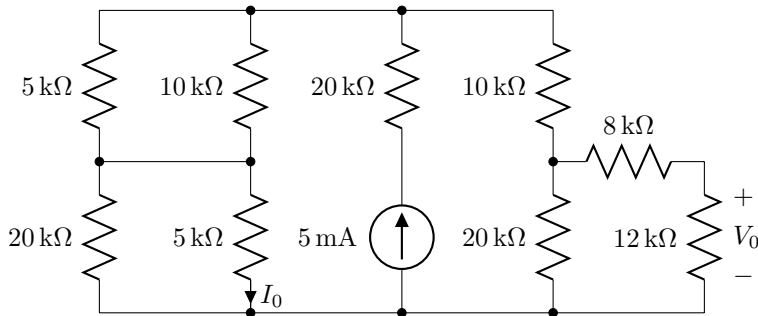
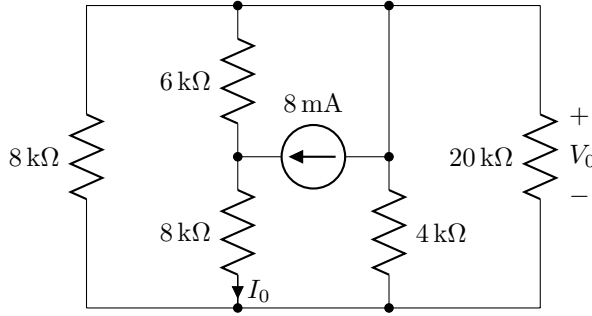
جواب: 60 V

مشق 2.15: شکل 2.43 میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: 14.19 V

شکل 2.43: دور برائے مشق 2.15

مشق 2.16: شکل 2.44 میں V_0 اور I_0 دریافت کریں۔

جوابات: 8.05 V ، 2.93 mA

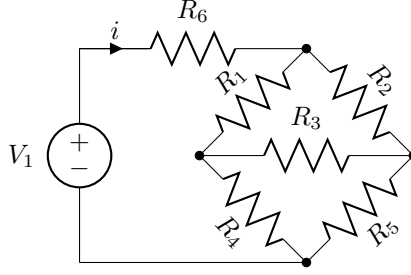
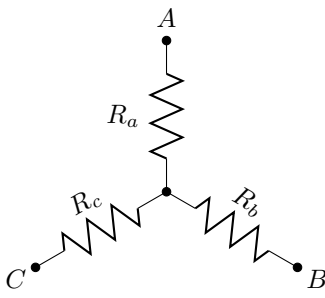
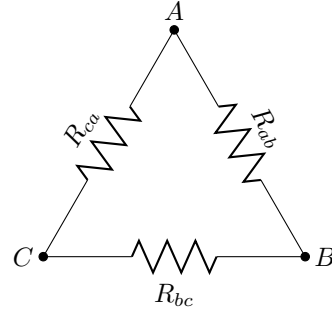
مشق 2.17: شکل 2.45 میں V_0 اور I_0 دریافت کریں۔

شکل 2.44: دور برائے مشق 2.16

شکل 2.45: دور برائے مشق 2.17

جوابات: $-6.906\,\text{V}$ ، $2.94\,\text{mA}$

2.12 ستارہ-تکون تبادلہ

ہم نے اب تک ایسے ادوار دیکھے جن میں سلسلہ وار مزاحمتوں اور متوازی مزاحمتوں کی جگہ مساوی مزاحمت نسب کرتے ہوئے سادہ دور حاصل کیا گیا۔اس حصے میں جس ترکیب پر غور کیا جائے گا، اس کی اہمیت شکل 2.46 سے واضح ہو گی۔آپ اس دور میں i حاصل کرنے کی کوشش کریں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس میں کوئی بھی دو مزاحمت سلسلہ وار یا متوازی نہیں جڑے لہٰذا اس دور کی سادہ صورت گزشتہ ترکیب سے حاصل نہیں کی جا سکتی۔کیا اچھا ہوتا اگر ایسی صورت میں دور کے کچھ حصے کی جگہ متبادل دور نسب کرتے ہوئے اسے قابل حل بنانا ممکن ہوتا۔خوش قسمتی سے ایسا کرنا ممکن ہے۔ اس ترکیب کو **ستارہ-تکونی تبادلہ**[35] یا $\Delta - Y$ تبادلہ کہتے ہیں۔آئیں ستارہ-تکون تبادلہ کے ترکیب پر غور کریں۔

شکل 2.47-الف میں تین مزاحمت تکون کی شکل Δ میں جڑے ہیں جبکہ شکل-ب میں تین مزاحمت ستارہ کی شکل Y میں جڑے ہیں۔ہم ستارہ مزاحمت کی جگہ تکونی مزاحمت یا تکونی مزاحمت کی جگہ ستارہ مزاحمت اس صورت نسب کر سکتے ہیں جب اس تبدیلی سے بقایا دور پر کوئی اثر نہ پڑے۔یوں اگر کسی دور میں تین نقطوں A ، B اور C کے درمیان تکونی مزاحمت (ستارہ مزاحمت) جڑے ہوں تب انہیں تین نقطوں پر مبدل ستارہ مزاحمت (تکونی مزاحمت) نسب کرنے سے بقایا دور میں کسی بھی مقام پر دباو اور رو میں تبدیلی رو نما نہیں ہونی چاہیے۔ایسا تب ممکن

[35] wye-delta transformation

شکل 2.46: اس دور کو سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کی طرح حل نہیں کیا جا سکتا۔

شکل 2.47: ستارہ-تکون مبدل

ہو گا کہ ان تین نقطوں پر بھی دباو اور رو میں کوئی تبدیلی نہ پیدا ہو یعنی AB اور CA اور BC کے درمیان مزاحمت میں تبدیلی نہیں پیدا ہونی چاہیے۔

ستارہ-تکونی تبادلہ ABC کے ساتھ کسی بھی دور کے لئے کار آمد ہونا چاہیے۔یوں یہ تبادلہ اس صورت بھی کار آمد ہونا ضروری ہے جب A اور B دور کے ساتھ منسلک ہوں جبکہ C آزاد ہو اور کہیں نہ جڑا ہو۔ایسی صورت میں شکل 2.47-الف سے AB کی مزاحمت درج ذیل حاصل ہوتی ہے

$$R_{AB} = \frac{R_{ab}(R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}$$

جبکہ شکل 2.47-ب سے AB کی مزاحمت

$$R_{AB} = R_a + R_b$$

حاصل ہوتی ہے۔مندرجہ بالا دونوں قیمت برابر ہونا ضروری ہے یعنی

$$R_{AB} = \frac{R_{ab}(R_{bc} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_a + R_b \tag{2.56}$$

اسی طرح اگر B کہیں بھی نہ جڑا ہو تب دونوں اشکال سے CA کی مزاحمت برابر پر کرنے سے

$$R_{CA} = \frac{R_{ca}(R_{ab} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_c + R_a \tag{2.57}$$

حاصل ہوتا ہے۔اگر A کہیں بھی نہ جڑا ہو تب دونوں اشکال سے BC کی مزاحمت برابر پر کرنے سے

$$R_{BC} = \frac{R_{bc}(R_{ab} + R_{ca})}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} = R_b + R_c \tag{2.58}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 2.56، مساوات 2.57 اور مساوات 2.58 تین عدد مساوات ہیں جنہیں R_a ، R_b اور R_c کے لئے حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \\ R_b &= \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \\ R_c &= \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}} \end{aligned} \tag{2.59}$$

اسی طرح مساوات 2.56 تا مساوات 2.58 کو R_{ab} ، R_{bc} اور R_{ca} کے لئے حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} R_{ab} &= \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_c} \\ R_{bc} &= \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_a} \\ R_{ca} &= \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_b} \end{aligned} \tag{2.60}$$

مساوات 2.59 تکونی مزاحمت سے ستارہ مزاحمت کی قیمتیں دیتا ہے جبکہ مساوات 2.60 ستارہ مزاحمت سے تکونی مزاحمت کی قیمتیں دیتا ہے۔

مشق 2.18: مساوات 2.59 حاصل کریں۔

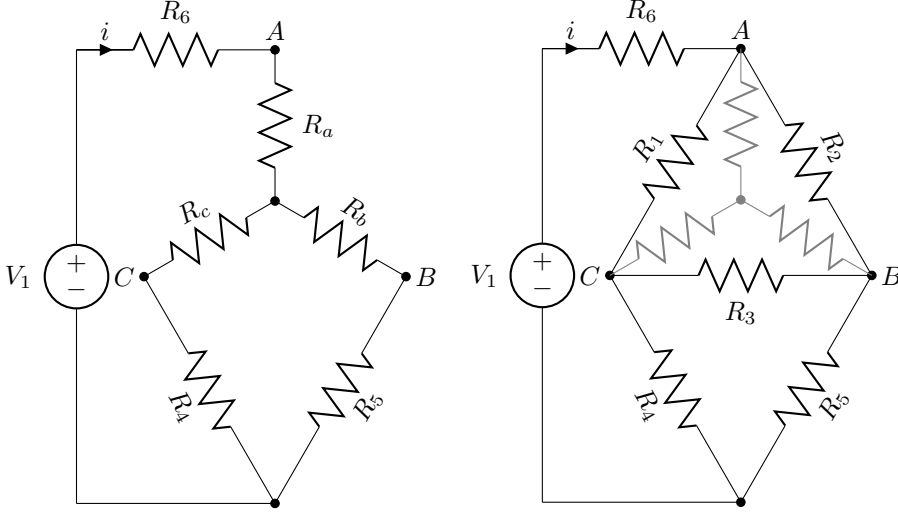
مشق 2.19: مساوات 2.60 حاصل کریں۔

شکل 2.46 کی مثال آگے بڑھاتے ہیں۔اسے شکل 2.48-الف میں دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں تکون abc کی نشاندہی کرتے ہوئے R_1 ، R_2 اور R_3 کا مبدل ستارہ ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ شکل 2.48-ب میں تکون کی جگہ ستارہ نسب دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ نیا دور قابل حل ہے۔نئی شکل میں مزاحمت R_a ، R_b اور R_c ستارہ جڑے ہیں۔

مثال 2.19: شکل 2.46 میں i حاصل کریں۔دیگر معلومات درج ذیل ہیں۔

$$V_1 = 16\,\text{V}, \quad R_1 = 10\,\text{k}\Omega, \quad R_2 = 15\,\text{k}\Omega, \quad R_3 = 5\,\text{k}\Omega,$$
$$R_4 = \frac{1}{3}\,\text{k}\Omega, \quad R_5 = \frac{1}{2}\,\text{k}\Omega, \quad R_6 = 1.8\,\text{k}\Omega$$

حل:مساوات 2.59 کی مدد سے ستارہ مزاحمت حاصل کرتے ہیں۔

$$R_a = \frac{10000 \times 15000}{10000 + 15000 + 5000} = 5\,\text{k}\Omega$$
$$R_b = \frac{15000 \times 5000}{10000 + 15000 + 5000} = \frac{5}{2}\,\text{k}\Omega$$
$$R_c = \frac{10000 \times 5000}{10000 + 15000 + 5000} = \frac{5}{3}\,\text{k}\Omega$$

(الف) بالائی تکون کی جگہ ستارہ نسب کیا جا رہا ہے۔ ستارہ کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

(ب) تکون کی جگہ ستارہ نسب کرنے سے دور قابل حل ہو گیا ہے۔

شکل 2.48: تکون-ستارہ تبادلہ۔

ان قیمتوں کو شکل 2.48-ب میں پُر کرتے ہیں۔ اب R_c اور R_4 سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا ان کا مساوی مزاحمت

$$R_{c4} = \frac{5}{3}\,\mathrm{k\Omega} + \frac{1}{3}\,\mathrm{k\Omega} = 2\,\mathrm{k\Omega}$$

ہو گا۔اسی طرح R_b اور R_5 سلسلہ وار جڑے ہیں جن کا مساوی مزاحمت

$$R_{b5} = \frac{5}{2}\,\mathrm{k\Omega} + \frac{1}{2}\,\mathrm{k\Omega} = 3\,\mathrm{k\Omega}$$

ہے۔یہ دو عدد مساوی مزاحمت آپس میں متوازی جڑے ہیں لہٰذا ان کا مساوی مزاحمت

$$R_m = \frac{2000 \times 3000}{2000 + 3000} = 1.2\,\mathrm{k\Omega}$$

ہو گا جو R_a اور R_6 کے ساتھ سلسلہ وار ہے لہٰذا برقی رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned}
i &= \frac{V_1}{R_6 + R_a + R_m}\\
&= \frac{16}{1800 + 5000 + 1200}\\
&= 2\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

مشق 2.20: مثال 2.19 میں R_3 ، R_4 اور R_5 کی جگہ مساوی ستارہ جوڑتے ہوئے i حاصل کریں۔

جواب: $2\,\mathrm{mA}$

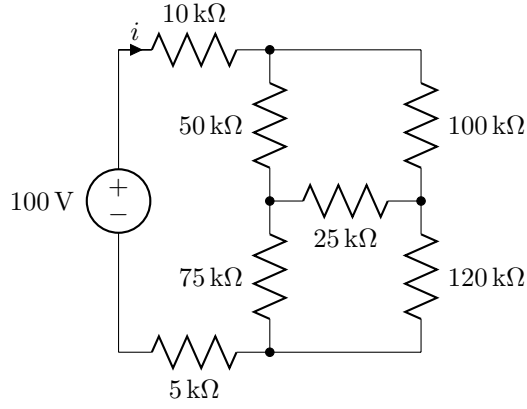
مساوات 2.59 اور مساوات 2.60 عمومی مساوات ہیں۔متوازن تکون میں $R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = R_{\Delta}$ ہو گا۔ایسی صورت میں مساوات 2.59 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$R_Y = \frac{R_{\Delta}}{3} \tag{2.61}$$

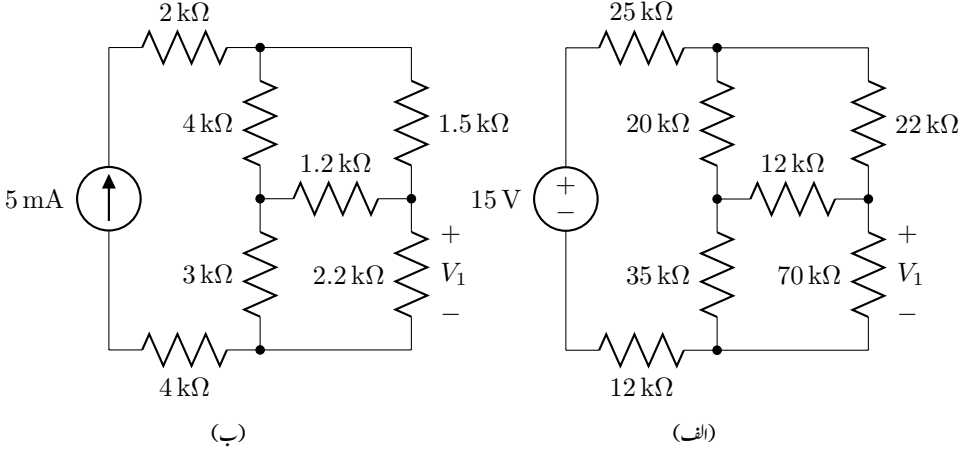
اسی طرح متوازن ستارے میں $R_a = R_b = R_c = R_Y$ ہو گا۔ایسی صورت میں مساوات 2.60 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$R_{\Delta} = 3R_Y \tag{2.62}$$

مشق 2.21: شکل 2.49 میں تکون-ستارہ مبدل کی مدد سے i دریافت کریں۔

جواب: $1.057\,78\,\mathrm{mA}$

شکل 2.49: مشق 2.21 کا دور۔

مشق 2.22: شکل 2.50-الف میں تکون-ستارہ مبدل کی مدد سے V_1 دریافت کریں۔

جواب: 5.103 V

شکل 2.50: مشق 2.22 اور مشق 2.23 کا دور۔

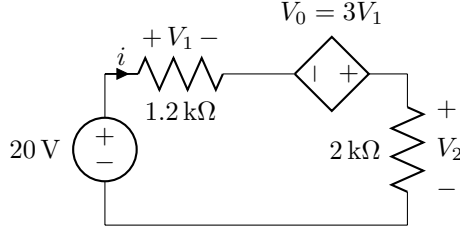
مشق 2.23: شکل 2.50-ب میں تکون-ستارہ مبدل کی مدد سے V_1 دریافت کریں۔

جواب: 6.609 V

2.13 تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار

تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار برقیات[36] کے میدان میں اہم کردار ادا کرتے ہیں جہاں دو جوڑ ٹرانزسٹر[37]، میدانی ٹرانزسٹر[38]، ماسفیٹ[39] وغیرہ کے ریاضی نمونے تابع منبع کو استعمال کرتے ہوئے بنائے جاتے ہیں۔اس حصے میں تابع منبع استعمال کرنے والے سادہ ترین ادوار پر مثالوں کی مدد سے غور کیا جائے گا۔ تابع منبع استعمال کرتے ادوار حل کرنے کی ترکیب مندرجہ ذیل ہے۔

---

[36] electronics
[37] Bipolar Junction Transistor, BJT
[38] Field Effect Transistor, FET
[39] Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor, MOSFET

شکل 2.51: مثال 2.20 کا دور۔

- تابع منبع کو غیر تابع منبع تصور کرتے ہوئے درکار کرخوف مساوات لکھیں۔
- تابع منبع کی قابو مساوات لکھیں۔
- ان ہمزاد مساوات کو حل کریں۔یاد رہے کہ مساوات کی تعداد نا معلوم متغیرات کے برابر ہونا ضروری ہے۔

مثال 2.20: شکل 2.51 میں دباو سے قابو منبع دباو استعمال کیا گیا ہے۔ایسی تابع منبع کو **دباو تابع منبع دباو**[40] کہتے ہیں۔اس دور میں i اور V_2 دریافت کریں۔

حل: کرخوف قانون دباو سے

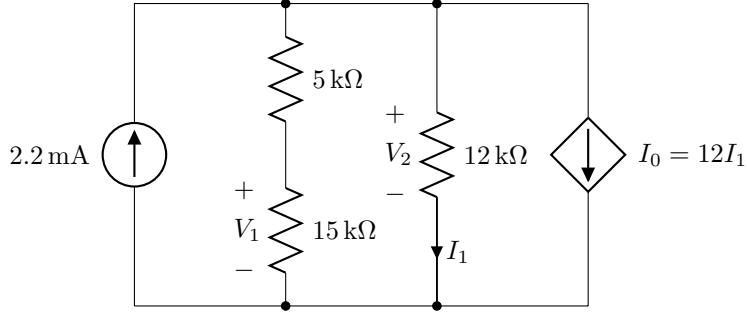
$$-20 + 1200i - V_0 + 2000i = 0$$

لکھتے ہیں۔تابع منبع کی قابو مساوات درج ذیل ہے۔

$$V_0 = 3V_1 = 3 \times 1200i$$

مندرجہ بالا دو ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے

$$i = -50\,\mathrm{mA}$$

[40] voltage controlled voltage source

شکل 2.52: مثال 2.21 کا دور۔

حاصل ہوتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} V_2 &= 2000 \times (-50 \times 10^{-3}) \\ &= -100\,\text{V} \end{aligned}$$

ملتا ہے۔

مثال 2.21: شکل 2.52 میں رو تابع منبع رو[41] استعمال کیا گیا ہے۔اس دور میں V_1 دریافت کریں۔

حل: دباو V_2 استعمال کرتے ہوئے بالائی جوڑ پر کرخوف قانون رو لکھتے ہیں۔

$$-2.2 \times 10^{-3} + \frac{V_2}{5000 + 15000} + \frac{V_2}{12000} + I_0 = 0$$

منبع کی قابو مساوات بھی لکھتے ہیں۔

$$I_0 = 12I_1 = \frac{12 \times V_2}{12000}$$

[41] current controlled current source

مندرجہ بالا دونوں مساواتوں سے درج ذیل

$$-2.2 \times 10^{-3} + \frac{V_2}{5000 + 15000} + \frac{V_2}{12000} + \frac{12 \times V_2}{12000} = 0$$

لکھتے ہوئے

$$V_2 = \frac{33}{17}\,\text{V}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے درکار دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{15000}{5000 + 15000}\right) V_2 \\ &= \left(\frac{15000}{5000 + 15000}\right) \times \frac{33}{17} \\ &= 1.456\,\text{V} \end{aligned}$$

مثال 2.22: دو جوڑ ٹرانزسٹر کے استعمال سے بنائے گئے **ایمٹر مشترک ایمپلیفائر**[42] کا مساوی دور شکل 2.53-الف میں دکھایا گیا ہے۔مساوی دور کے حصول میں **دباو تابع منبع رو**[43] کا استعمال کیا گیا ہے۔ خارجی اشارہ v_0 اور داخلی اشارہ v_s کی شرح کو **افزائش دباو**[44] A_v کہتے ہیں۔آئیں $A_v = \frac{v_0}{v_s}$ حاصل کریں۔

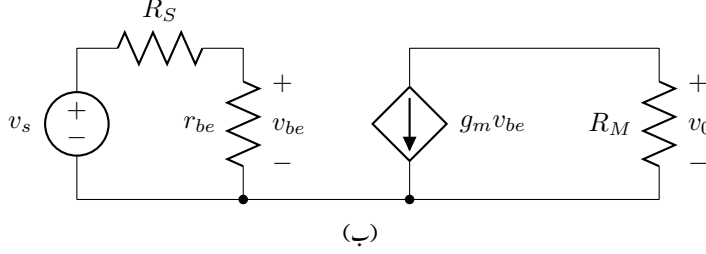
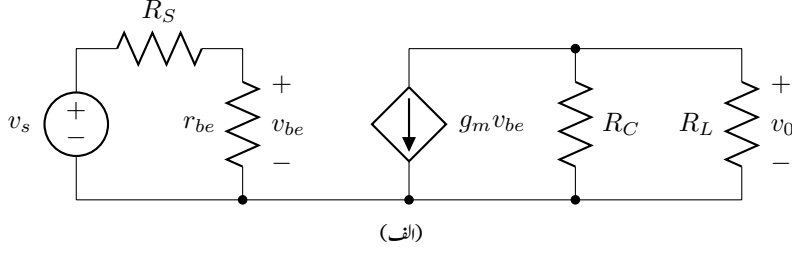
حل: خارجی جانب R_C اور R_L متوازی جڑے ہیں جن کی جگہ مساوی مزاحمت R_M نسب کیا جا سکتا ہے۔

$$R_M = \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}$$

ایسا کرنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے جہاں بائیں دائرے کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_{be} = \frac{r_{be} v_s}{R_S + r_{be}}$$

---

[42] common emitter amplifier
[43] voltage controlled current source
[44] voltage gain

شکل 2.53: ایمٹر مشترک ایمپلیفائر کا مساوی دور۔

شکل-ب میں دائیں دائرے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_0 = -g_m v_{be} R_M$$

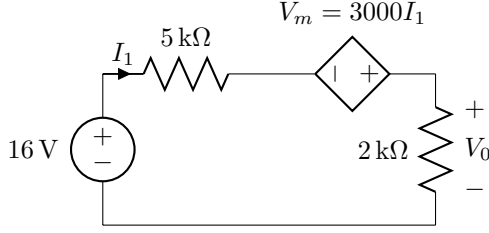
درج بالا دونوں مساواتوں کو ملاتے ہوئے

$$v_0 = -g_m \left(\frac{r_{be} v_s}{R_S + r_{be}} \right) R_M$$

حاصل ہوتا ہے جہاں سے افزائش دباو حاصل ہوتی ہے۔

$$A_v = \frac{v_0}{v_s} = -\frac{g_m r_{be} R_M}{R_S + r_{be}}$$

مثال 2.23: شکل 2.54 میں روتابع منبع دباو[45] کا استعمال دکھایا گیا ہے۔اس دور میں خارجی دباو V_0 حاصل کریں۔

[45] current controlled voltage source

شکل 2.54: روتابع منبع دباو کے استعمال کی مثال۔

حل: کرخوف قانون دباو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$-16 + 5000I_1 - V_m + 2000I_1 = 0$$

منبع کی قابو مساوات درج ذیل ہے۔

$$V_m = 3000I_1$$

مندرجہ بالا دو مساواتوں کو ملاتے ہوئے

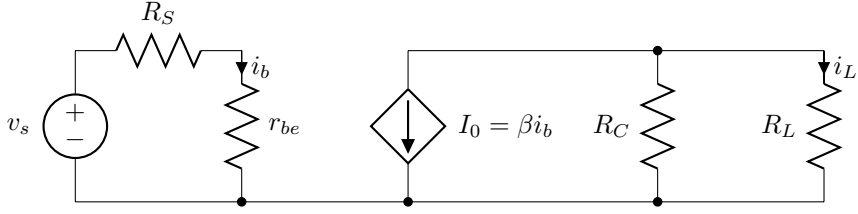
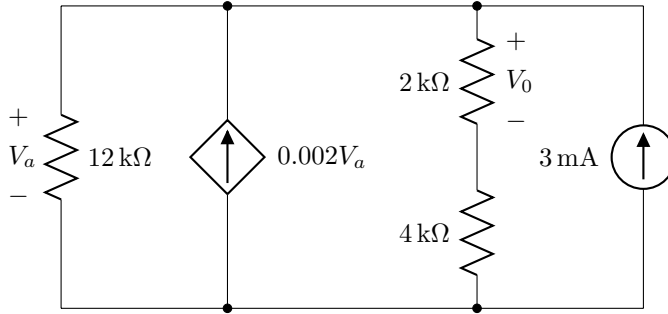
$$-16 + 5000I_1 - 3000I_1 + 2000I_1 = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{16}{4000} \\ &= 4\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں قانون اوہم کی مدد سے خارجی دباو

$$\begin{aligned} V_0 &= 4 \times 10^{-3} \times 2000 \\ &= 8\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

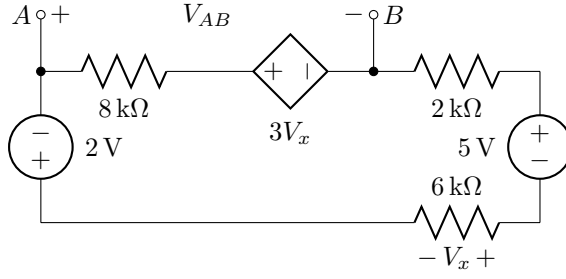
حاصل ہوتا ہے۔

شکل 2.55: موصلیت نما ایمپلیفائر کا مساوی دور۔

شکل 2.56: مشق 2.25 کا دور۔

مشق 2.24: شکل 2.55 میں موصلیت نما ایمپلیفائر[46] کا مساوی دور دکھایا گیا ہے۔ افزائش موصلیت نما[47] $A_g = \frac{i_L}{v_s}$ کی مساوات حاصل کریں اور $R_S = 100\,\Omega$ ، $r_{be} = 400\,\Omega$ ، $R_C = 18\,\mathrm{k\Omega}$ ، $R_L = 2\,\mathrm{k\Omega}$ اور $\beta = 180$ کی صورت میں افزائش کی قیمت دریافت کریں۔

جواب: $A_g = -\beta\left(\frac{1}{R_S+r_{be}}\right)\left(\frac{R_C}{R_C+R_L}\right)$ ، $-0.324\,\mathrm{A\,V^{-1}}$

مشق 2.25: شکل 2.56 میں V_0 کی قیمت حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = -\frac{4}{7}\,\mathrm{V}$

[46] transconductance amplifier
[47] transconductance gain

شکل 2.57: مشق 2.26 کا دور۔

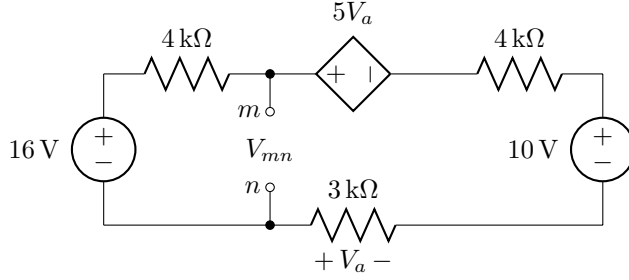
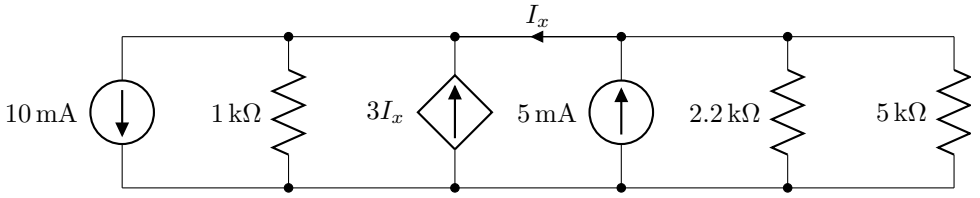
مشق 2.26: شکل 2.57 میں V_{AB} دریافت کریں۔

جواب: $V_{AB} = -\frac{91}{17}\,\mathrm{V}$

مشق 2.27: شکل 2.58 میں V_{mn} دریافت کریں۔

جواب: $V_{mn} = -10\,\mathrm{V}$

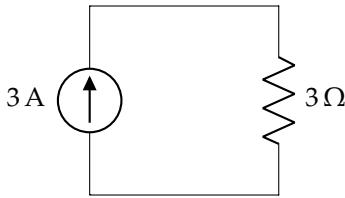
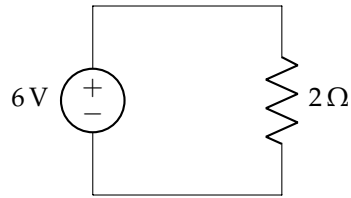
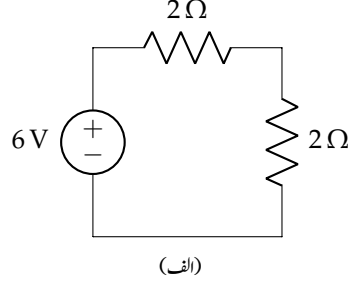
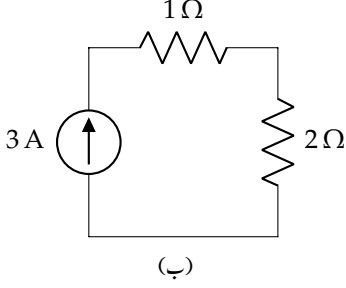
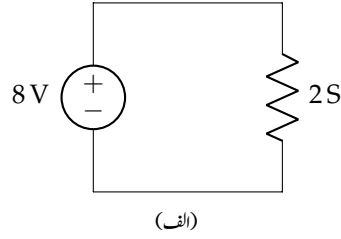
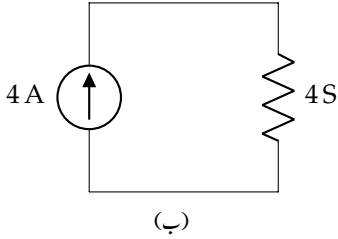
مشق 2.28: شکل 2.59 میں I_x دریافت کریں۔

جواب: $I_x = 3.19\,\mathrm{mA}$

شکل 2.58: مشق 2.27 کا دور۔

شکل 2.59: مشق 2.28 کا دور۔

سوالات

سوال 2.1: شکل 2.60-الف میں رو اور مزاحمتی ضیاع دریافت کریں۔ شکل-ب میں دباو اور مزاحمتی ضیاع دریافت کریں۔

جوابات: $3\,\mathrm{A}$ ، $18\,\mathrm{W}$ ، $9\,\mathrm{V}$ ، $27\,\mathrm{W}$

سوال 2.2: شکل 2.61-الف میں رو، مزاحمت پر دباو اور مزاحمتی ضیاع دریافت کریں۔ شکل-ب میں رو،

شکل 2.60: سوال 2.1 کا دور۔

شکل 2.61: سوال 2.2 کا دور۔

شکل 2.62: سوال 2.3 کا دور۔

مزاحمت پر دباو اور مزاحمتی ضیاع دریافت کریں۔

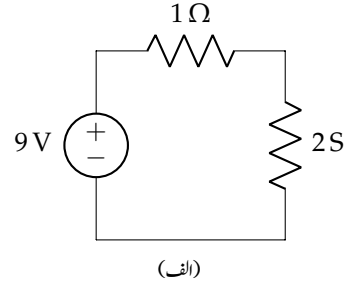
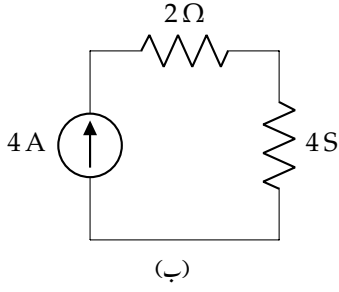
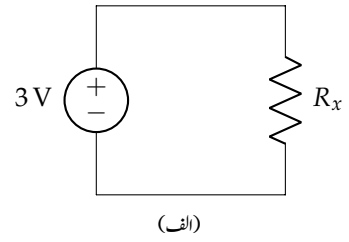
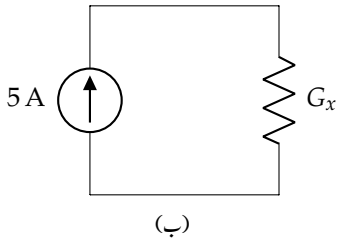
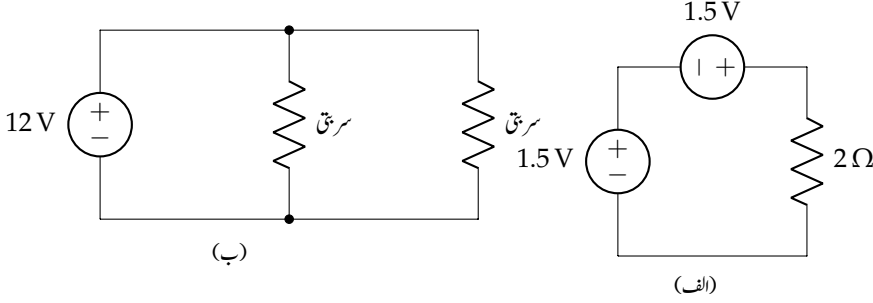
جوابات: (الف) $\frac{3}{2}$ A ، 3 V ، 3 V ، $\frac{9}{2}$ W ، $\frac{9}{2}$ W؛ (ب) 3 A ، 3 V ، 6 V ، 9 W ، 18 W

سوال 2.3: شکل 2.62-الف میں مزاحمت کی رو، دباو اور طاقتی ضیاع دریافت کریں۔ شکل-ب کو بھی حل کریں۔

جوابات: (الف) 16 A ، 8 V ، 128 W؛ (ب) 4 A ، 1 V ، 4 W

سوال 2.4: شکل 2.63-الف میں مزاحمتی ضیاع دریافت کریں۔ شکل-ب کو بھی حل کریں۔

جوابات: (الف) 36 W ، 18 W؛ (ب) 32 W ، 4 W

سوال 2.5: شکل 2.64-الف میں مزاحمتی ضیاع 18 W جبکہ شکل-ب میں 50 W ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ R_x اور G_x دریافت کریں۔

شکل 2.63: سوال 2.4 کا دور۔

شکل 2.64: سوال 2.5 کا دور۔

شکل 2.65: سوال 2.6 کا دور۔

جوابات: $R_x = 0.5\,\Omega$ ، $G_x = 0.5\,\mathrm{S}$

سوال 2.6: شکل 2.65-الف دو عدد بیٹری سیل[48] کو سلسلہ وار جوڑ کر بتی کو روشن کیا جاتا ہے۔بتی کو بطور $0.5\,\Omega$ مزاحمت دکھایا گیا ہے۔بتی میں توانائی کے ضیاع کا $5\,\%$ سے کم حصہ روشنی میں تبدیل ہوتا ہے۔بتی میں توانائی کا ضیاع دریافت کریں۔شکل-ب میں ٹریکٹر کی سر بتیوں کو بارہ وولٹ کی بیٹری سے جوڑا گیا ہے۔ایک سر بتی $3\,\mathrm{A}$ لیتی ہے۔بیٹری کتنا طاقت فراہم کرتی ہے۔

جوابات: $4.5\,\mathrm{W}$ ، $72\,\mathrm{W}$

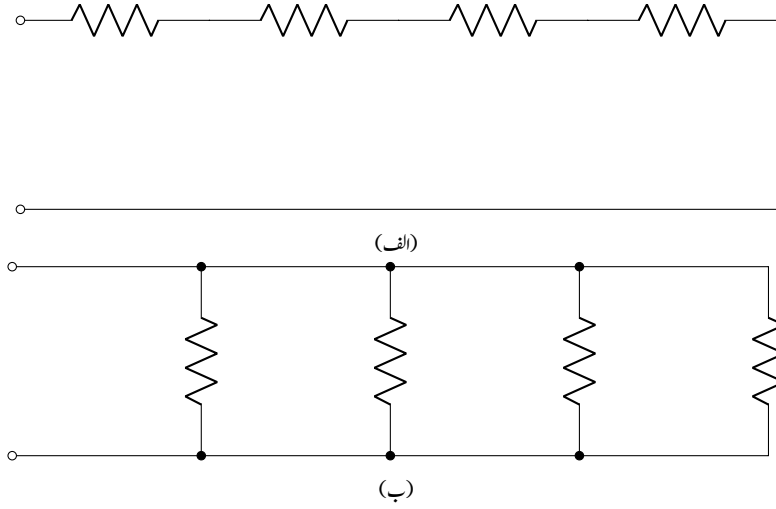
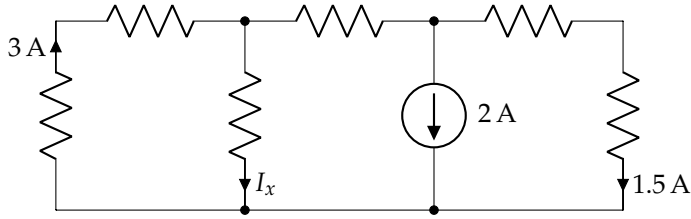
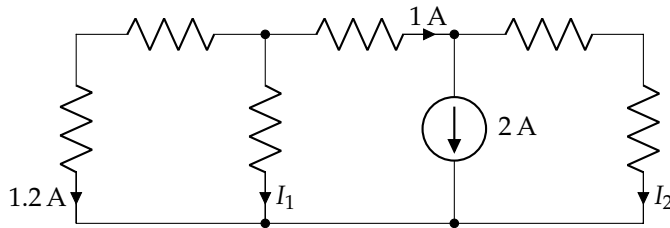
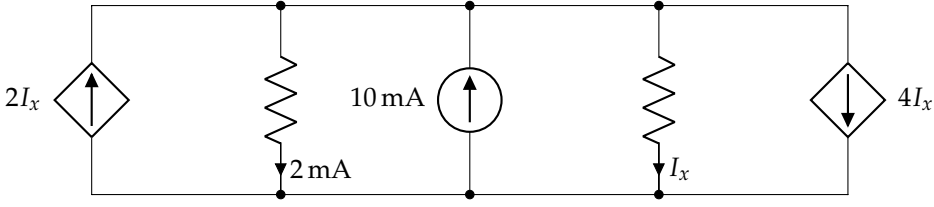
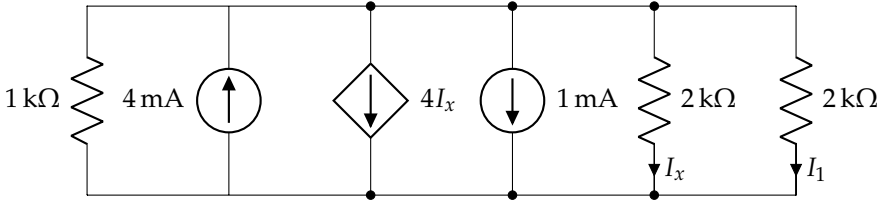
سوال 2.7: شادی بیاہ اور دیگر خشیوں کی رونق کو دوبالہ کرنے کی خاطر رنگین بتیاں روشن کی جاتی ہیں۔شروع میں ان بتیوں کو سلسلہ وار شکل 2.66-الف کی طرز پر جوڑا جاتا تھا لیکن اب انہیں متوازی شکل 2.66-ب کی طرز پر جوڑا جاتا ہے۔کیا آپ اس تبدیلی کی وجہ بتلا سکتے ہیں۔

جواب:بتی خراب ہونے کی صورت میں کھلے سر ہوتی ہے جس سے رو صفر ہو جاتی ہے۔یوں شکل-الف میں ایک بھی بتی خراب ہونے کی صورت میں تمام بتیاں بجھ جائیں گی جبکہ شکل-ب کی بقایا بتیاں روشن رہیں گی۔

سوال 2.8: شکل 2.67 میں I_x دریافت کریں۔

جواب: $I_x = -0.5\,\mathrm{A}$

سوال 2.9: شکل 2.68 میں I_1 اور I_2 دریافت کریں۔

جواب: $I_1 = -2.2\,\mathrm{A}$ ، $I_2 = -1\,\mathrm{A}$

شکل 2.66: سوال 2.7 کا دور۔

شکل 2.67: سوال 2.8 کا دور۔

شکل 2.68: سوال 2.9 کا دور۔

شکل 2.69: سوال 2.10 کا دور۔

شکل 2.70: سوال 2.11 کا دور۔

سوال 2.10: شکل 2.69 میں I_x دریافت کریں۔

جواب: $I_x = \frac{8}{3}\,\text{mA}$

سوال 2.11: شکل 2.70 میں I_1 دریافت کریں۔

جواب: $I_1 = \frac{3}{8}\,\text{mA}$

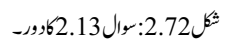
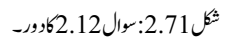
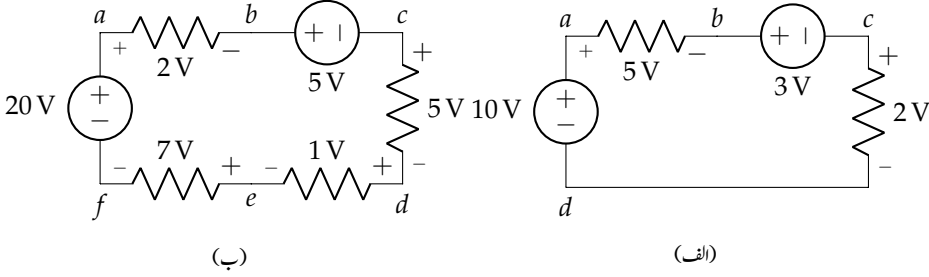
سوال 2.12: شکل 2.71 میں I_1 اور I_2 دریافت کریں۔ ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر پر کرخوف مساوات رو کو ثابت کریں۔

جوابات: $I_1 = -4\,\text{mA}$ ، $I_2 = 3\,\text{mA}$

سوال 2.13: شکل 2.72 میں I_1 ، I_2 ، I_3 اور I_x دریافت کریں۔

جوابات: $I_1 = -18\,\text{mA}$ ، $I_2 = 24\,\text{mA}$ ، $I_3 = 10\,\text{mA}$ ، $I_x = -4\,\text{mA}$

شکل 2.71: سوال 2.12 کا دور۔

شکل 2.72: سوال 2.13 کا دور۔

شکل 2.73: سوال 2.14 کا دور۔

سوال 2.14: شکل 2.73-الف میں V_{bd} اور V_{ca} حاصل کریں۔دونوں دباو حاصل کرتے ہوئے ایک مرتبہ دور میں گھڑی کی سمت میں گھومتے ہوئے اور ایک مرتبہ گھڑی کے الٹ گھومتے ہوئے دباو حاصل کریں۔شکل-ب میں اسی طرح V_{be} ، V_{da} اور V_{cf} حاصل کریں۔

جوابات: $V_{bd} = 5\,\mathrm{V}$ ، $V_{ca} = -8\,\mathrm{V}$ ، $V_{be} = 11\,\mathrm{V}$ ، $V_{da} = -12\,\mathrm{V}$ ، $V_{cf} = 13\,\mathrm{V}$

سوال 2.15: شکل 2.74-الف میں f سے گھڑی کے الٹ گھومتے ہوئے V_{bf} دریافت کریں۔کیا گھڑی کے الٹ گھومتے ہوئے یہ دباو حاصل کی جا سکتی تھی؟ اب f سے گھڑی کے الٹ گھومتے ہوئے V_{cf} دریافت کریں۔کیا گھڑی کی سمت گھومتے ہوئے یہ دباو حاصل کی جا سکتی ہے؟ حاصل قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے V_{bc} دریافت کریں۔اب سے گھڑی کی سمت گھومتے ہوئے V_{bc} دریافت کریں۔

جوابات: $V_{bf} = 19\,\mathrm{V}$ ، نہیں، $V_{cf} = -8\,\mathrm{V}$ ، نہیں، $V_{bc} = 10\,\mathrm{V}$

سوال 2.16: شکل 2.74 میں V_1 اور V_2 دریافت کریں۔

جوابات: $V_1 = -4\,\mathrm{V}$ ، $V_2 = -16\,\mathrm{V}$

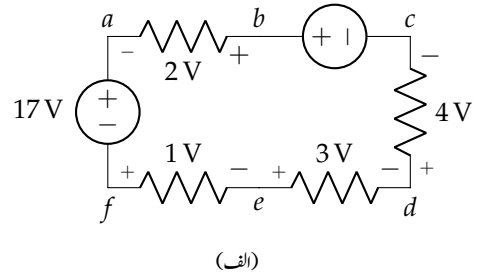
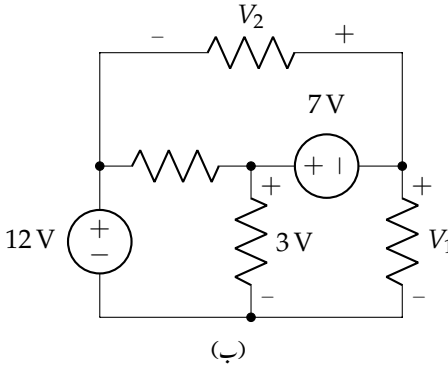
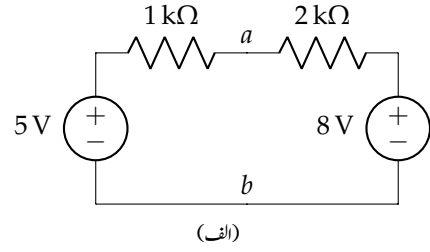
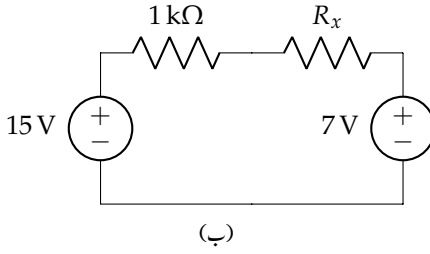
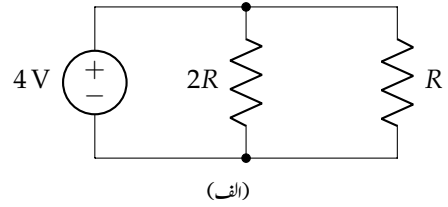
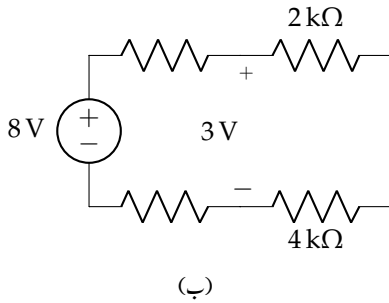
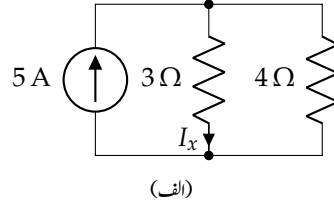
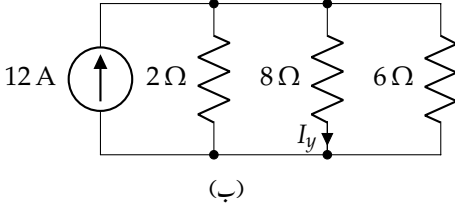
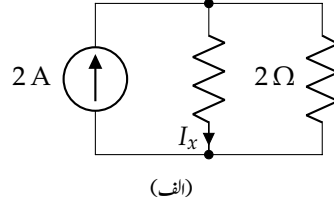
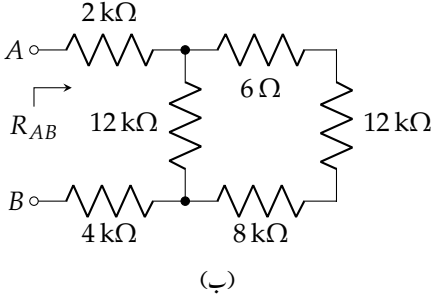
سوال 2.17: شکل 2.75-الف میں V_{ab} دریافت کریں۔

جوابات: $\mathrm{V}_{ab} = 6\,\mathrm{V}$

سوال 2.18: شکل 2.75 میں $1\,\mathrm{k\Omega}$ کی مزاحمتی ضیاع $4\,\mathrm{mW}$ ہے۔مزاحمت R_x کی قیمت دریافت کریں۔

جواب: $R_x = 3\,\mathrm{k\Omega}$

سوال 2.19: شکل 2.76-الف میں منبع $12\,\mathrm{W}$ طاقت فراہم کرتا ہے۔مزاحمت R کی قیمت دریافت کریں۔

---
[48]battery cell

شکل 2.74: سوال 2.15 اور سوال 2.16 کے ادوار۔

شکل 2.75: سوال 2.17 اور سوال 2.18 کے ادوار۔

شکل 2.76: سوال 2.19 اور سوال 2.20 کے ادوار۔

شکل 2.77: سوال 2.21 اور سوال 2.22 کے ادوار۔

شکل 2.78: سوال 2.23 اور سوال 2.24 کے ادوار۔

جواب: $R = 2\,\Omega$

سوال 2.20: شکل 2.76-ب میں منبع کتنا طاقت فراہم کرتا ہے۔

جواب: $4\,\text{mW}$

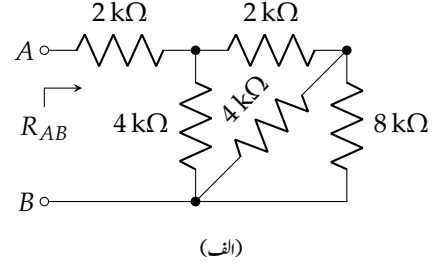
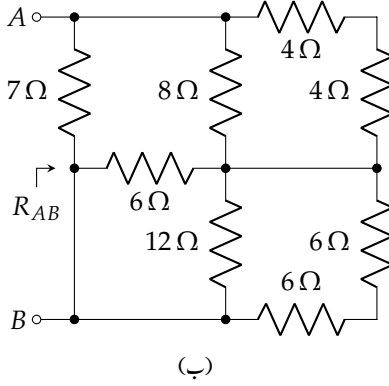
سوال 2.21: شکل 2.77-الف میں I_x دریافت کریں۔

جواب: $I_x = \frac{20}{7}\,\text{A}$

سوال 2.22: شکل 2.77 میں I_y دریافت کریں۔

جواب: $I_y = \frac{36}{19}\,\text{A}$

سوال 2.23: شکل 2.78-الف منبع $6\,\text{W}$ طاقت فراہم کرتی ہے۔رو I_x دریافت کریں۔

جواب: $I_x = 0.5\,\text{A}$

شکل 2.79: سوال 2.25 اور سوال 2.26 کے ادوار۔

سوال 2.24: شکل 2.78-ب میں مزاحمت R_{AB} دریافت کریں۔

جواب: $R_{AB} = \frac{270}{19}\,k\Omega$

سوال 2.25: شکل 2.79 میں مزاحمت R_{AB} دریافت کریں۔

جواب: $R_{AB} = \frac{54}{13}\,k\Omega$

سوال 2.26: شکل 2.79-ب میں مزاحمت R_{AB} حاصل کریں۔

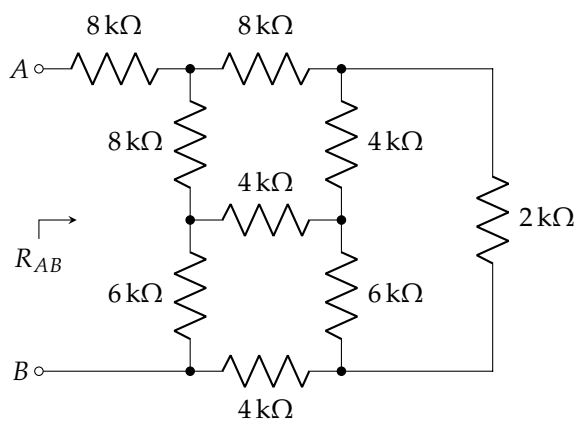
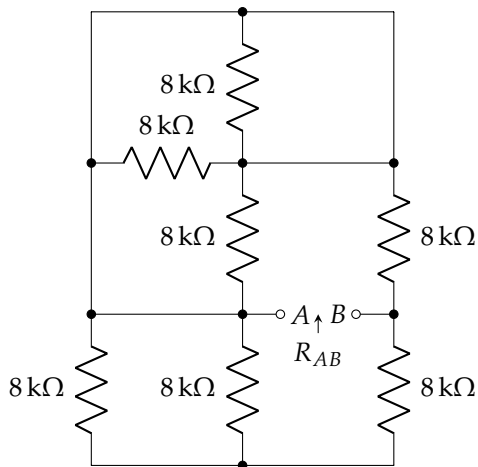
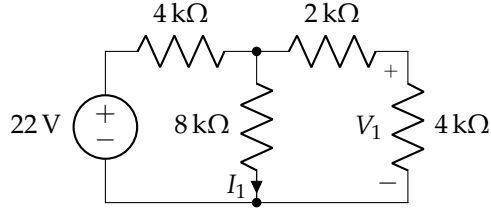
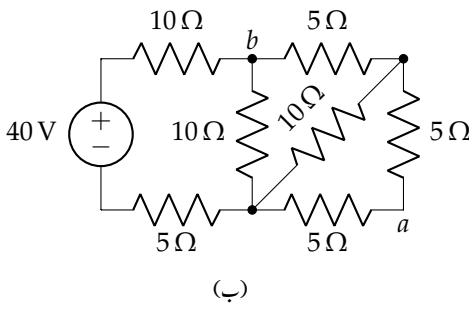
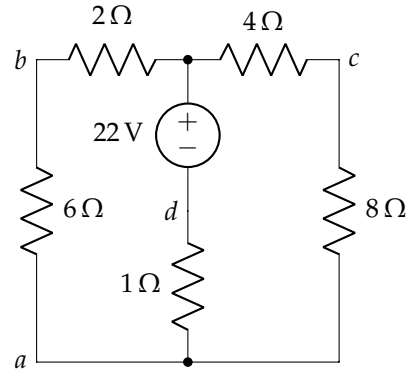
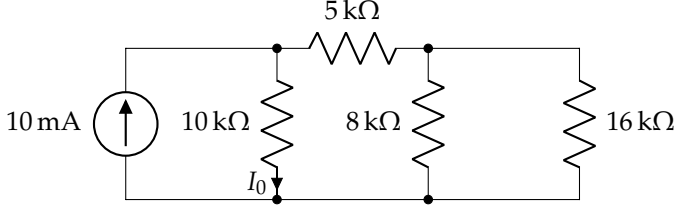
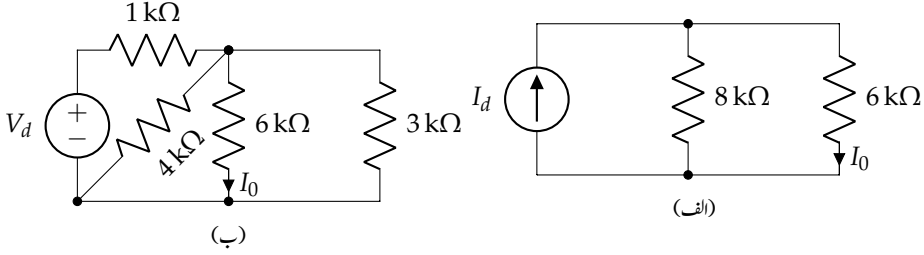
جواب: $R_{AB} = 3.5\,\Omega$

سوال 2.27: شکل 2.80 میں مزاحمت R_{AB} حاصل کریں۔اس سوال میں ستارہ تکون بدل استعمال ہو گا۔

جواب: $R_{AB} = 14.9\,k\Omega$

سوال 2.28: شکل 2.81 میں مزاحمت R_{AB} حاصل کریں۔اس سوال میں ستارہ تکون بدل استعمال ہو گا۔

جواب: $\frac{24}{5}\,k\Omega$

سوال 2.29: شکل 2.82 میں I_1 اور V_1 دریافت کریں۔

شکل 2.80: سوال 2.27 کا دور۔

شکل 2.81: سوال 2.28 کا دور۔

شکل 2.82: سوال 2.29 کا دور۔

شکل 2.83: سوال 2.30 اور سوال 2.31 کے ادوار۔

شکل 2.84: سوال 2.32 کا دور۔

شکل 2.85: سوال 2.33 اور سوال 2.34 کے ادوار۔

جوابات: $I_1 = 1.5\,\mathrm{mA}$ ، $V_1 = 8\,\mathrm{V}$

سوال 2.30: شکل 2.83-الف میں V_{bc} اور V_{ad} دریافت کریں۔

جوابات: $V_{ad} = \frac{110}{29}\,\mathrm{V}$ ، $V_{bc} = \frac{44}{29}\,\mathrm{V}$

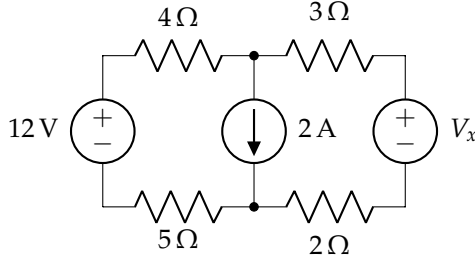
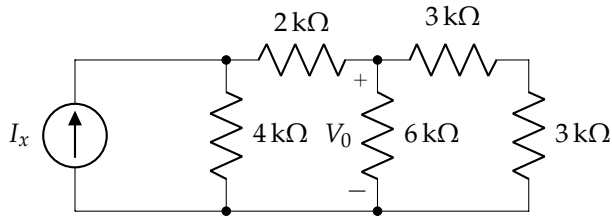
سوال 2.31: شکل 2.83-ب میں V_{ba} دریافت کریں۔

جواب: $V_{ba} = 7.5\,\mathrm{V}$

سوال 2.32: شکل 2.84 میں I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = \frac{310}{61}\,\mathrm{mA}$

سوال 2.33: شکل 2.85-الف میں $I_0 = 2\,\mathrm{mA}$ کی صورت میں I_d دریافت کریں۔

جواب: $I_d = 3.5\,\mathrm{mA}$

شکل 2.86: سوال 2.35 کا دور۔

شکل 2.87: سوال 2.36 کا دور۔

سوال 2.34: شکل 2.85-ب میں $I_0 = 4\,\mathrm{mA}$ کی صورت میں V_d دریافت کریں۔

جواب: $V_d = 42\,\mathrm{V}$

سوال 2.35: شکل 2.86 میں منبع رو صفر طاقت فراہم کرتا ہے۔ دباو V_x دریافت کریں۔

جواب: $V_x = \frac{10}{3}\,\mathrm{V}$

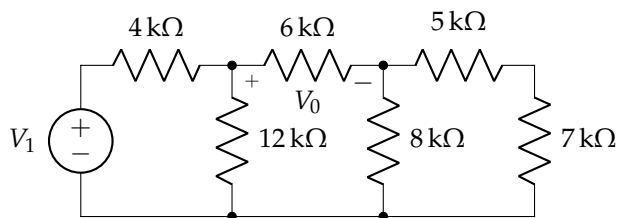
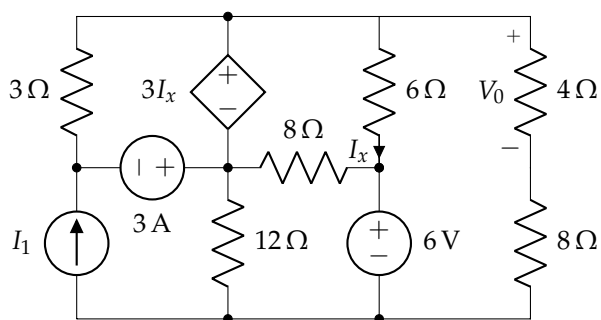
سوال 2.36: شکل 2.87 میں $V_0 = 4\,\mathrm{V}$ ہے۔ I_x حاصل کریں۔

جواب: $I_x = 3\,\mathrm{mA}$

سوال 2.37: شکل 2.88 میں $V_0 = 3\,\mathrm{V}$ ہے۔ V_1 حاصل کریں۔

جواب: $\frac{46}{5}\,\mathrm{V}$

سوال 2.38: شکل 2.89 میں $V_0 = 9\,\mathrm{V}$ ہے۔ I_1 حاصل کریں۔

جواب: $I_1 = \frac{33}{4}\,\mathrm{A}$

شکل 2.88: سوال 2.37 کا دور۔

شکل 2.89: سوال 2.38 کا دور۔

باب 3

ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب

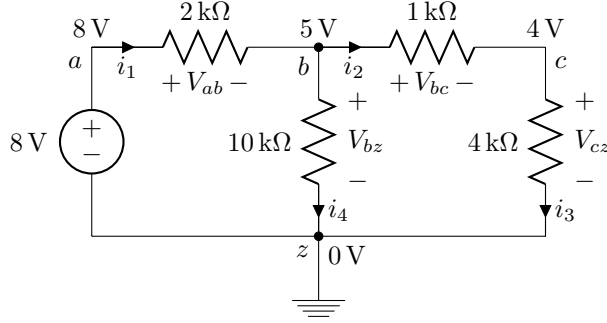
گزشتہ باب میں سادہ ترین ادوار کو کرخوف قوانین سے حل کرنا دکھایا گیا۔اس باب میں متعدد جوڑ اور متعدد دائروں والے ادوار کو کرخوف قوانین سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔کرخوف قانون رو سے ہر جوڑ پر داخلی اور خارجی رو کے مجموعہ کو برابر پر کرتے ہوئے دور کے تمام جوڑوں پر دباو حاصل کیا جاتا ہے۔اس کے برعکس کرخوف قانون دباو کی مدد سے دور کے ہر دائرے میں دباو کے گھٹاو کے مجموعے کو دائرے میں دباو کے بڑھنے کے مجموعے کے برابر پر کرتے ہوئے تمام دائروں کی رو حاصل کی جاتی ہے۔عموماً دور یا تو کرخوف قانون دباو اور یا کرخوف قانون رو سے زیادہ آسانی سے حل ہوتا ہے۔آسان طریقہ چننا اس باب میں سکھایا جائے گا۔

3.1 تجزیہ جوڑ

دور کو ترکیب جوڑ[1] سے حل کرتے ہوئے جوڑ کے دباو کو نا معلوم متغیرات چنا جاتا ہے۔کسی ایک جوڑ کو حوالہ چنتے ہوئے بقایا جوڑ کے دباو اس جوڑ سے ناپے جاتے ہیں۔یوں جس جوڑ کو حوالہ چنا گیا ہو، اس کے دباو کو صفر وولٹ تصور کیا جاتا ہے اور اس جوڑ کو برقی زمین کہا جاتا ہے۔عموماً اس جوڑ کو برقی زمین چنا جاتا ہے جس کے ساتھ سب سے زیادہ پرزے جڑے ہوں۔عموماً آلات کو موصل ڈبوں میں بند رکھا جاتا ہے اور عام طور دور کے برقی زمین کو ڈبے کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ایسی صورت میں ڈبے کی سطح بھی $0\,\mathrm{V}$ پر ہوتی ہے۔

ہم دباو جوڑ کے متغیرات کو مثبت تصور کریں گے۔حقیقی دباو کی قیمت زمین کی نسبت سے منفی ہونے کی صورت میں تجزیے سے منفی قیمت حاصل ہو گی۔

---

[1] nodal analysis

شکل 3.1: دباو جوڑ سے باز و کی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

آئیں دباو جوڑ جاننے کی افادیت کو شکل 3.1 کی مدد سے جانیں۔اس دور میں a ، b ، c اور z جوڑ پائے جاتے ہیں۔ہم نے جوڑ z کو برقی زمین چنا ہے لٰہذا اس کا دباو $0\,\mathrm{V}$ ہے۔بقایا تین جوڑ کے دباو کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔برقی زمین کو علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بالائی بائیں مزاحمت پر دباو درج ذیل پایا جاتا ہے

$$\begin{aligned}V_{ab} &= V_a - V_b\\ &= 8-5\\ &= 3\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

لٰہذا قانون اوہم سے مزاحمت میں رو درج ذیل حاصل کی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{V_{ab}}{2\,\mathrm{k\Omega}}\\ &= \frac{3}{2000}\\ &= 1.5\,\mathrm{mA}\end{aligned}$$

اسی طرح بالائی دائیں مزاحمت پر دباو درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}V_{bc} &= V_b - V_c\\ &= 5-4\\ &= 1\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

جس سے رو

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \frac{V_{bc}}{1\,\mathrm{k\Omega}}\\
&= \frac{1}{1000}\\
&= 1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتی ہے۔درمیانے مزاحمت پر دباو اور اس کی رو درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_{bz} &= V_b - V_z\\
&= 5 - 0\\
&= 5\,\mathrm{V}\\
i_4 &= \frac{V_{bz}}{10\,\mathrm{k\Omega}}\\
&= \frac{5}{10000}\\
&= 0.5\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

چونکہ $1\,\mathrm{k\Omega}$ اور $4\,\mathrm{k\Omega}$ سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا $4\,\mathrm{k\Omega}$ میں بھی $1\,\mathrm{mA}$ رو پائی جائے گی۔آپ اسی قیمت کو دباو جوڑ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
V_{cz} &= V_c - V_z\\
&= 4 - 0\\
&= 4\,\mathrm{V}\\
i_3 &= \frac{V_{cz}}{4\,\mathrm{k\Omega}}\\
&= \frac{4}{4000}\\
&= 1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

یہاں اطمنان کر لیں کہ تمام جوڑوں پر آمدی رو اور خارجی رو برابر ہوں۔جوڑ b پر آمدی رو $1.5\,\mathrm{mA}$ ہے جو خارجی رو کے مجموعے $1\,\mathrm{mA} + 0.5\,\mathrm{mA}$ کے عین برابر ہے۔اسی طرح جوڑ c پر آمدی اور خارجی رو $1\,\mathrm{mA}$ ہیں۔جوڑ a پر کرخوف قانون رو سے منبع دباو کے مثبت سرے سے خارجی رو $1.5\,\mathrm{mA}$ حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی دو جوڑ m اور n کے مابین جڑی مزاحمت R_{mn} کی رو i_R قانون اوہم

$$
i_R = \frac{v_m - v_n}{R_{mn}} \tag{3.1}
$$

سے حاصل کی جاتی ہے۔

اب جب ہم دباو جوڑ کی افادیت جان چکے ہیں آئیں ترکیب جوڑ پر غور کریں۔اگر دور میں J جوڑ پائے جاتے ہوں تب ہمیں J دباو دریافت کرنے ہوں گے۔کسی ایک جوڑ کو زمین چنتے ہوئے اس کا دباو $0\,\mathrm{V}$ تصور کیا جاتا ہے۔یوں بقایا $J-1$ جوڑ کے دباو کو نا معلوم متغیرات تصور کیا جاتا ہے۔ان $J-1$ جوڑ پر کرخوف قانون رو کا اطلاق کرتے ہوئے $J-1$ مساوات لکھے جاتے ہیں۔آپ جانتے ہیں ہیں کہ $J-1$ متغیرات معلوم کرنے کی خاطر $J-1$ ہمزاد مساوات درکار ہیں۔یوں ان $J-1$ ہمزاد مساوات کے حل سے تمام نا معلوم دباو جوڑ حاصل ہوتے ہیں۔کسی بھی جوڑ پر کروخوف کی مساوات لکھتے ہوئے جوڑ سے منسلک تمام بازو کی رو کو مساوات 3.1 کی طرز پر لکھا جاتا ہے۔یوں مزاحمت جانتے ہوئے، رو کو نا معلوم دباو کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔اس طرح کرخوف قانون رو کی مساوات میں صرف نا معلوم دباو بطور متغیرات پائے جائیں گے۔

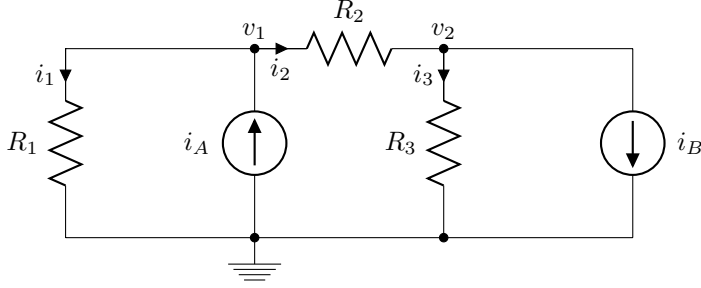
یاد رہے کہ برقی دباو دو نقطوں کے مابین ہوتا ہے۔کسی نقطے کی مطلق دباو کوئی معنی نہیں رکھتی۔جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہوئے جوڑ کا دباو زمین کے حوالے سے ناپا جاتا ہے۔ یوں شکل 3.1 میں جوڑ a کا دباو جوڑ z کے حوالے سے $8\,\mathrm{V}$ ہے اور جوڑ b کا دباو جوڑ z کے حوالے سے $5\,\mathrm{V}$ ہے۔اس کے برعکس جوڑ b کے حوالے سے جوڑ a کا دباو $3\,\mathrm{V}$ ہے جبکہ جوڑ a کے حوالے سے جوڑ c کا دباو $-4\,\mathrm{V}$ اور جوڑ z کا دباو $-8\,\mathrm{V}$ ہے۔

آئیں ترکیب جوڑ کو چند مثالوں کی مدد سے سیکھیں۔ہم آسان ترین مثال سے شروع کرتے ہوئے بتدریج مشکل مثال پیش کریں گے۔

3.2 غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار

شکل 3.2 میں تین جوڑ والا دور دکھایا گیا ہے جن میں نچلے جوڑ کو زمین چنا گیا ہے۔بقایا دو جوڑ کے نا معلوم برقی دباو کو متغیرات v_1 اور v_2 ظاہر کرتے ہیں۔ہم تمام شاخوں میں رو کی سمت چنتے ہیں۔یوں i_1 کو بالائی بائیں جوڑ سے زمین کی جانب رواں چنا گیا ہے۔اسی طرح i_2 کو بالائی بائیں جوڑ سے بالائی دائیں جوڑ کی جانب رواں چنا گیا ہے جبکہ i_3 کو بالائی دائیں جوڑ سے زمین کی طرف رواں چنا گیا ہے۔

بالائی بائیں جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہیں۔جوڑ سے خارجی رو کو مثبت اور داخلی رو کو منفی لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i_1 - i_A + i_2 = 0 \tag{3.2}$$

شکل 3.2: تین جوڑ والا دور۔

قانون اوہم استعمال کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{v_1}{R_1} - i_A + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

یا

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} = i_A \tag{3.3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ بالائی دائیں جوڑ کے لئے

$$-i_2 + i_3 + i_B = 0 \tag{3.4}$$

اور

$$-\left(\frac{v_1 - v_2}{R_2}\right) + \frac{v_2}{R_3} + i_B = 0$$

یعنی

$$-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_2 = -i_B \tag{3.5}$$

لکھا جائے گا۔ نچلے جوڑ یعنی برقی زمین پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$-i_1 + i_A - i_3 - i_B = 0 \tag{3.6}$$

مساوات 3.2 اور مساوات 3.4 کے مجموعے کو منفی ایک سے ضرب دینے سے مساوات 3.6 حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.2، مساوات 3.4 اور مساوات 3.6 میں کسی بھی دو مساواتوں سے تیسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں

ان میں صرف دو عدد مساوات آزاد مساوات ہیں جبکہ تیسری مساوات تابع مساوات ہے۔شکل 3.2 کے دور میں کل تین عدد جوڑ ہیں۔آپ نے دیکھا کہ اس دور سے صرف دو عدد آزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں یعنی $J = 3$ کی صورت میں $J - 1 = 2$ آزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 3.3 اور مساوات 3.5 کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_1-\frac{v_2}{R_2}&=i_A\\ -\frac{v_1}{R_2}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_2&=-i_B \end{aligned} \tag{3.7}$$

مثال 3.1: شکل 3.2 میں $i_A = 2\,\mathrm{mA}$ ، $i_B = 5\,\mathrm{mA}$ ، $R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$ ، $R_2 = 6\,\mathrm{k\Omega}$ اور $R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ ہیں۔تمام جوڑ پر دباو اور تمام شاخوں میں رو حاصل کریں۔

حل:مساوات 3.7 میں قیمتیں پُر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4000}+\frac{1}{6000}\right)v_1-\frac{v_2}{6000}&=0.002\\ -\frac{v_1}{6000}+\left(\frac{1}{6000}+\frac{1}{2000}\right)v_2&=-0.005 \end{aligned}$$

ان کی سادہ ترین صورت حاصل کرتے اور ترتیب دیتے ہوئے دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 5v_1-2v_2&=24\\ -v_1+4v_2&=-30 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر پہلی مساوات سے $v_1 = \frac{24+2v_2}{5}$ لکھتے ہوئے دوسری مساوات میں پُر کر کے

$$-\left(\frac{24+2v_2}{5}\right)+4v_2=-30$$

حل کرتے ہیں۔

$$v_2=-7\,\mathrm{V}$$

اس قیمت کو $v_1 = \frac{24+2v_2}{5}$ میں پُر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$v_1 = 2\,\mathrm{V}$$

دباو جوڑ جانتے ہوئے شاخوں کی رو قانون اوہم سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1}{R_1} = \frac{2}{4000} = 0.5\,\mathrm{mA} \\ i_2 &= \frac{v_1 - v_2}{R_2} = \frac{2-(-7)}{6000} = 1.5\,\mathrm{mA} \\ i_3 &= \frac{v_2}{R_3} = \frac{-7}{2000} = -3.5\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

مساوات 3.7 کو قالبی مساوات[2] کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

قالبی مساوات میں

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

لیتے ہوئے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\mathbf{G}\mathbf{V} = \mathbf{I}$$

جس سے

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{I}$$

---

[2] matrix equation

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

لکھا جائے گا۔

آج کل کمپیوٹر کا زمانہ ہے۔کمپیوٹر کی مدد سے قالبی مساوات نہایت آسانی سے حل کئے جا سکتے ہیں۔آپ سے التماس ہے کہ کمپیوٹر پر قالبی مساوات حل کرنا سیکھیں۔

مثال 3.2: درج بالا مثال میں تمام دباو جوڑ کو مساوات 3.9 کی مدد سے حل کریں۔

حل:مساوات 3.9 میں دی معلومات پر کرتے ہوئے لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2400} & -\frac{1}{6000} \\ -\frac{1}{6000} & \frac{1}{1500} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.005 \end{bmatrix}$$

قالب $\mathbf{G}$ کا معکوس[3] $\mathbf{G}^{-1}$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{G}$ کا تبدیل محل قالب[4] $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{1500} & \frac{1}{6000} \\ \frac{1}{6000} & \frac{1}{2400} \end{bmatrix}$$

اور مقطع قالب[5]

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{2400} & -\frac{1}{6000} \\ -\frac{1}{6000} & \frac{1}{1500} \end{vmatrix} &= \left(\frac{1}{2400}\right)\left(\frac{1}{1500}\right) - \left(-\frac{1}{6000}\right)\left(-\frac{1}{6000}\right) \\ &= \frac{1}{4 \times 10^6} \end{aligned}$$

---

[3] inverse
[4] transpose matrix
[5] determinant

درکار ہوں گے۔یوں

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= 4 \times 10^6 \begin{bmatrix} \frac{1}{1500} & \frac{1}{6000} \\ \frac{1}{6000} & \frac{1}{2400} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.005 \end{bmatrix} \\
&= 4 \times 10^6 \begin{bmatrix} 0.5 \times 10^{-6} \\ -1.75 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں یعنی $v_1 = 2\,\text{V}$ اور $v_2 = -7\,\text{V}$ ہیں۔

آئیں شکل 3.3 کے کرخوف قانون رو کے مساوات لکھیں۔دور کے تمام شاخوں میں رو کی سمتیں چنی گئی ہیں۔نچلے جوڑ کو زمین چنا گیا ہے اور یہی حقیقت زمین کی علامت سے ظاہر کی گئی ہے۔دور میں کل چار $(J = 4)$ عدد جوڑ ہیں لہٰذا اس سے تین $(J - 1 = 3)$ عدد آزاد مساوات حاصل کئے جائیں گے۔پہلی جوڑ پر کرخوف قانون رو استعمال کرتے ہوئے

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_A = 0$$

لکھا جائے گا جہاں جوڑ سے خارج رو کو مثبت لکھا گیا ہے۔انفرادی شاخ کی رو کو قانون اوہم سے پُر کرتے ہوئے

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_1 - v_3}{R_3} + i_A = 0$$

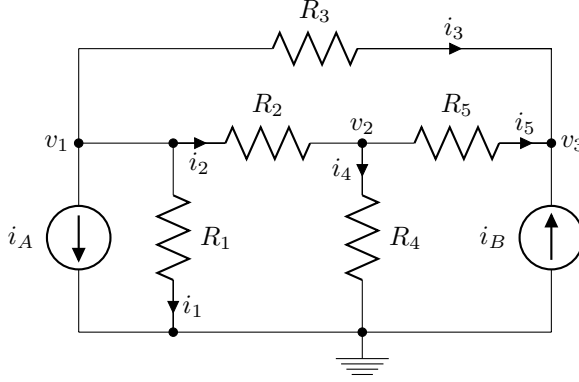
یعنی

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = -i_A \tag{3.10}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسرے جوڑ سے

$$-i_2 + i_4 + i_5 = 0$$

یعنی

$$-\left(\frac{v_1 - v_2}{R_2}\right) + \frac{v_2}{R_4} + \frac{v_2 - v_3}{R_5} = 0$$

شکل 3.3: چار جوڑ کے دور سے تین عدد آزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

یا

$$-\frac{v_1}{R_2}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)v_2-\frac{v_3}{R_5}=0 \tag{3.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تیسری جوڑ سے

$$-i_3-i_5-i_B=0$$

یعنی

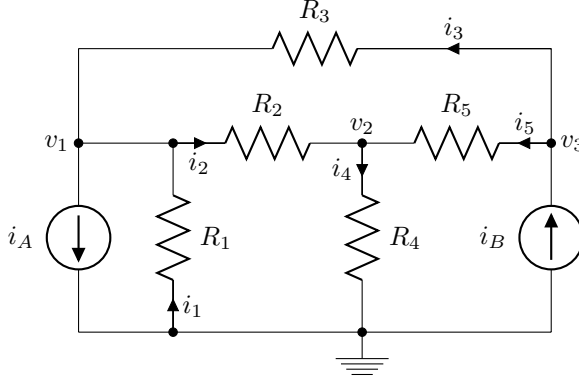
$$-\left(\frac{v_1-v_3}{R_3}\right)-\left(\frac{v_2-v_3}{R_5}\right)-i_B=0$$

یا

$$-\frac{v_1}{R_3}-\frac{v_2}{R_5}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)v_3=i_B \tag{3.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 3.10، مساوات 3.11 اور مساوات 3.12 کو اکٹھے لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_1-\frac{v_2}{R_2}-\frac{v_3}{R_3}&=-i_A\\ -\frac{v_1}{R_2}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)v_2-\frac{v_3}{R_5}&=0\\ -\frac{v_1}{R_3}-\frac{v_2}{R_5}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)v_3&=i_B\end{aligned} \tag{3.13}$$

شکل 3.4: مزاحمتوں اور آزاد منبع رو کی قالبی مساوات رو کی چنی سمتوں پر منحصر نہیں۔

قالبی مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_A \\ 0 \\ i_B \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

مندرجہ بالا مساوات کا دایاں بازو منبع رو سے جوڑ میں داخل رو دیتی ہے جبکہ اس کا بایاں بازو جوڑ سے خارجی رو دیتی ہے۔

شکل 3.3 کو دوبارہ شکل 3.4 میں پیش کیا گیا ہے جہاں i_1 ، i_3 اور i_5 کی سمتیں گزشتہ سمتوں کے الٹ چنی گئی ہیں۔ تین جوڑ کے مساوات درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\begin{aligned} i_A - i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \\ -i_2 + i_4 - i_5 &= 0 \\ i_3 + i_5 - i_B &= 0 \end{aligned}$$

شاخوں کی رو قانون اوہم سے پُر کرتے ہوئے درج بالا کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} i_A - \left(\frac{0-v_1}{R_1}\right) + \frac{v_1-v_2}{R_2} - \left(\frac{v_3-v_1}{R_3}\right) &= 0 \\ -\left(\frac{v_1-v_2}{R_2}\right) + \frac{v_2}{R_4} - \left(\frac{v_3-v_2}{R_5}\right) &= 0 \\ \frac{v_3-v_1}{R_3} + \frac{v_3-v_2}{R_5} - i_B &= 0 \end{aligned}$$

جنہیں ترتیب دینے سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_1-\frac{v_2}{R_2}-\frac{v_3}{R_3}=-i_A \tag{3.15}$$

$$-\frac{v_1}{R_2}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)v_2-\frac{v_3}{R_5}=0 \tag{3.16}$$

$$-\frac{v_1}{R_3}-\frac{v_2}{R_5}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)v_3=i_B \tag{3.17}$$

اس کو قالبی مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3}\\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5}\\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i_A\\ 0\\ i_B\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

مساوات 3.14 اور مساوات 3.18 بالکل یکساں ہیں۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قالبی مساوات کا دارومدار شاخوں میں رو کی چنی گئی سمتوں پر منحصر نہیں ہوتا۔اس کتاب میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہوئے مزاحمتی شاخوں میں رو کی سمت جوڑ سے خارج ہوتی تصور کریں گے۔آئیں اس ترکیب کو شکل 3.5 کی مدد سے سمجھیں۔

شکل 3.5-الف میں پہلے جوڑ پر تمام مزاحمتی شاخوں کی رو خارجی تصور کرتے ہوئے کرخوف قانون رو کے تحت خارجی رو کا مجموعہ داخلی رو کے مجموعے کے برابر پُر کرنے سے

$$i_1+i_2=i_A \tag{3.19}$$

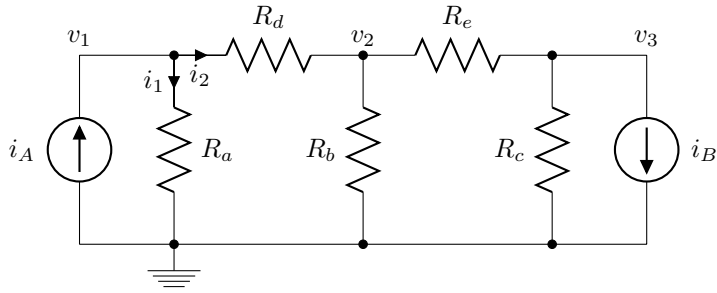
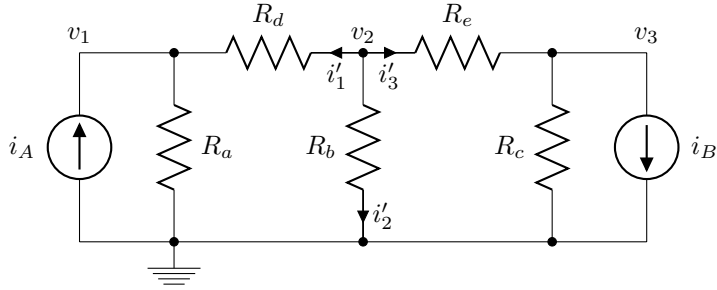
یعنی

$$\frac{v_1}{R_a}+\frac{v_a-v_b}{R_d}=i_A \tag{3.20}$$

حاصل ہوتا ہے۔شکل 3.5-ب میں دوسرے جوڑ پر تمام مزاحمتی رو کی سمت خارجی تصور کی گئی ہیں یوں

$$i_1'+i_2'+i_3'=0 \tag{3.21}$$

یعنی

$$\frac{v_2-v_1}{R_d}+\frac{v_2}{R_b}+\frac{v_2-v_3}{R_e}=0 \tag{3.22}$$

شکل 3.5: تمام جوڑ پر مزاحمتی شاخوں میں رو کی سمت جوڑ سے خارج ہوتی تصور کر سکتے ہیں۔

لکھا جا سکتا ہے۔تیسرے جوڑ پر یہی ترکیب استعمال کرتے ہیں۔ہر جوڑ پر رو کی سمت شکل پر دکھانا ضروری نہیں ہے لہٰذا تیسرے جوڑ پر i_1'' اور i_2'' دکھانا ضروری نہیں ہے۔ساتھ ہی ساتھ ہر مرتبہ مساوات 3.19 اور مساوات 3.21 کے طرز پر مساوات لکھنے کی بھی ضرورت نہیں ہے بلکہ دل ہی دل میں جوڑ پر تمام مزاحمتی شاخوں کی رو خارجی تصور کرتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 3.20 اور مساوات 3.22 کے طرز پر مساوات لکھے جا سکتے ہیں۔تیسرے جوڑ پر ایسا ہی کرتے ہوئے درج ذیل مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{v_3 - v_2}{R_e} + \frac{v_3}{R_c} + i_B = 0 \tag{3.23}$$

اس کتاب میں ہم مساوات 3.23 کی طرح جوڑ پر کرخوف قانون رو کے مساوات لکھیں گے۔

مساوات 3.18 اور مساوات 3.14 میں قالبِ موصلیت[6] G کے بالائی بائیں کونے سے نچلے دائیں کونے تک ترچھی لکیر کے بالائی اور نچلی اطراف پر یکساں رکن پائے جاتے ہیں۔ایسا اتفاقی طور پر نہیں ہے بلکہ مزاحمتوں اور آزاد منبع رو پر مبنی کسی بھی دور کے G قالب کو تشاکل صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔آئیں ان قالبوں پر مزید غور کریں۔

شکل 3.4 میں پہلے جوڑ کا دباو v_1 ، دوسرے جوڑ کا دباو v_2 اور تیسرے جوڑ کا دباو v_3 ہے۔قالب میں بالائی یعنی پہلے صف کے رکن مساوات 3.15 سے حاصل کئے گئے۔یہ مساوات پہلی جوڑ سے حاصل کی گئی ہے۔اس جوڑ پر مزاحمت R_1 ، R_2 اور R_3 جڑے ہیں۔ان مزاحمتوں کو متوازی جڑا تصور کرتے ہوئے مساوی مزاحمت R_{m1}

$$\frac{1}{R_{m1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{R_{m1}}$ کو مساوی متوازی موصلیت G_{m1} کہا جاتا ہے۔یوں قالب کے پہلے صف کا پہلا (بایاں) رکن پہلے جوڑ سے جڑے تمام مزاحمتوں کا مساوی متوازی موصلیت $\frac{1}{R_{m1}}$ ہے۔اسی صف کا دوسرا رکن پہلے جوڑ اور دوسرے جوڑ کے مابین جڑے مزاحمت کی موصلیت کا منفی $-\frac{1}{R_2}$ کے برابر ہے۔اسی طرح پہلے صف کا تیسرا رکن، پہلے جوڑ اور تیسرے جوڑ کے مابین جڑے موصلیت کے منفی $-\frac{1}{R_3}$ کے برابر ہے۔قالب کے دوسرے صف کے ارکان مساوات 3.16 سے حاصل کئے گئے۔اس صف کا پہلا رکن پہلے اور دوسرے جوڑ کے مابین مساوی متوازی موصلیت کے منفی $-\frac{1}{R_2}$ کے برابر ہے۔صف کا دوسرا رکن دوسرے جوڑ پر تمام مزاحمتوں کا مساوی متوازی موصلیت $\frac{1}{R_{m2}}$

$$\frac{1}{R_{m2}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

[6] conductance matrix

ہے جبکہ صف کا تیسرا رکن دوسرے اور تیسرے جوڑ کے مابین موصلیت کے منفی $-\frac{1}{R_3}$ کے برابر ہے۔ قالب کا تیسرا صف بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ قالبی مساوات میں دائیں ہاتھ قالبِ رو[7] کے ارکان بالترتیب پہلے، دوسرے اور تیسرے جوڑ پر جڑے منبع رو سے جوڑ میں داخل ہوتی رو ہے۔ منبع رو کی غیر موجودگی میں قالب کے رکن کو صفر لکھا جاتا ہے۔ کسی بھی جوڑ پر ایک سے زیادہ منبع رو کی صورت میں جوڑ پر مجموعی داخلی رو، قالب کی رکن ہو گی۔ پہلی جوڑ پر منبع کی رو i_A ہے جو جوڑ سے خارجی جانب ہے لہٰذا اسے قالب رو میں $-i_A$ لکھا گیا ہے۔ دوسرے جوڑ پر کوئی منبع رو نسب نہیں لہٰذا قالب کا دوسرا رکن صفر ہے۔ تیسرے جوڑ پر منبع i_B کی رو جوڑ میں داخل ہوتی ہے لہٰذا قالب رو کا تیسرا رکن i_B ہے۔

ان معلومات کی مدد سے مزاحمت اور منبع رو پر مبنی $J+1$ جوڑ کے دور کی قالبی مساوات دور کو دیکھ کر درج ذیل صورت میں لکھی جا سکتی ہے

$$\begin{bmatrix} +G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \cdots & -G_{1J} \\ -G_{21} & +G_{22} & -G_{23} & \cdots & -G_{2J} \\ -G_{31} & -G_{32} & +G_{33} & \cdots & -G_{3J} \\ \vdots & & & & \\ -G_{J1} & -G_{J2} & -G_{J3} & \cdots & +G_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_J \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

جہاں G_{nn} سے مراد جوڑ n کے ساتھ منسلک تمام مزاحمتوں کی مساوی متوازی موصلیت جبکہ G_{nm} سے مراد جوڑ n اور m کے مابین مزاحمت کی موصلیت ہے۔ یہ مساوات لکھتے ہوئے جوڑ $J+1$ کو زمین چنا گیا ہے۔ اگر جوڑ n اور جوڑ m کے مابین مزاحمت R_{nm} جڑی ہو تب جوڑ m اور جوڑ n کے مابین بھی یہی مزاحمت جڑی ہو گی لہٰذا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$G_{nm} = G_{mn} \tag{3.25}$$

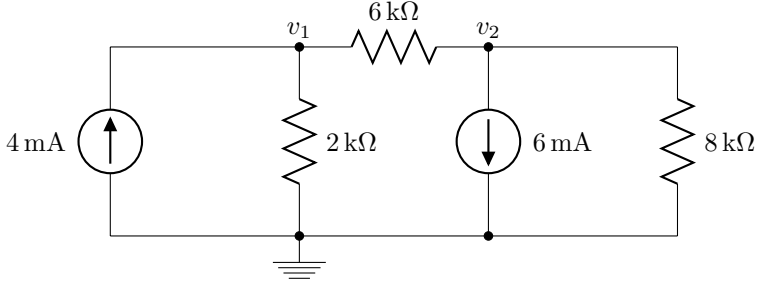
ہو گا اور یوں مساوات 3.24 کو درج ذیل صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{bmatrix} +G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \cdots & -G_{1J} \\ -G_{12} & +G_{22} & -G_{23} & \cdots & -G_{2J} \\ -G_{13} & -G_{23} & +G_{33} & \cdots & -G_{3J} \\ \vdots & & & & \\ -G_{1J} & -G_{2J} & -G_{3J} & \cdots & +G_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_J \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

جس میں $\mathbf{G}$ کا قالب تشاکل ہے۔

---

[7] current matrix

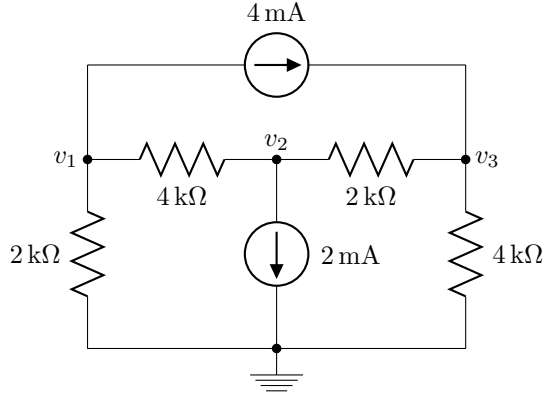
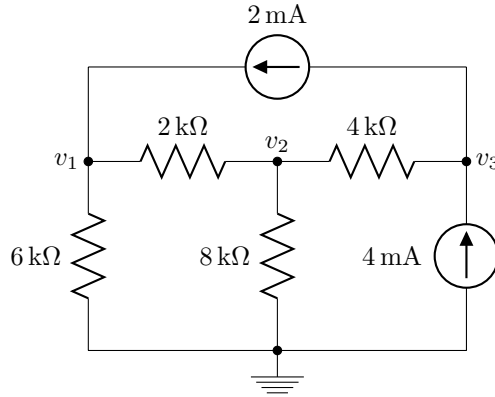
مشق 3.1: شکل 3.6 میں v_1 اور v_2 پر کرخوف قانون رو کے مساوات لکھتے ہوئے دور کی قالبی مساوات حاصل کریں۔ قالبی مساوات حل کرتے ہوئے نا معلوم دباو دریافت کریں۔

شکل 3.6: مشق 3.1 کا دور۔

جوابات: $v_1 = 1\,\mathrm{V}$ ، $v_2 = -20\,\mathrm{V}$

مشق 3.2: شکل 3.7 کی قالبی مساوات لکھتے ہوئے نا معلوم دباو حاصل کریں۔

جوابات: $v_1 = -6\,\mathrm{V}$ ، $v_2 = -2\,\mathrm{V}$ ، $v_3 = 4\,\mathrm{V}$

مشق 3.3: شکل 3.8 کی قالبی مساوات لکھتے ہوئے نا معلوم دباو حاصل کریں۔

جوابات: $v_1 = 13.5\,\mathrm{V}$ ، $v_2 = 14\,\mathrm{V}$ ، $v_3 = 22\,\mathrm{V}$

شکل 3.7: مشق 3.2 کا دور۔

شکل 3.8: مشق 3.3 کا دور۔

3.3 تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ غیر تابع منبع رو اور مزاحمتوں کے ادوار سے تشاکل قالب موصلیت حاصل ہوتے ہے۔شکل 3.9 میں تابع منبع رو استعمال کی گئی ہے۔ہم دیکھیں گے کہ اس کا $\mathbf{G}$ قالب غیر تشاکل ہو گا۔اس دور

کے تین جوڑوں سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
-\beta i_0 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} &= 0 \\
\frac{v_2 - v_1}{R_2} - i_A + \frac{v_2 - v_3}{R_4} &= 0 \\
\frac{v_3}{R_3} + \beta i_0 + \frac{v_3 - v_2}{R_4} &= 0
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

جہاں

$$
i_0 = \frac{v_1}{R_1} \tag{3.28}
$$

کے برابر ہے۔مساوات 3.27 میں مساوات 3.28 پُر کرتے اور ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

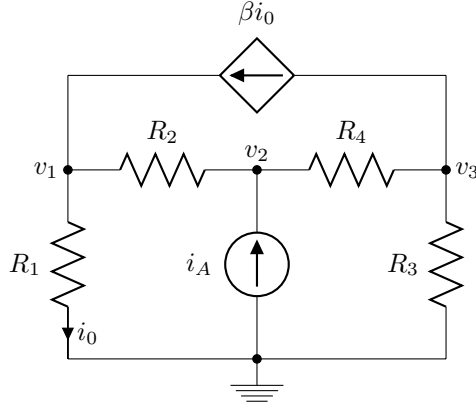
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_1}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} &= 0 \\
-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) v_2 - \frac{v_3}{R_4} &= i_A \\
\frac{\beta}{R_1} v_1 - \frac{v_2}{R_4} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) v_3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.29}
$$

جسے قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\
-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4} \\
\frac{\beta}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ i_A \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.30}
$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\mathbf{G}$ قالب غیر تشاکل ہے۔

مثال 3.3: شکل 3.9 میں تمام جوڑ پر برقی دباو حاصل کریں۔معلومات درج ذیل ہیں۔

$$
R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 4\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad i_A = 10\,\mathrm{mA}, \quad \beta = 4
$$

شکل 3.9: تابع منبع رو سے غیر تشاکل قالب موصلیت حاصل ہوتا ہے۔

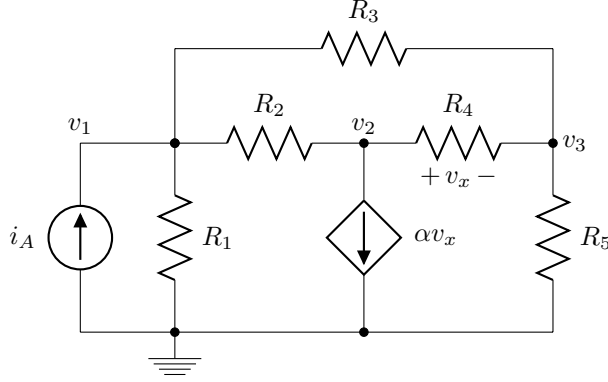
حل: درج بالا معلومات کو مساوات 3.30 میں پُر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2000}+\frac{1}{4000}-\frac{4}{2000} & -\frac{1}{4000} & 0 \\ -\frac{1}{4000} & \frac{1}{4000}+\frac{1}{2000} & -\frac{1}{2000} \\ \frac{\beta}{2000} & -\frac{1}{2000} & \frac{1}{1000}+\frac{1}{2000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اس قالبی مساوات کو حل کرتے ہوئے اور یا تینوں ہمزاد مساوات کو کسی بھی طریقے سے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v_1 &= -4\,\mathrm{V} \\ v_2 &= 20\,\mathrm{V} \\ v_3 &= 12\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

مثال 3.4: شکل 3.10 میں تمام نا معلوم دباو حاصل کریں۔دیگر معلومات درج ذیل ہیں۔

$$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 8\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_3 = 12\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_4 = 6\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$$
$$i_A = 1\,\mathrm{mA}, \quad \alpha = 0.002$$

شکل 3.10: مثال 3.4 کا دور۔

حل: تمام جوڑ پر خارجی رو تصور کرتے ہوئے مساوات لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\frac{v_1}{R_1}+\frac{v_1-v_2}{R_2}+\frac{v_1-v_3}{R_3}&=i_A\\
\frac{v_2-v_1}{R_2}+\alpha v_x+\frac{v_2-v_3}{R_4}&=0\\
\frac{v_3-v_1}{R_3}+\frac{v_3-v_2}{R_4}+\frac{v_3}{R_5}&=0
\end{aligned}
$$

اس میں $v_x=v_2-v_3$ پُر کرتے اور مساوات کے اجزاء کو ترتیب دیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_1-\frac{v_2}{R_2}-\frac{v_3}{R_3}&=i_A\\
-\frac{v_1}{R_2}+\left(\frac{1}{R_2}+\alpha+\frac{1}{R_4}\right)v_2-(\alpha+\frac{1}{R_4})v_3&=0\\
-\frac{v_1}{R_3}-\frac{v_2}{R_4}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)v_3&=0
\end{aligned}
$$

دی گئی معلومات پُر کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4000}+\frac{1}{8000}+\frac{1}{12000}\right)v_1-\frac{v_2}{8000}-\frac{v_3}{12000}&=0.001\\
-\frac{v_1}{8000}+\left(\frac{1}{8000}+0.002+\frac{1}{6000}\right)v_2-(0.002+\frac{1}{6000})v_3&=0\\
-\frac{v_1}{12000}-\frac{v_2}{6000}+\left(\frac{1}{12000}+\frac{1}{6000}+\frac{1}{2000}\right)v_3&=0
\end{aligned}
$$

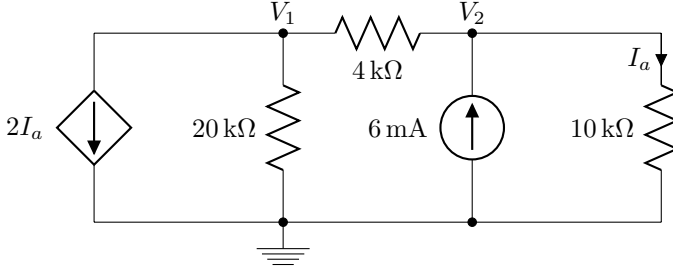
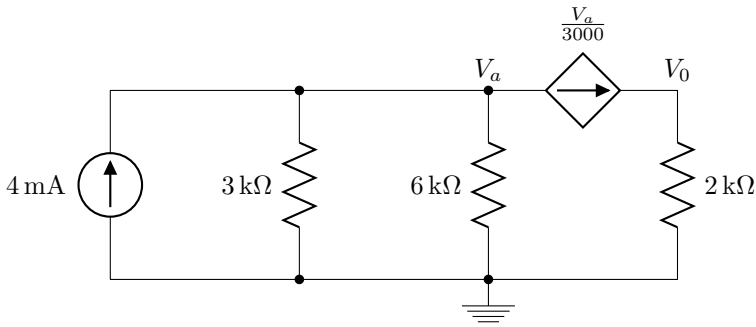
تینوں ہمزاد مساواتوں کو 1000 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{11v_1}{24}-\frac{v_2}{8}-\frac{v_3}{12}&=1\\
-\frac{v_1}{8}+\frac{55v_2}{24}-\frac{13v_3}{6}&=0\\
-\frac{v_1}{12}-\frac{v_2}{6}+\frac{3v_3}{4}&=0
\end{aligned}
$$

انہیں حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
v_1&=2.38\,\mathrm{V}\\
v_2&=0.48\,\mathrm{V}\\
v_3&=0.37\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

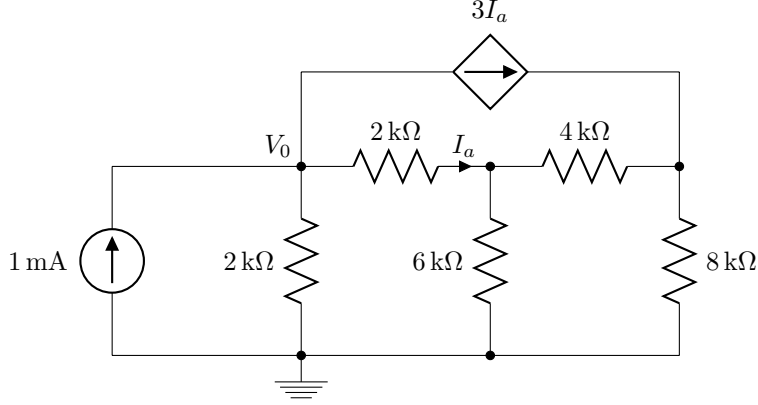
مشق 3.4: شکل 3.11 میں نا معلوم دباو جوڑ V_1 اور V_2 دریافت کریں۔

جوابات: $V_1=\frac{120}{37}\,\mathrm{V}$ ، $V_2=\frac{720}{37}\,\mathrm{V}$

شکل 3.11: مشق 3.4 کا دور۔

شکل 3.12: مشق 3.5 کا دور۔

مشق 3.5: شکل 3.12 میں نا معلوم دباو جوڑ V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = \frac{16}{5}\,\mathrm{V}$

مشق 3.6: شکل 3.13 میں نا معلوم دباو جوڑ V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = \frac{14}{11}\,\mathrm{V}$

شکل 3.13: مشق 3.6 کا دور۔

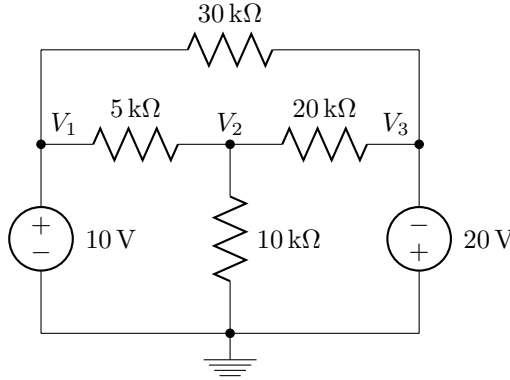
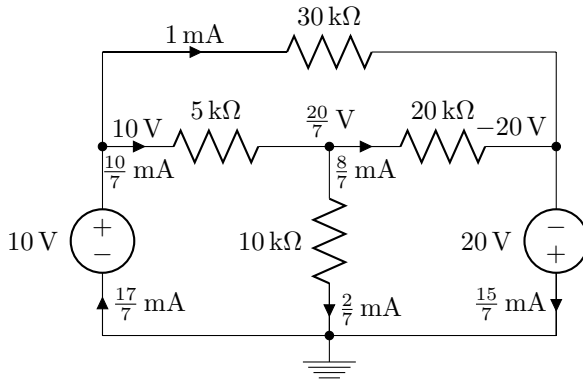
3.4 غیر تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار

گزشتہ حصوں کی طرح اس حصے کو بھی سادہ ترین مثال سے شروع کرتے ہیں۔ بعد میں بتدریج مشکل مثال پیش کئے جائیں گے۔ سب سے پہلے ایک مثال کی مدد سے ایسے دور پر غور کرتے ہیں جس میں غیر تابع منبع دباو کا ایک سرا برقی زمین کے ساتھ جڑا ہو۔ ایسے ادوار نسبتاً آسانی سے حل ہوتے ہیں۔

مثال 3.5: شکل 3.14-الف کے دور میں دو عدد غیر تابع منبع دباو استعمال کئے گئے ہیں۔ دونوں منبع زمین کے ساتھ جڑے ہیں۔ بالائی بایاں جوڑ $10\,\mathrm{V}$ منبع دباو کے مثبت سرے کے ساتھ جڑا ہے جبکہ بالائی دایاں جوڑ $20\,\mathrm{V}$ منبع دباو کے منفی سرے کے ساتھ جڑا ہے لہٰذا

$$V_1 = 10\,\mathrm{V}$$
$$V_2 = -20\,\mathrm{V}$$

ہیں۔ بالائی درمیانے جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مدد سے

$$\frac{V_2 - 10}{5000} + \frac{V_2}{10000} + \frac{V_2 - (-20)}{20000} = 0$$

شکل 3.14: مثال 3.5 کا دور۔

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$V_2 = \frac{20}{7}\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔

دباو جوڑ جاننے کے بعد تمام پرزوں میں رو دریافت کی جا سکتی ہے۔یوں بالترتیب $5\,\mathrm{k\Omega}$ ، $10\,\mathrm{k\Omega}$ ، $20\,\mathrm{k\Omega}$

اور $30\,\mathrm{k\Omega}$ کے مزاحمتوں میں اوہم کے قانون سے درج ذیل رو حاصل ہوتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\frac{V_1-V_2}{5000}&=\frac{10-\frac{20}{7}}{5000}=\frac{10}{7}\,\mathrm{mA}\\
\frac{V_2}{10000}&=\frac{\frac{20}{7}}{10000}=\frac{2}{7}\,\mathrm{mA}\\
\frac{V_2-V3}{20000}&=\frac{\frac{20}{7}-(-20)}{20000}=\frac{8}{7}\,\mathrm{mA}\\
\frac{V_1-V_3}{30000}&=\frac{10-(-20)}{30000}=1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

جہاں تمام رو کی سمتیں بائیں سے دائیں جانب ہیں۔ جوڑ V_1 پر کرخوف قانون رو سے $10\,\mathrm{V}$ منبع کی خارجی رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

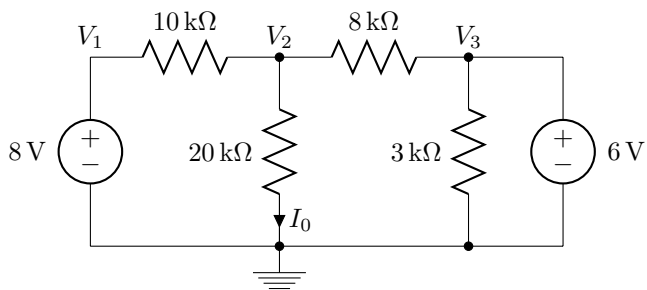
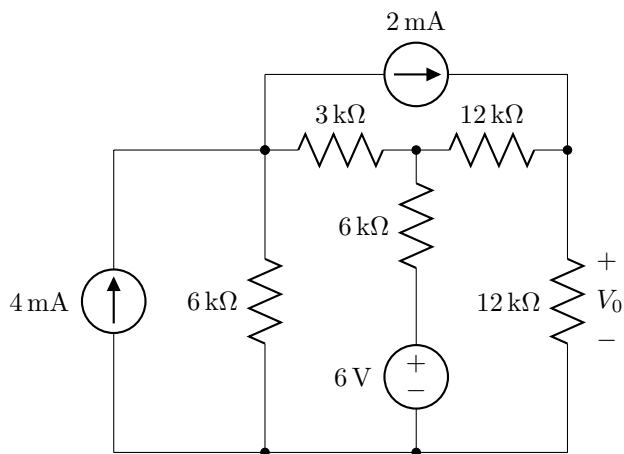
$$
I_{10\,\mathrm{V}}=\frac{10}{7}\,\mathrm{mA}+1\,\mathrm{mA}=\frac{17}{7}\,\mathrm{mA}
$$

اسی طرح دائیں منبع دباو کے منفی سرے پر داخلی رو یا مثبت سرے سے خارجی رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$
I_{20\,\mathrm{V}}=\frac{8}{7}\,\mathrm{mA}+1\,\mathrm{mA}=\frac{15}{7}\,\mathrm{mA}
$$

حاصل کردہ تمام رو کو شکل 3.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مشق 3.7: شکل 3.15 میں I_0 حاصل کریں۔

جواب: $I_0=0.282\,\mathrm{\mu A}$

شکل 3.15: مشق 3.7 کا دور۔

شکل 3.16: مشق 3.8 کا دور۔

مشق 3.8: شکل 3.16 میں V_0 دریافت کریں۔یاد رہے کہ آپ کسی بھی جوڑ کو برقی زمین چن سکتے ہیں۔

جواب: $V_0 = \frac{396}{23}\,\mathrm{V}$

آئیں اب ایسے دور کو حل کریں جس میں منبع دباو برقی زمین سے ہٹ کر دو جوڑوں کے درمیان جڑا ہو۔

مثال 3.6: شکل 3.17 میں $10\,\mathrm{V}$ کا منبع دباو زمین سے ہٹ کر دو جوڑوں کے درمیان نسب ہے۔گزشتہ تمام مثالوں میں جوڑ پر رو یا تو منبع رو سے اخذ کی جا سکتیں تھیں اور یا انہیں مزاحمتی شاخ پر قانون اوہم لاگو کرتے ہوئے اخذ کیا جا سکتا تھا۔موجودہ شکل میں جوڑ V_1 اور V_2 کے درمیان نہ تو منبع رو نسب ہے اور نہ ہی مزاحمت لہٰذا گزشتہ ترکیب یہاں قابل استعمال نہیں ہیں۔آپ سے گزارش ہے کہ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ دس وولٹ منبع دباو کی رو گزشتہ ترکیبوں سے دریافت نہیں کی جا سکتی۔

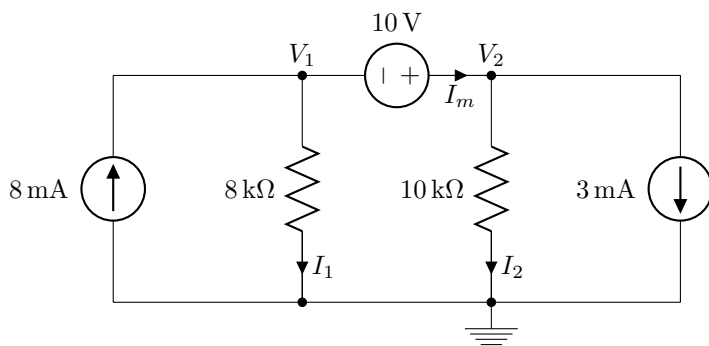
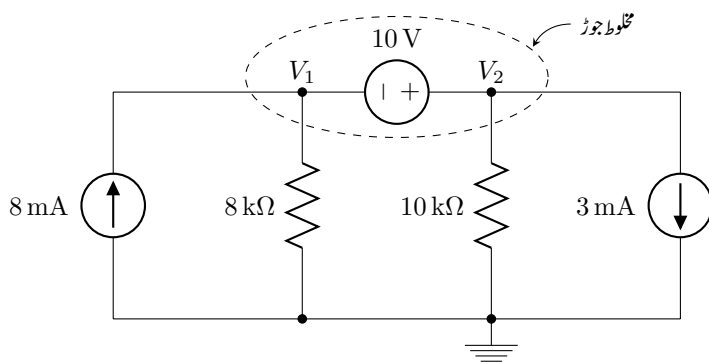
اب منبع دباو کی رو ہم نہ تو جانتے ہیں اور نہ ہی اسے کسی مساوات سے ظاہر کر سکتے ہیں لہٰذا جوڑ V_1 اور V_2 پر کرخوف قانون رو کے مساوات لکھنا ممکن نہیں ہے۔آپ جانتے ہیں کہ J متغیرات معلوم کرنے کی خاطر J ہمزاد مساوات درکار ہیں۔آئیں دیکھیں کہ جوڑ V_1 اور V_2 پر کرخوف قانون رو نہ لکھ پانے کے باوجود ہم اتنی تعداد میں مساوات کس طرح لکھ پائیں گے۔

شکل 3.17-الف کو دیکھ کر

$$V_2 - V_1 = 10 \tag{3.31}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس کے علاوہ اسی شکل میں دکھائے شاخوں کے برقی رو استعمال کرتے ہوئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$-8\,\mathrm{mA} + I_1 + I_m = 0 \tag{3.32}$$

$$-I_m + I_2 + 3\,\mathrm{mA} = 0 \tag{3.33}$$

شکل 3.17: مثال 3.6 کا دور۔

مساوات 3.32 اور مساوات 3.33 کے مجموعہ

$$-5\,\text{mA} + I_1 + I_2 = 0 \tag{3.34}$$

میں قانون اوہم کے استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$-8\,\text{mA} + \frac{V_1}{8\,\text{k}\Omega} + \frac{V_2}{10\,\text{k}\Omega} + 3\,\text{mA} = 0 \tag{3.35}$$

مساوات 3.31 اور مساوات 3.35 درکار ہمزاد مساوات ہیں جنہیں حل کرنے سے

$$V_1 = 240\,\text{V}$$
$$V_2 = 250\,\text{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی جوڑ پر کرخوف قانون رو لکھتے ہوئے تمام مزاحمتی شاخوں میں رو کی سمت خارجی تصور کی جا سکتی ہے۔یہاں اس بات کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ دو جوڑوں کے مابین نسب منبع دباو کی رو کو دونوں جوڑوں پر خارجی تصور نہیں کیا جا سکتا۔منبع دباو کے رو کی کوئی بھی سمت چننے کے بعد دونوں جوڑوں پر کرخوف قانون رو لکھتے ہوئے منبع دباو کے رو کی سمت چنی گئی سمت ہی تصور کی جائے گی۔

مساوات 3.35 کے حصول میں ہمیں مساوات 3.32، مساوات 3.33 اور مساوات 3.34 بھی لکھنے پڑھ گئے۔آئیں ان اضافی مساوات کے لکھنے سے چھٹکارا حاصل کریں۔

شکل 3.17-ب میں زمین سے ہٹ کر دو جوڑوں کے مابین نسب منبع دباو کے گرد نقطہ دار دائرہ کھینچا گیا ہے۔اس بند دائرے کو مخلوط جوڑ[8] کہا جاتا ہے۔آپ جانتے ہیں کہ کرخوف قانون رو بند دائرے پر بھی لاگو ہوتا ہے لہٰذا اس بند دائرے میں مجموعی داخلی رو اور مجموعی خارجی رو برابر ہوں گے۔شکل-ب میں مخلوط جوڑ سے تمام مزاحمتی شاخوں کے رو کی سمت خارجی تصور کرتے ہوئے

$$-8\,\text{mA} + \frac{V_1}{8\,\text{k}\Omega} + \frac{V_2}{10\,\text{k}\Omega} + 3\,\text{mA} = 0 \tag{3.36}$$

لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 3.35 ہی ہے۔یاد رہے کہ دور حل کرنے کی خاطر مخلوط جوڑ کے دونوں جانب دباو کا تعلق

$$V_2 - V_1 = 10 \tag{3.37}$$

---

[8] super node

بھی درکار ہے۔

مثال 3.7: شکل 3.18-الف میں I_1 اور I_2 دریافت کریں۔

حل: شکل 3.18-ب میں مخلوط جوڑ کو نقطہ دار دائرے میں گھیرا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ مخلوط جوڑ کے سروں کے مابین دباو کے تعلق

$$V_3 - V_2 = 16$$

کو استعمال کرتے ہوئے بالائی جوڑ کے دباو کو نچلے جوڑ کے دباو کی صورت میں

$$V_2 = V_3 - 16$$

لکھا گیا ہے۔ ہم بالائی جوڑ کے دباو کو V_2 ہی لکھتے ہوئے نچلے جوڑ کے دباو کو $V_3 = V_2 + 16$ لکھ سکتے تھے۔ شکل 3.18-ب کو دیکھ کر درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} V_1 &= 20\,\mathrm{V} \\ V_4 &= 10\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

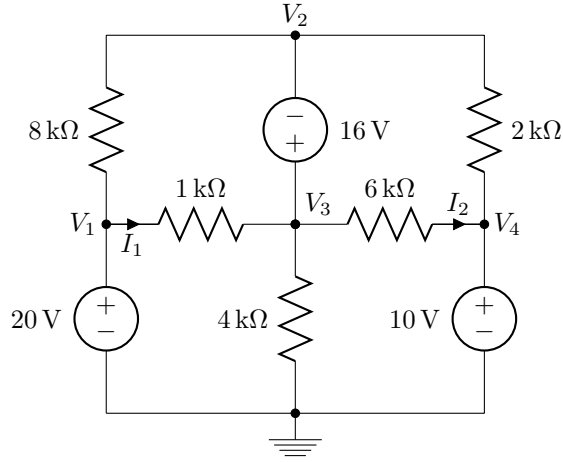
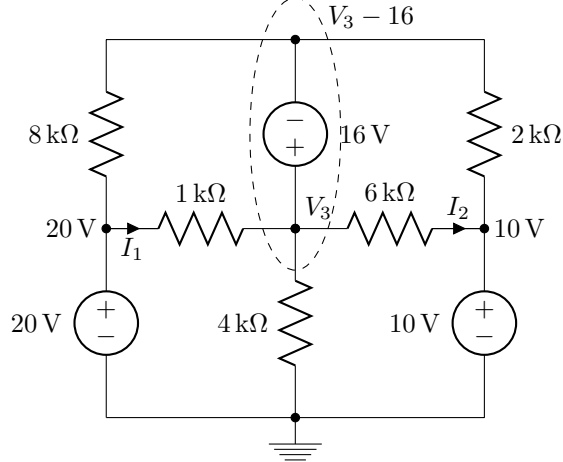
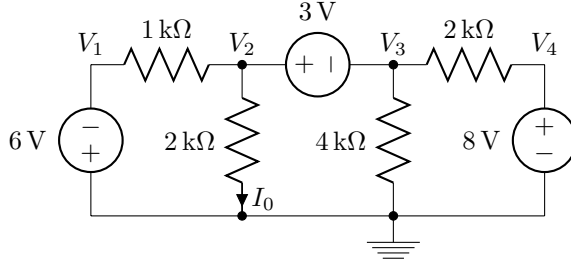
یوں صرف V_3 نا معلوم دباو ہے۔ کرخوف قانون رو استعمال کرتے ہوئے مخلوط جوڑ یعنی نقطہ دار دائرے کے لئے

$$\frac{(V_3 - 16) - 20}{8\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{(V_3 - 16) - 10}{2\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{V_3 - 20}{1\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{V_3 - 10}{6\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{V_3}{4\,\mathrm{k\Omega}} = 0$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام رو کی سمت خارجی چنی گئی ہے۔ اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$V_3 = 20\,\mathrm{V}$$

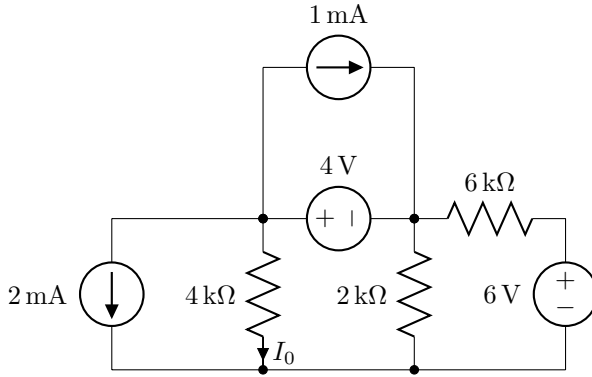
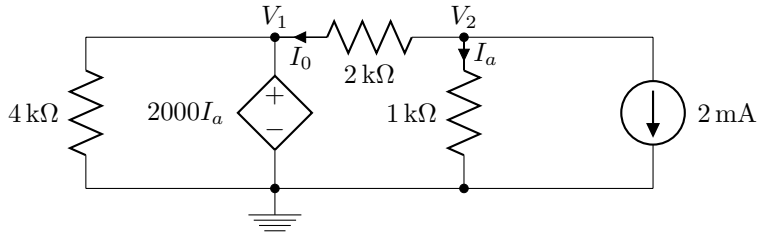
یوں درکار رو درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1 - V_3}{1\,\mathrm{k\Omega}} = \frac{20 - 20}{1\,\mathrm{k\Omega}} = 0\,\mathrm{A} \\ I_2 &= \frac{V_3 - V_4}{6\,\mathrm{k\Omega}} = \frac{20 - 10}{6\,\mathrm{k\Omega}} = \frac{5}{3}\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

شکل 3.18: مثال 3.7 کا دور۔

شکل 3.19: مشق 3.9 کا دور۔

مشق 3.9: شکل 3.19 میں I_0 دریافت کریں۔

جواب: $\frac{49}{18}\,\mathrm{mA}$

مشق 3.10: شکل 3.20 میں I_0 دریافت کریں۔

جواب: $\frac{5}{11}\,\mathrm{mA}$

شکل 3.20: مشق 3.10 کا دور۔

شکل 3.21: مثال 3.8 کا دور۔

3.5 تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار

تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار کو بھی مندرجہ بالا طریقوں سے حل کیا جاتا ہے۔آئیں چند مثال دیکھیں۔

مثال 3.8: شکل 3.21 میں I_0 حاصل کریں۔

حل:چونکہ جوڑ V_1 تابع منبع دباو سے جڑا ہے لہٰذا

$$V_1 = 2000 I_a$$

ہو گا جہاں

$$I_a = \frac{V_2}{1\,\mathrm{k\Omega}}$$

ہے۔جوڑ V_2 پر کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

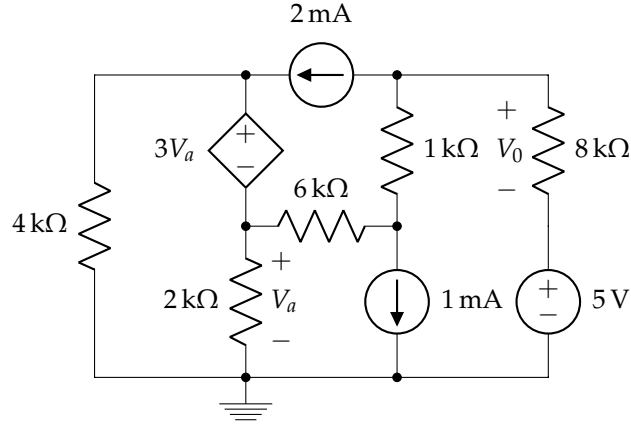
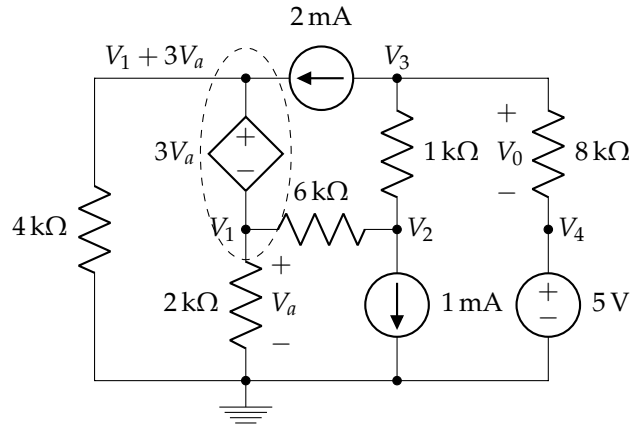
$$2\,\mathrm{mA} + \frac{V_2 - V_1}{2\,\mathrm{k\Omega}} + I_a = 0$$

انہیں حل کرنے سے

$$\begin{aligned} V_2 &= -4\,\mathrm{V} \\ V_1 &= -8\,\mathrm{V} \\ I_a &= -4\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں لہٰذا

$$I_0 = \frac{(-4) - (-8)}{2\,\mathrm{k\Omega}} = 2\,\mathrm{mA}$$

ہو گی۔

شکل 3.22: مثال 3.9 کا دور۔

مثال 3.9: شکل 3.22 میں تابع منبع مخلوط جوڑ کے مابین نسب ہے۔اس دور میں V_0 حاصل کریں۔

حل: شکل 3.22-ب میں جوڑ V_1 ، V_2 ، V_3 اور V_4 کی نشاندہی کی گئی ہے۔ مخلوط جوڑ کے نچلے سرے پر V_1 دباو کی بدولت اس کے بالائی سرے پر $V_1 + 3V_a$ دباو لکھا گیا ہے۔ مخلوط جوڑ پر کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{V_1 + 3V_a}{4000} - 0.002 + \frac{V_1}{2000} + \frac{V_1 - V_2}{6000} = 0$$

اسی طرح $V_4 = 5\,\mathrm{V}$ لیتے ہوئے بالترتیب V_2 اور V_3 جوڑ کے لئے کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{V_2 - V_1}{6000} + 0.001 + \frac{V_2 - V_3}{1000} &= 0\\ 0.002 + \frac{V_3 - V_2}{1000} + \frac{V_3 - 5}{8000} &= 0\end{aligned}$$

مخلوط جوڑ کے مساوات میں $V_a = V_1$ پر کرتے ہوئے مندرجہ بالا تین مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

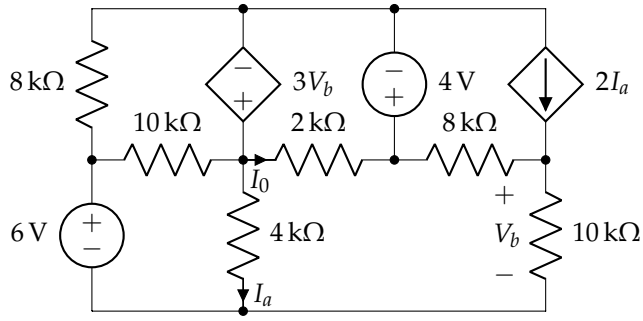
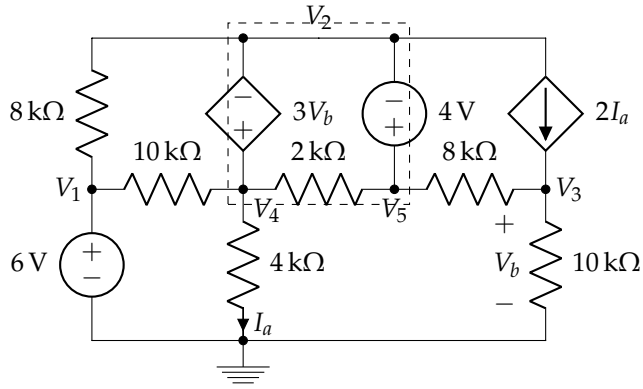
$$\begin{aligned}10V_1 - V_2 &= 12\\ -V_1 + 7V_2 - 6V_3 &= -6\\ -8V_2 + 9V_3 &= -11\end{aligned}$$

ان تین ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{20}{47}\,\mathrm{V}\\ V_2 &= -\frac{364}{47}\,\mathrm{V}\\ V_3 &= -\frac{381}{47}\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$V_0 = V_3 - V_4 = -\frac{616}{47}\,\mathrm{V}$$

ہو گا۔

شکل 3.23: مثال 3.10 کا دور۔

مثال 3.10: شکل 3.23-الف میں I_0 دریافت کریں۔

حل: شکل 3.23-ب میں نچلے جوڑ کو زمین چنتے ہوئے بقایا جوڑوں کی نشاندہی کی گئی ہے۔ مخلوط جوڑوں کو نقطہ دار چکور سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ آپ مخلوط جوڑ کو پہچان سکتے ہیں۔ مخلوط جوڑ کے نچلے بائیں اور دائیں سروں کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
V_4 - V_2 &= 3V_b \\
V_5 - V_2 &= 4
\end{aligned}
$$

جن سے

$$
\begin{aligned}
V_4 &= V_2 + 3V_b \\
V_5 &= V_2 + 4
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

$$V_1 = 6$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ جوڑ V_2 اور V_3 کے کرخوف مساوات رو بالترتیب لکھتے ہیں جہاں V_2 کی مساوات درحقیقت مخلوط جوڑ کی مساوات رو ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{V_2-6}{8000} + \frac{(V_2+3V_b)-6}{10000} + \frac{(V_2+3V_b)}{4000} + \frac{(V_2+4)-V_3}{8000} + 2I_a &= 0 \\
-2I_a + \frac{V_3-(V_2+4)}{8000} + \frac{V_3}{10000} &= 0
\end{aligned}
$$

مندرجہ بالا دو مساوات میں درج ذیل پر کرتے

$$
\begin{aligned}
V_b &= V_3 \\
I_a &= \frac{V_2+3V_b}{4000} = \frac{V_2+3V_3}{4000}
\end{aligned}
$$

ہوئے

$$
\begin{aligned}
\frac{V_2-6}{8000} + \frac{(V_2+3V_3)-6}{10000} + \frac{(V_2+3V_3)}{4000} + \frac{(V_2+4)-V_3}{8000} + 2\left(\frac{V_2+3V_3}{4000}\right) &= 0 \\
-2\left(\frac{V_2+3V_3}{4000}\right) + \frac{V_3-(V_2+4)}{8000} + \frac{V_3}{10000} &= 0
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
44V_2 + 97V_3 &= 34 \\
50V_2 + 102V_3 &= -40
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں حل کرنے سے درج ذیل ملتے ہیں۔

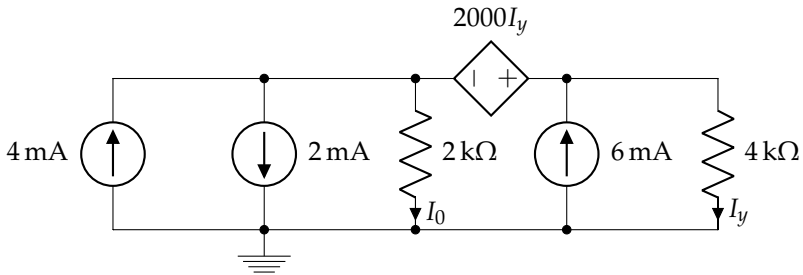
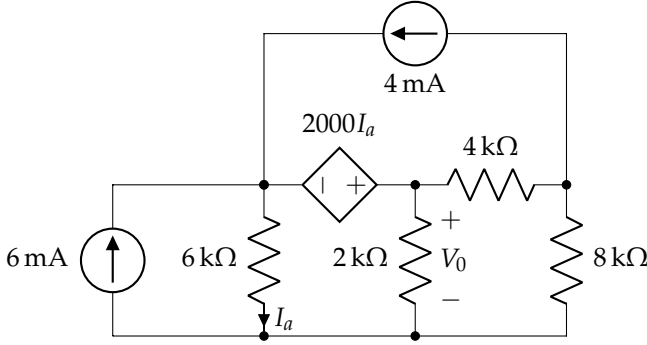
$$
\begin{aligned}
V_2 &= -\frac{3674}{181}\,\mathrm{V} \\
V_3 &= \frac{1730}{181}\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

یوں

$$
I_0 = \frac{V_4 - V_5}{2000} = \frac{149}{12}\,\mathrm{mA}
$$

حاصل ہوتی ہے۔

مشق 3.11: شکل 3.24 میں I_0 حاصل کریں۔

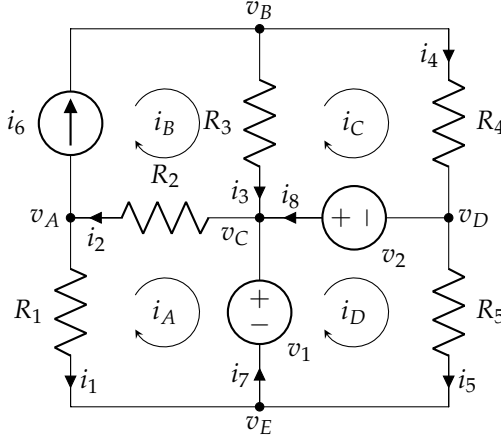
جواب: 4 mA

شکل 3.24: مشق 3.11 کا دور۔

شکل 3.25: مشق 3.12 کا دور۔

مشق 3.12: شکل 3.25 میں V_0 حاصل کریں۔

جواب: $\frac{176}{17}$ V

3.6 دائری تجزیہ

تجزیہ جوڑ میں نا معلوم متغیرات دباو جوڑ تھے جنہیں کرخوف قانون رو کی مدد سے حاصل کیا گیا۔جوڑ کے دباو جاننے کے بعد شاخوں کی رو کو قانون اوہم سے حاصل کیا گیا۔اس کے برعکس دائری ترکیب[9] میں کرخوف قانون دباو کی مدد سے دائری رو[10] دریافت کئے جاتے ہیں۔دائری رو جانتے ہوئے کسی بھی شاخ کا دباو قانون اوہم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایسا دور جس میں J جوڑ اور S شاخ پائے جاتے ہوں سے $S - J + 1$ آزاد مساوات بذریعہ کرخوف قانون دباو حاصل کئے جا سکتے ہیں۔شکل 3.26 کو مثال بناتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اس میں $J = 5$ اور $S = 8$ ہیں لہٰذا اس سے $8 - 5 + 1 = 4$ آزاد مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں جن سے دائری رو i_A

[9] loop analysis
[10] loop current

شکل 3.26: دائری ترکیب کی مثال۔

، i_B ، i_C اور i_D حاصل ہوں گے۔ دائری رو جانتے ہوئے شاخوں کی رو درج ذیل لکھی جا سکتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_1 &= -i_A \\
i_2 &= i_B - i_A \\
i_3 &= i_B - i_C \\
i_4 &= i_C \\
i_5 &= i_D \\
i_6 &= i_B \\
i_7 &= i_D - i_A
\end{aligned}
$$

اس کتاب میں صرف سطحی ادوار[11] پر غور کیا جائے گا۔ سطحی دور سے مراد ایسا دور ہے جسے کاغذ پر یوں بنایا جا سکتا ہو کہ کوئی تار دوسری تار کو نہ کاٹے۔ سطحی ادوار میں دائروں کی نشاندہی نسبتاً آسان ہوتی ہے۔ دائری ترکیب میں دائری رو یوں چنی جاتی ہیں کہ تمام شاخوں سے کم از کم ایک دائری رو گزرے، مزید یہ کہ ہر دائری رو کم از کم ایک ایسے شاخ سے گزرے جس سے کوئی دوسری دائری رو نہ گزرتی ہو۔

آئیں دائری ترکیب کو چند مثالوں کی مدد سے سمجھیں۔

[11] planar circuits

3.7 غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار

شکل 3.27 میں دو عدد غیر تابع منبع دباو استعمال کئے گئے ہیں۔اس دور میں سات شاخ اور چھ جوڑ ہیں لہٰذا دور میں تمام نا معلوم دائری رو دریافت کرنے کی خاطر $7-6+1=2$ غیر تابع مساوات درکار ہیں جنہیں کرخوف قانون دباو سے حاصل کیا جائے گا۔چونکہ دو عدد دائری رو درکار ہیں لہٰذا ہم دو عدد دائرے چنتے ہیں۔ہم ان دائروں کو مختلف انداز میں چن سکتے ہیں۔یوں ہم پہلا دائرہ $abcfa$ اور دوسرا دائرہ $cdefc$ چن سکتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے دائری رو i_1 اور i_2 ہوں گے جنہیں شکل 3.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں ہم نے دونوں دائری رو کو گھڑی کی سمت تصور کیا ہے۔حقیقت میں آپ دونوں رو کو گھڑی کے الٹ بھی تصور کر سکتے ہیں اور ایسا بھی کر سکتے ہیں کہ ایک دائری رو گھڑی کی سمت اور دوسری رو گھڑی کی الٹ تصور کی جائے۔ترکیب جوڑ کی طرح یہاں بھی اگر حقیقت میں کسی رو کی سمت تصور کردہ سمت کے الٹ ہو تو ایسی صورت میں رو کی قیمت منفی حاصل ہو گی۔اس کتاب میں ہم دائری رو کو گھڑی کی سمت ہی تصور کریں گے۔ اسی طرح ہم دو عدد دائرے یوں بھی چن سکتے ہیں کہ پہلا دائرہ $abcfa$ اور دوسرا دائرہ $abdea$ لیں جن سے شکل 3.27-ب میں دکھائے دائری رو ملتے ہیں۔ہم باری باری شکل 3.27-الف اور شکل 3.27-ب کو حل کرتے ہیں۔

شکل 3.27-الف میں دونوں دائروں پر کرخوف قانون دباو سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
-v_{M1}+v_1+v_4+v_3&=0\\
-v_4+v_2+v_5+v_{M2}&=0
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

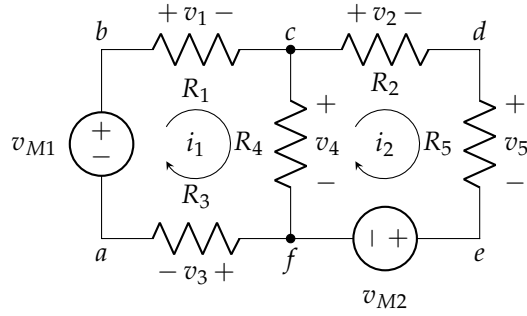
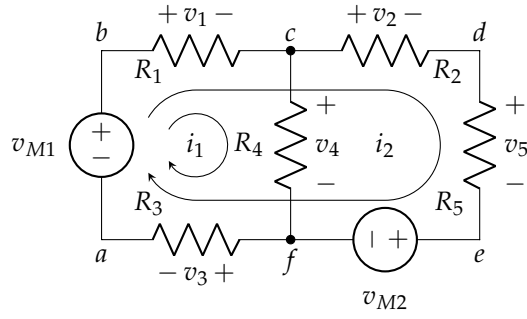
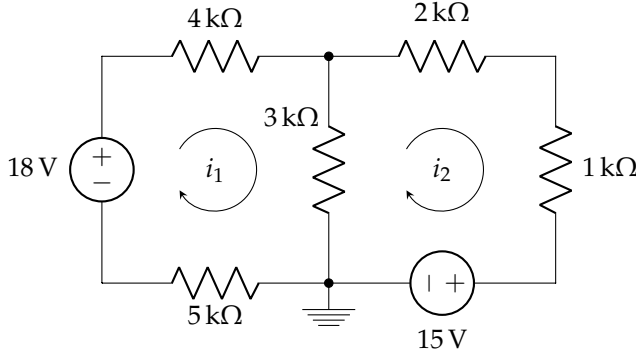
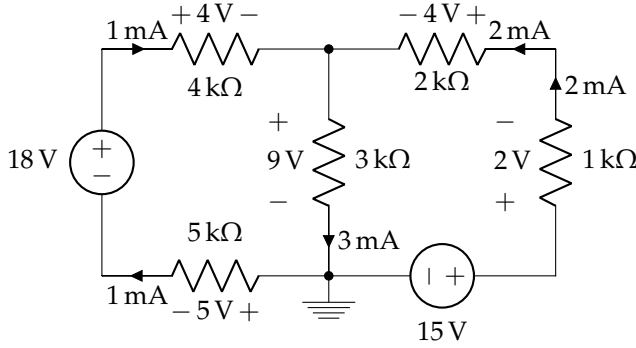
قانون اوہم سے دباو شاخ درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں

$$
\begin{aligned}
v_1&=i_1R_1\\
v_2&=i_2R_2\\
v_3&=i_1R_3\\
v_4&=(i_1-i_2)R_4\\
v_5&=i_2R_5
\end{aligned}
$$

جنہیں مساوات 3.38 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
i_1(R_1+R_3+R_4)-i_2R_4&=v_{M1}\\
-i_1R_4+i_2(R_2+R_4+R_5)&=-v_{M2}
\end{aligned}
$$

اس کو قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$
\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_4 & -R_4\\ -R_4 & R_2+R_4+R_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1\\ i_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{M1}\\ -v_{M2}\end{bmatrix}
\tag{3.39}
$$

شکل 3.27: غیر تابع منبع دباو استعمال کرنے والا دور۔

شکل 3.28: غیر تابع منبع دباو استعمال کرنے والا دور کی مثال۔

شکل 3.26 یا شکل 3.27-الف بالکل ماہی گیر کے جال کی مانند ہیں جسے مچھلیاں پکڑنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ان اشکال میں ہر خانے میں دائری رو چنی گئی ہے۔اس کے برعکس شکل 3.27-ب میں i_3 کو یوں چنا گیا ہے کہ یہ i_1 کو بھی لپیٹتی ہے۔اس کتاب میں انفرادی خانے کی رو ہی چنتے ہوئے ادوار حل کئے جائیں گے۔

مثال 3.11: شکل 3.28-الف میں دائری رو دریافت کرتے ہوئے تمام شاخوں کی رو اور دباو حاصل کریں۔

حل: کرخوف قانون دباو کی مدد سے بالترتیب بائیں اور دائیں خانوں کے لئے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$-18+4000i_1+3000(i_1-i_2)+5000i_1=$$
$$3000(i_2-i_1)+2000i_2+1000i_2+15=0$$

انہیں ترتیب دیتے ہوئے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$12000i_1-3000i_2=18$$
$$-3000i_1+6000i_2=-15$$

کسی بھی ترکیب سے ان ہمزاد مساوات کو حل کیا جا سکتا ہے۔حاصل جوابات درج ذیل ہیں۔

$$i_1=1\,\mathrm{mA}$$
$$i_2=-2\,\mathrm{mA}$$

چونکہ i_2 کی قیمت منفی ہے لہٰذا حقیقت میں دائیں خانے میں رو کی سمت چنی گئی سمت کے الٹ ہے۔ان قیمتوں کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔کسی بھی مزاحمت کا دباو قانون اوہم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔تمام مزاحمتوں کے دباو شکل-ب میں دکھائے گئے ہیں۔امید کی جاتی ہے کہ آپ انہیں حاصل کر پائیں گے۔

مثال 3.12: شکل 3.29 کو حل کرتے ہوئے تمام شاخوں کی رو دریافت کریں۔

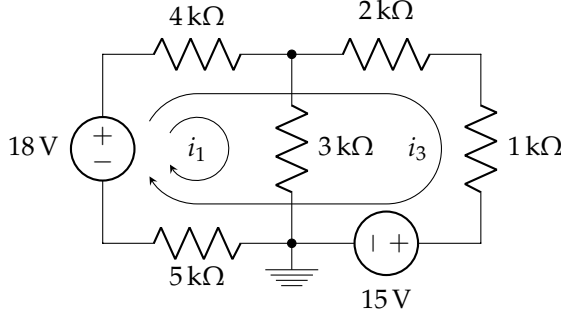
حل: بائیں خانے کے لئے کرخوف قانون دباو سے

$$-18+4000(i_1+i_2)+3000i_1+5000(i_1+i_2)=0$$

لکھا جا سکتا ہے۔بیرونی دائرے کے لئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$-18+4000(i_1+i_2)+2000i_2+1000i_2+15+5000(i_1+i_2)=0$$

ان میں رو کو ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$12000i_1+9000i_2=18$$
$$9000i_1+12000i_2=3$$

شکل 3.29: ہر خانے کی علیحدہ رو تصور نہیں کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

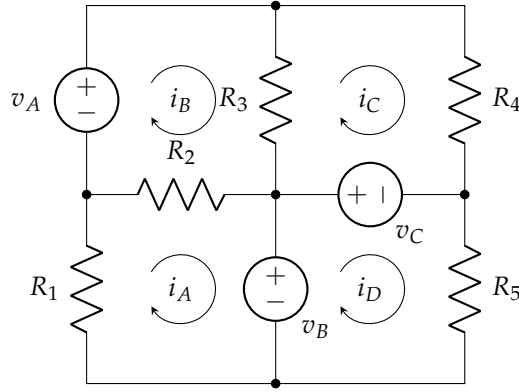
$$i_1 = 3\,\text{mA}$$
$$i_2 = -2\,\text{mA}$$

آپ گزشتہ مثال کے جوابات کے ساتھ موازنہ کر سکتے ہیں مثلاً بالائی $4\,\text{k}\Omega$ میں $3\,\text{mA} - 2\,\text{mA} = 1\,\text{mA}$ اور درمیانے $3\,\text{k}\Omega$ میں $3\,\text{mA}$ رو پائے جاتے ہیں۔

مندرجہ بالا دو مثالوں میں ایک ہی دور میں دو مختلف طرز کے رو چنتے ہوئے حل کیا گیا۔ دونوں حاصل جواب یکساں حاصل ہوئے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ حاصل جواب چنی گئی رو پر منحصر نہیں ہے۔

مثال 3.13: شکل 3.30 کے کرخوف مساوات دباو کو قالبی صورت میں لکھیں۔

حل: ہم بالترتیب i_A، i_B i_C اور i_D کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مساوات لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
i_A R_1 + (i_A - i_B) R_2 + v_B &= 0 \\
-v_A + (i_B - i_C) R_3 + (i_B - i_A) R_2 &= 0 \\
(i_C - i_B) R_3 + i_C R_4 - v_C &= 0 \\
-v_B + v_C + i_D R_5 &= 0
\end{aligned}$$

شکل 3.30: دائری ترکیب کی مثال۔

انہیں ترتیب دیتے ہوئے دوبارہ لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} i_A(R_1+R_2)-i_BR_2&=-v_B\\ -i_AR_2+i_B(R_2+R_3)-i_CR_3&=v_A\\ -i_BR_3+i_C(R_3+R_4)&=v_C\\ i_DR_5&=v_B-v_C \end{aligned}$$

قالبی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0\\ -R_2 & R_2+R_3 & -R_3 & 0\\ 0 & -R_3 & R_3+R_4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_A\\ i_B\\ i_C\\ i_D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -v_B\\ v_A\\ v_C\\ v_B-v_C\end{bmatrix}$$

مندرجہ بالا قالبی مساوات میں پہلی صف (یعنی بالائی صف) کا پہلا جزو (یعنی بایاں جزو) ان مزاحمتوں کا مجموعہ ہے جن سے i_A گزرتی ہے یعنی R_1+R_2 جبکہ اسی پہلی صف کا دوسرا جزو ان مزاحمتوں کے مجموعے کا منفی ہے جن سے i_A اور i_B دونوں گزرتی ہیں۔اسی طرح تیسرا جزو i_A اور i_C کا مشترکہ مزاحمتوں کا منفی ہے۔چونکہ موجودہ دور میں ایسا کوئی مزاحمت نہیں پایا جاتا جن سے i_A اور i_C دونوں گزرتی ہوں لہٰذا یہ جزو صفر کے برابر ہے۔اسی طرح پہلی صف کا چوتھا جزو i_A اور i_D کے مشترک مزاحمتوں کے مجموعے کے منفی کے برابر ہے

جو موجودہ دور میں صفر کے برابر ہے۔ قالب کے دوسرے صف کا پہلا جزو i_B اور i_A کے مشترکہ مزاحمتوں کے مجموعے کا منفی ہے۔ دوسرے صف کا دوسرا جزو ان مزاحمتوں کا مجموعہ ہے جن سے i_B گزرتی ہے جبکہ صف کا تیسرا جزو i_B اور i_C کے مشترک مزاحمتوں کے مجموعے کا منفی ہے۔ اسی ترکیب سے تیسرا صف i_C کے مطابق اور چوتھا صف i_D کے مطابق لکھا جاتا ہے۔ قالبی مساوات کا دایاں ہاتھ بالترتیب i_A ، i_B ، i_C اور i_D کی سمت میں گھومتے ہوئے منبع دباو کے مجموعی دباو میں اضافے کے برابر ہے۔ چونکہ i_A کی سمت میں گھومتے ہوئے صرف منبع v_B سے گزرا جاتا ہے اور گھومنے کی سمت میں منبع کا دباو گھٹتا ہے لہٰذا قالبی مساوات کے بائیں ہاتھ پہلا جزو $-v_B$ لکھا جائے گا۔ آپ سے گزارش ہے کہ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ آپ قالبی مساوات کے تمام اجزاء یوں لکھ سکتے ہیں۔

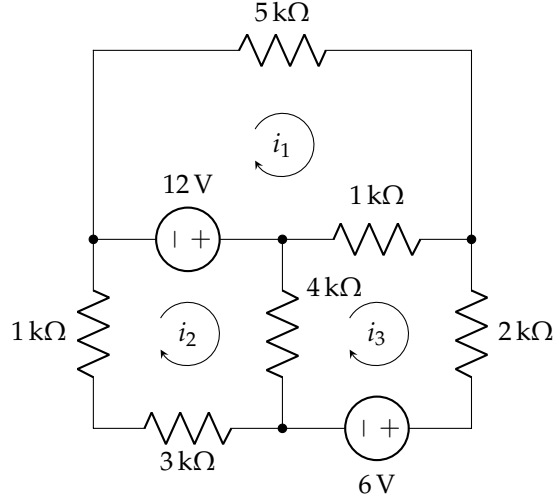
اگر تمام خانوں میں، ایک ہی سمت میں گھومتی انفرادی دائری رو تصور کی جائے تب عمومی قالبی مساوات درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$
\begin{bmatrix}
R_{11} & -R_{12} & -R_{13} & \cdots - R_{1m} \\
-R_{21} & R_{22} & -R_{23} & \cdots - R_{2m} \\
-R_{31} & -R_{32} & R_{33} & \cdots - R_{3m} \\
\vdots & & & \\
-R_{m1} & -R_{m2} & -R_{m3} & \cdots R_{mm}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}
\tag{3.40}
$$

اس عمومی قالبی مساوات میں بائیں ہاتھ مزاحمتی قالب کے بالائی بائیں کونے سے نچلی دائیں کونے تک ترچھی لکیر پر پائے جانے والے اجزاء مثبت ہیں جبکہ بقایا تمام منفی ہیں۔ اس مساوات میں R_{11} سے مراد ان مزاحمتوں کا مجموعہ ہے جن سے i_1 گزرتی ہے جبکہ R_{12} ان مزاحمتوں کا مجموعہ ہے جن سے i_1 اور i_2 دونوں گزرتی ہیں۔ تمام خانوں میں رو کی سمت یکساں ہونے کی صورت میں دو پڑوسی خانوں کے مشترک شاخ میں پڑوسی رو الٹ سمت میں پائی جاتی ہے۔

مثال 3.14: شکل 3.31 میں نامعلوم رو حاصل کریں۔

حل: آئیں شکل کو دیکھ کر قالبی مساوات لکھیں۔

$$
\begin{bmatrix}
5\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} & 0 & -1\,\mathrm{k\Omega} \\
0 & 3\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} & -4\,\mathrm{k\Omega} \\
-4\,\mathrm{k\Omega} & -1\,\mathrm{k\Omega} & 4\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -12\,\mathrm{V} \\ 12\,\mathrm{V} \\ -6\,\mathrm{V} \end{bmatrix}
$$

شکل 3.31: مثال 3.14 کا دور۔

اسے یوں لکھتے ہوئے

$$\begin{bmatrix} 6000 & 0 & -1000 \\ 0 & 8000 & -4000 \\ -4000 & -1000 & 7000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}$$

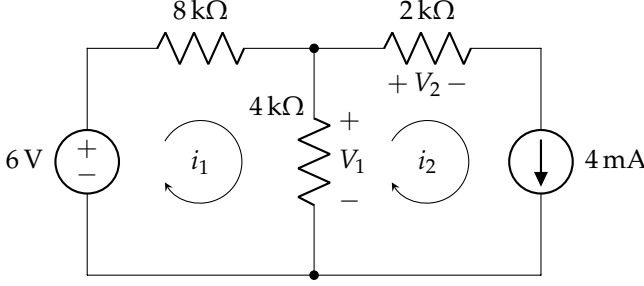
یہ عمومی قالبی مساوات

$$\mathbf{RI} = \mathbf{V}$$

ہے جس کا حل

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}$$

ہے۔ قالبی مساوات کو حل کرنے سے دائری رو درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{33}{14}\,\text{mA} \\ i_2 &= \frac{3}{7}\,\text{mA} \\ i_3 &= \frac{15}{7}\,\text{mA} \end{aligned}$$

شکل 3.32: منبع رو سے دائری ترکیب نسبتاً آسان ہو جاتی ہے۔

3.8 غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار

منبع دباو کی موجودگی سے ترکیب جوڑ کا استعمال نسبتاً آسان ہو جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح منبع رو کی موجودگی سے دائری ترکیب کا استعمال نسبتاً آسان ہو جاتا ہے۔ آئیں یہ حقیقت چند مثال حل کرتے ہوئے دیکھیں۔

مثال 3.15: شکل 3.32 میں V_1 اور V_2 دائری ترکیب استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

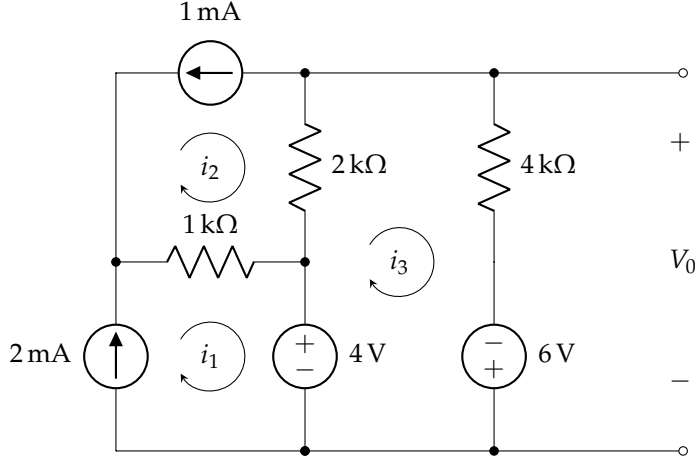
حل: ایسا معلوم ہوتا ہے کہ دو عدد نا معلوم دائری رو i_1 اور i_2 پائے جاتے ہیں۔ حقیقت میں i_2 منبع رو سے گزرتی ہے لہٰذا اس کی قیمت کا تعین منبع رو ہی کرتی ہے یعنی

$$i_2 = 4\,\text{mA}$$

ہے۔ اس طرح بغیر حل کئے قانون اوہم کی مدد سے

$$V_2 = 2000 i_2 = 8\,\text{V}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ بائیں خانے سے درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$-6 + 8000 i_1 + 4000(i_1 - i_2) = 0$$

شکل 3.33: زیادہ منبع رو سے دائری ترکیب زیادہ آسان ہو سکتی ہے۔

جس میں $i_2 = 4\,\text{mA}$ پُر کرتے ہوئے

$$i_1 = \frac{11}{6}\,\text{mA}$$

اور

$$V_1 = 4000(i_1 - i_2) = -\frac{26}{3}\,\text{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

آپ نے دیکھا کہ ایک عدد منبع رو کی وجہ سے نا معلوم رو کی تعداد دو عدد سے کم ہر کر ایک عدد رہ گئی۔

مثال 3.16: شکل 3.33 میں V_0 دریافت کریں۔

حل:چونکہ i_1 اور i_2 منبع رو سے گزرتی ہیں لہٰذا ان کی قیمت لازمی طور پر انہیں منبع کی رو کے برابر ہوں گی۔یاد رہے کہ منبع رو سے کسی اور قیمت کی رو نہیں گزر سکتی۔یہی منبع رو کی تعریف ہے۔یوں

$$i_1 = 2\,\text{mA}$$
$$i_2 = -1\,\text{mA}$$

ہوں گے۔ یوں دور کو حل کرنے کی خاطر صرف ایک عدد مساوات دباو درکار ہے جسے i_3 کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$-4 + 2000(i_3 - i_2) + 4000i_3 - 6 = 0$$

اس میں $i_2 = -1\,\text{mA}$ پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$i_3 = \frac{4}{3}\,\text{mA}$$

یوں شکل کو دیکھ کر درکار دباو لکھا جا سکتا ہے۔

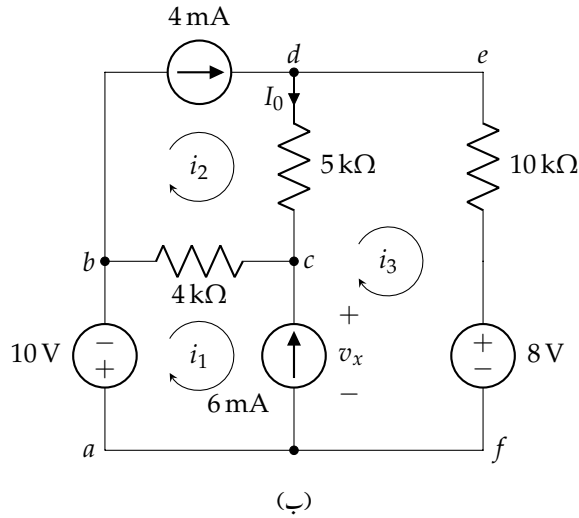
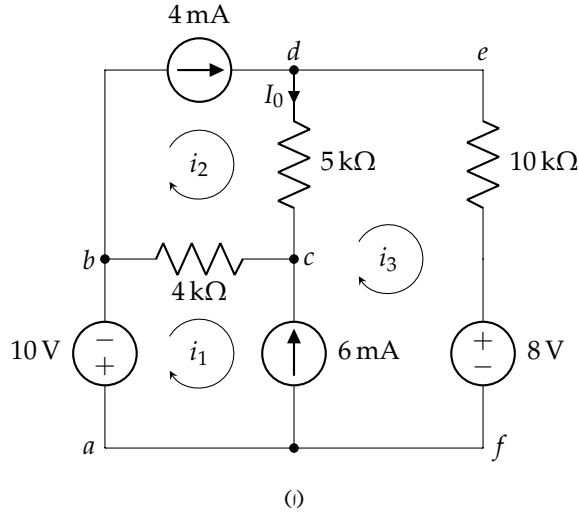
$$V_0 = 4000i_3 - 6 = -\frac{2}{3}\,\text{V}$$

مثال 3.17: شکل 3.34 میں I_0 حاصل کریں۔

حل:یہاں i_2 منبع رو سے گزرتی ہے لہٰذا

$$i_2 = 4\,\text{mA}$$

ہو گی۔ہم اگر i_2 کو استعمال کرتے ہوئے کرخوف قانون دباو لکھنا چاہیں تو $6\,\text{mA}$ منبع سے گزرتے ہوئے دباو کی قیمت جاننے کا ہمارے پاس کوئی طریقہ موجود نہیں ہے۔یہ مسئلہ i_3 کی صورت میں بھی درپیش ہے۔ہاں ہم دیکھتے ہیں کہ اس منبع رو سے $6\,\text{mA}$ رو ہی گزر سکتی ہے لہٰذا

$$i_3 - i_1 = 6\,\text{mA} \tag{3.41}$$

شکل 3.34: مثال 3.17 کا دور۔

ہو گا۔چونکہ i_2 ہم پہلے ہی حاصل کر چکے ہیں لہٰذا i_1 اور i_3 جاننے کے لئے دو عدد ہمزاد مساوات درکار ہیں۔مساوات 3.41 پہلی مساوات ہے۔دوسری مساوات راہ $abcdefa$ پر کرخوف قانون دباو سے لکھتے ہیں۔

$$10 + 4000(i_1 - 4\,\text{mA}) + 5000(i_3 - 4\,\text{mA}) + 10000 i_3 + 8 = 0 \tag{3.42}$$

مندرجہ بالا دو ہمزاد مساوات حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{72}{19}\,\text{mA} \\ i_3 &= \frac{42}{19}\,\text{mA} \end{aligned}$$

درکار رو حاصل کرتے ہیں۔

$$I_0 = i_2 - i_3 = \frac{34}{19}\,\text{mA}$$

آئیں مساوات 3.42 کو اس طرح حاصل کرنا سیکھیں کہ راہ $abcdefa$ چننے کی ضرورت نہ ہو۔چونکہ $6\,\text{mA}$ منبع رو کا دباو نا معلوم ہے لہٰذا اسے v_x متغیرہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔شکل 3.34-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔اسی شکل سے i_1 اور i_3 خانوں کے کرخوف قانون دباو سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

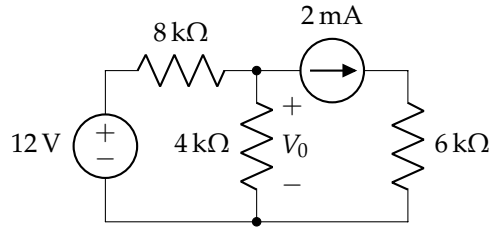
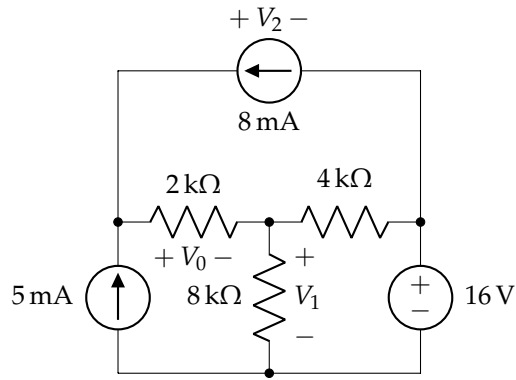
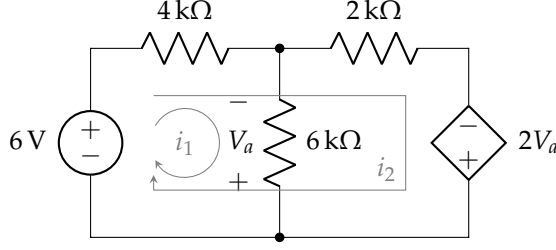
$$\begin{aligned} 10 + 4000(i_1 - 4\,\text{mA}) + v_x &= 0 \\ -v_x + 5000(i_3 - 4\,\text{mA}) + 10000 i_3 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

ان مساوات کا مجموعہ لینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$10 + 4000(i_1 - 4\,\text{mA}) + 5000(i_3 - 4\,\text{mA}) + 10000 i_3 + 8 = 0 \tag{3.43}$$

مساوات 3.43 کا مساوات 3.42 کے ساتھ موازنہ کریں۔دونوں بالکل یکساں ہیں۔

مشق 3.13: شکل 3.35 میں V_0 کو دائری ترکیب سے حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = -\frac{4}{3}\,\text{V}$

شکل 3.35: مشق 3.13 کا دور۔

شکل 3.36: مشق 3.14 کا دور۔

شکل 3.37: مثال 3.18 کا دور۔

مشق 3.14: شکل 3.36 میں V_0 ، V_1 اور V_2 حاصل کریں۔

جوابات: $26\,\text{V}$ ، $\frac{136}{3}\,\text{V}$ ، $\frac{166}{3}\,\text{V}$

3.9 تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار

کرخوف کے مساوات کے نقطہ نظر سے تابع منبع اور آزاد منبع میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا۔البتہ تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار کو حل کرتے ہوئے تابع منبع کی قابو مساوات[12] بھی درکار ہوتی ہے۔آئیں چند مثالوں کی مدد سے ایسے ادوار حل کرنا دیکھیں۔آسان ترین مثال سے شروع کرتے ہوئے بتدریج مشکل مثال حل کرتے ہیں۔

مثال 3.18: شکل 3.37 میں V_a دریافت کریں۔

[12] control equation

حل: کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
-6 + 4000(i_1 + i_2) - V_a &= 0 \\
-6 + 4000(i_1 + i_2) + 2000 i_2 - 2V_a &= 0
\end{aligned}
$$

ان میں تابع منبع دباو کی قابو مساوات

$$V_a = -6000 i_1$$

پُر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
10000 i_1 + 4000 i_2 &= 6 \\
16000 i_1 + 6000 i_2 &= 6
\end{aligned}
$$

ان ہمزاد مساوات کا حل درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
i_1 &= -3\,\text{mA} \\
i_2 &= 9\,\text{mA}
\end{aligned}
$$

یوں درکار دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

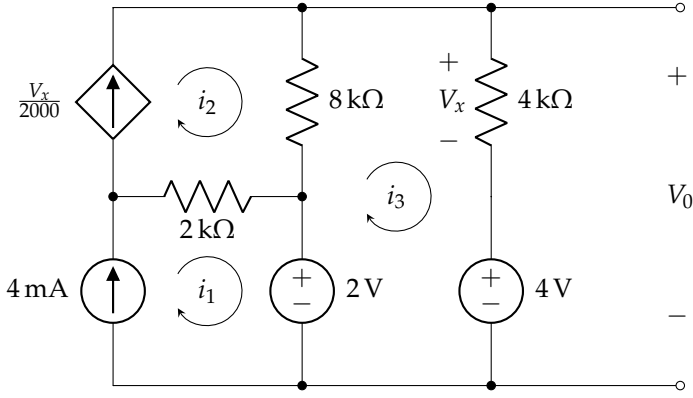
$$V_a = -6000(-0.003) = 18\,\text{V}$$

مثال 3.19: شکل 3.38 میں V_0 دریافت کریں۔

حل: چونکہ i_1 اور i_2 منبع رو سے گزرتی ہیں لہٰذا ان کی قیمت منبع رو کے برابر ہی ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
i_1 &= 4\,\text{mA} \\
i_2 &= \frac{V_x}{2000}
\end{aligned}
$$

دائیں خانے کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$-2 + 8000\left(i_3 - \frac{V_x}{2000}\right) + 4000 i_3 + 4 = 0$$

شکل 3.38: مثال 3.19 کا دور۔

اس میں تابع منبع کی قابو مساوات

$$V_x = 4000 i_3$$

پُر کرتے

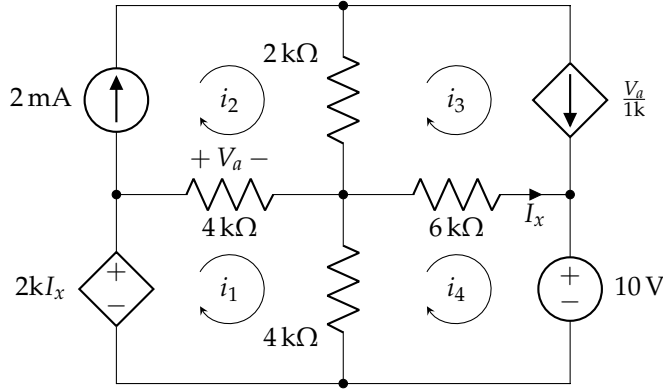
$$-2 + 8000\left(i_3 - \frac{4000 i_3}{2000}\right) + 4000 i_3 + 4 = 0$$

ہوئے حل کرنے سے

$$i_3 = 0.5\,\text{mA}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں درکار دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$V_0 = 4000 i_3 + 4 = 6\,\text{V}$$

مثال 3.20: شکل 3.39 میں تمام خانوں کی رو دریافت کریں۔اس شکل میں رو قابو منبع دباو اور دباو قابو منبع رو استعمال کئے گئے ہیں۔

شکل 3.39: مثال 3.20 کا دور۔

حل: چار خانوں کے مساوات درج ذیل ہیں

$$
\begin{aligned}
-2\text{k}I_x + 4\text{k}(i_1 - i_2) + 4\text{k}(i_1 - i_4) &= 0 \\
i_2 &= \frac{2}{1\text{k}} \\
i_3 &= \frac{V_a}{1\text{k}} \\
4\text{k}(i_4 - i_1) + 6\text{k}(i_4 - i_3) + 10 &= 0
\end{aligned}
$$

جن میں

$$
\begin{aligned}
V_a &= 4\text{k}(i_1 - i_2) \\
I_x &= i_4 - i_3
\end{aligned}
$$

پُر کرتے اور ترتیب دیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
4i_1 - 2i_2 + i_3 - 3i_4 &= 0 \\
i_2 &= 0.002 \\
-4i_1 + 4i_2 + i_3 &= 0 \\
-2i_1 - 3i_3 + 5i_4 &= -0.005
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔انہیں قالبی مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.002 \\ 0 \\ -0.005 \end{bmatrix}$$

یہ قالبی مساوات $\mathbf{RI} = \mathbf{V}$ کی طرز کی ہے جس کا حل $\mathbf{I} = \mathbf{R^{-1}V}$ ہے۔یوں خانوں کی رو درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$\begin{aligned} i_1 &= 13.5\,\mathrm{mA} \\ i_1 &= 2\,\mathrm{mA} \\ i_1 &= 46\,\mathrm{mA} \\ i_1 &= 32\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

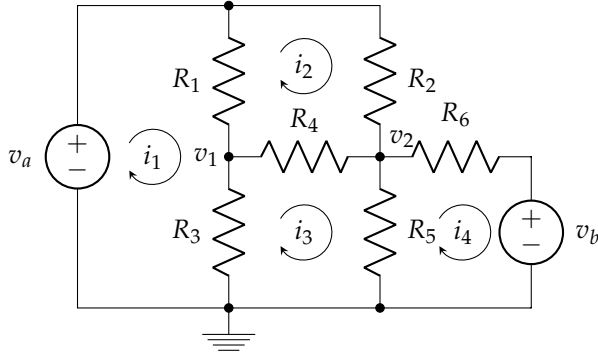
3.10 دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ

عموماً ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب سے حاصل مساواتوں کی تعداد برابر نہیں ہوتی۔ کم تعداد کے ہمزاد مساوات حل کرنا نسبتاً آسان ہوتا ہے۔ کسی بھی دور کو حل کرنے سے پہلے دیکھیں کہ کس ترکیب سے کم تعداد کے مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

شکل 3.40 میں چار خانے پائے جاتے ہیں لہٰذا ان خانوں کی رو حاصل کرنے کی خاطر چار عدد ہمزاد مساوات درکار ہوں گے۔ان مساوات کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} -v_a + (i_1 - i_2)R_1 + (i_1 - i_3)R_3 &= 0 \\ (i_2 - i_1)R_1 + i_2R_2 + (i_2 - i_3)R_4 &= 0 \\ (i_3 - i_1)R_3 + (i_3 - i_2)R_4 + (i_3 - i_4)R_5 &= 0 \\ (i_4 - i_3)R_5 + i_4R_6 + v_b &= 0 \end{aligned}$$

اس کے برعکس اس دور میں نچلا جوڑ برقی زمین اور بالائی جوڑ v_a دباو پر ہے لہٰذا اس میں دو عدد نا معلوم جوڑ v_1 اور v_2 پائے جاتے ہیں جن کے مساوات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{v_1 - v_a}{R_1} + \frac{v_1}{R_3} + \frac{v_1 - v_2}{R_4} &= 0 \\ \frac{v_2 - v_a}{R_2} + \frac{v_2}{R_5} + \frac{v_2 - v_b}{R_6} &= 0 \end{aligned}$$

شکل 3.40: اس دور میں ترکیب جوڑ کے مساواتوں کی تعداد کم ہے۔

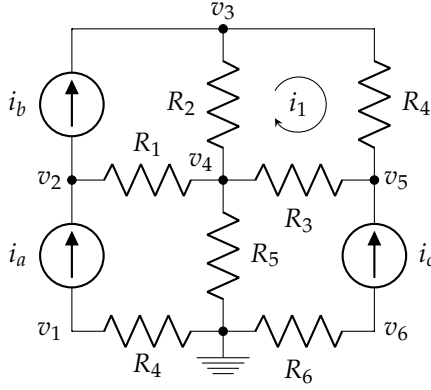
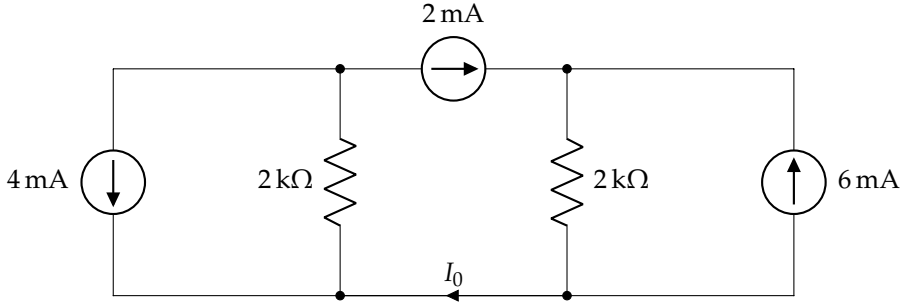
صاف ظاہر ہے کہ شکل 3.40 کو ترکیب جوڑ سے حل کرنا زیادہ آسان ہے۔

آئیں اب شکل 3.41 کو دیکھیں۔ یہاں تین خانوں کی رو، ان خانوں میں موجود منبع رو تعین کرتے ہیں لہٰذا ہمیں صرف ایک عدد خانے کی رو i_1 درکار ہے۔ دائری ترکیب کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(i_1 - i_b)R_2 + i_1 R_4 + (i_1 + i_c)R_3 = 0$$

اس کے برعکس درج ذیل چھ جوڑ کے مساوات لکھے جائیں گے۔

$$\begin{aligned}
\frac{v_1}{R_4} + i_a &= 0 \\
-i_a + i_b + \frac{v_2 - v_4}{R_1} &= 0 \\
-i_b + \frac{v_3 - v_4}{R_2} + \frac{v_3 - v_5}{R_4} &= 0 \\
\frac{v_4 - v_2}{R_1} + \frac{v_4 - v_3}{R_2} + \frac{v_4 - v_5}{R_3} + \frac{v_4}{R_5} &= 0 \\
\frac{v_5 - v_4}{R_3} + \frac{v_5 - v_3}{R_4} - i_c &= 0 \\
\frac{v_6}{R_6} + i_c &= 0
\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کرخوف قانون دباو سے اس دور کو حل کرنے زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

شکل 3.41: اس دور میں دائری ترکیب کے مساواتوں کی تعداد کم ہے۔

شکل 3.42: سوال 3.1 کا دور۔

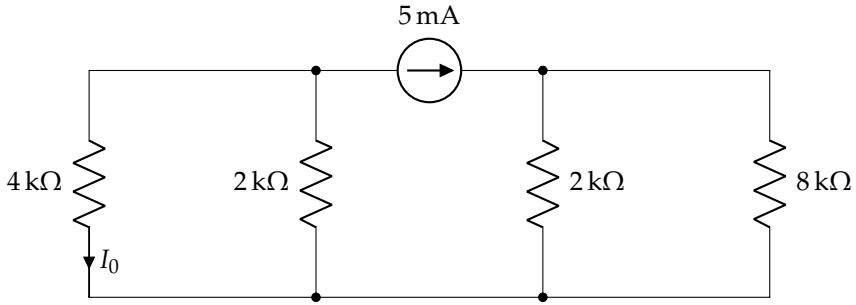
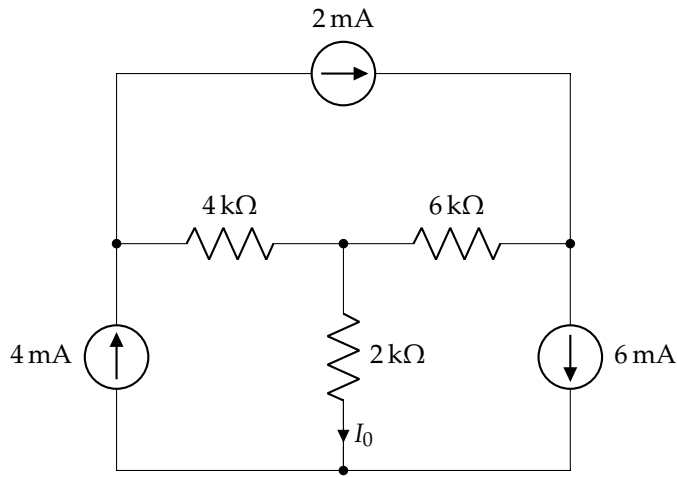
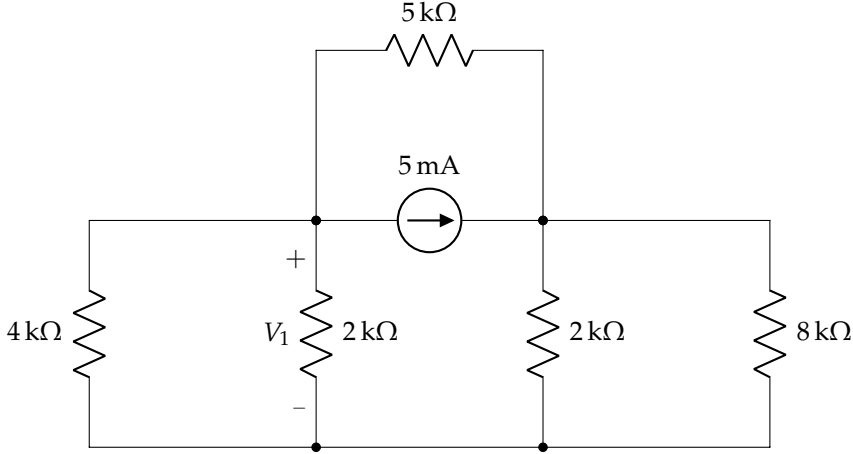
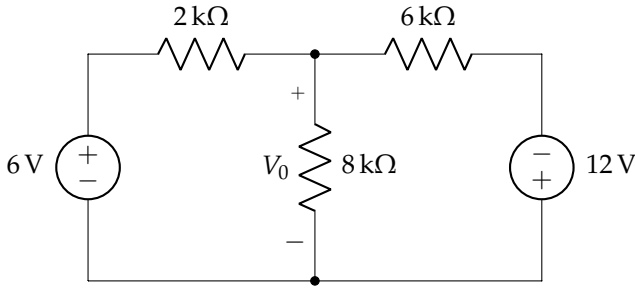
سوالات

سوال 3.1: شکل 3.42 میں I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = 2\,\mathrm{mA}$

سوال 3.2: شکل 3.43 میں I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = -\frac{5}{3}\,\mathrm{mA}$

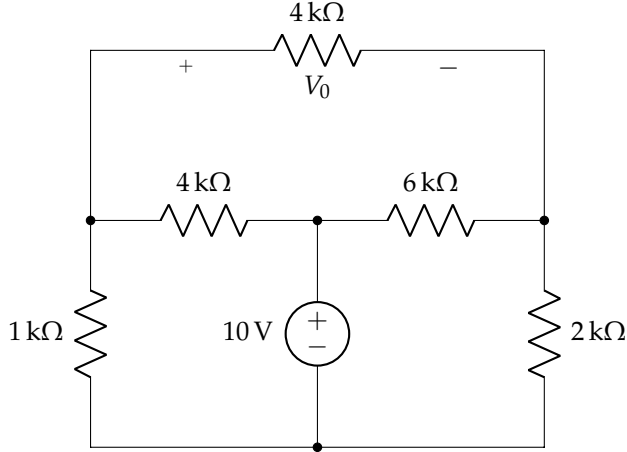
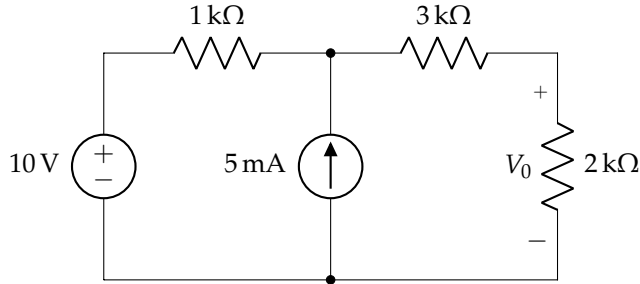
سوال 3.3: شکل 3.44 میں I_0 دریافت کریں۔

شکل 3.43: سوال 3.2 کا دور۔

شکل 3.44: سوال 3.3 کا دور۔

شکل 3.45: سوال 3.4 کا دور۔

شکل 3.46: سوال 3.5 کا دور۔

جواب: $I_0 = -2\,\text{mA}$

سوال 3.4: شکل 3.45 میں I_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = -\frac{500}{119}\,\text{V}$

سوال 3.5: شکل 3.46 میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = \frac{24}{19}\,\text{V}$

شکل 3.47: سوال 3.6 کا دور۔

شکل 3.48: سوال 3.7 کا دور۔

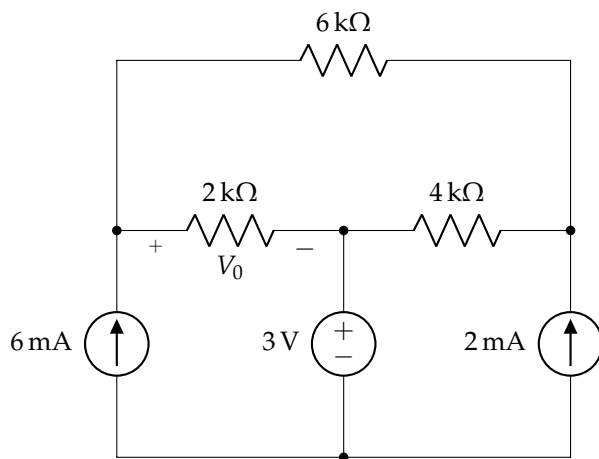
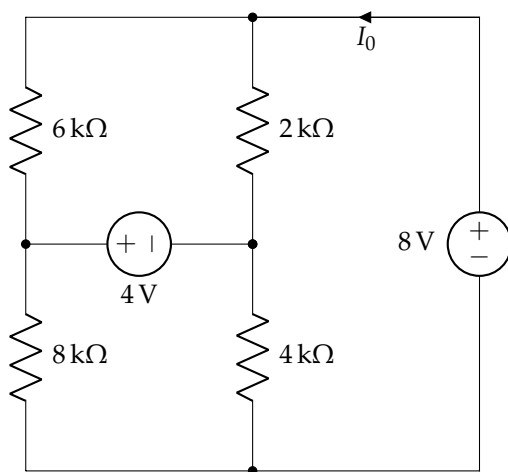
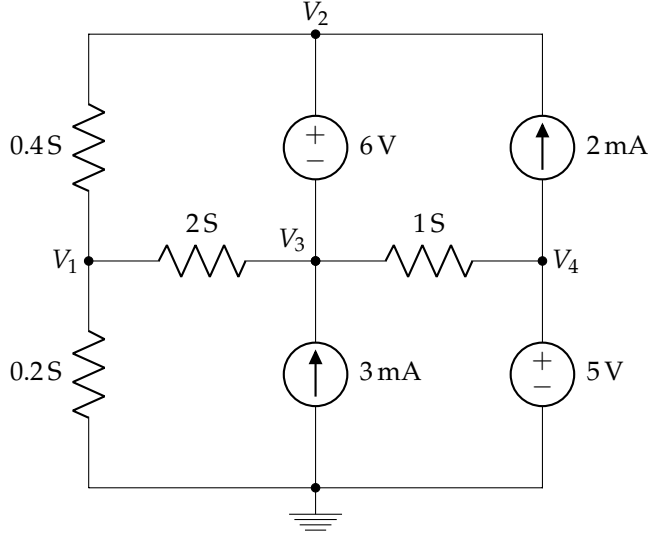
سوال 3.6: شکل 3.47 میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = -\frac{20}{63}\,\mathrm{V}$

سوال 3.7: شکل 3.48 میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = 5\,\mathrm{V}$

سوال 3.8: شکل 3.49 میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = \frac{34}{3}\,\mathrm{V}$

شکل 3.49: سوال 3.8 کا دور۔

شکل 3.50: سوال 3.9 کا دور۔

شکل 3.51: سوال 3.10 کا دور۔

سوال 3.9: شکل 3.50 میں I_0 کو ترکیب جوڑ سے حاصل کریں۔

جواب: $I_0 = 2\,\text{mA}$

سوال 3.10: شکل 3.51 میں ترکیب جوڑ سے V_1 ، V_2 ، V_3 اور V_4 دریافت کریں۔

جوابات: $V_1 = 4.68\,\text{V}$ ، $V_2 = 10.07\,\text{V}$ ، $V_3 = 4.07\,\text{V}$ ، $V_4 = 5\,\text{V}$

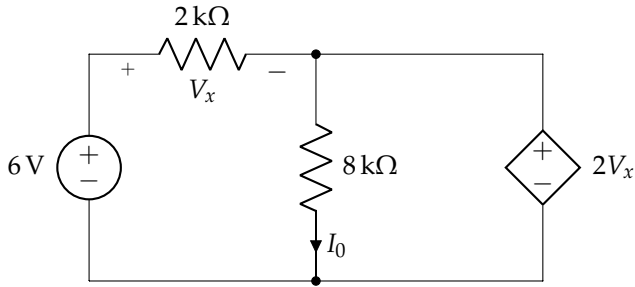
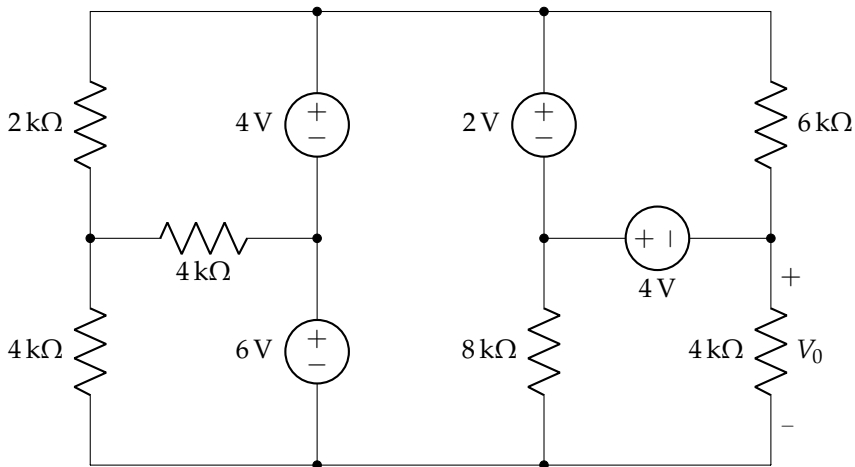
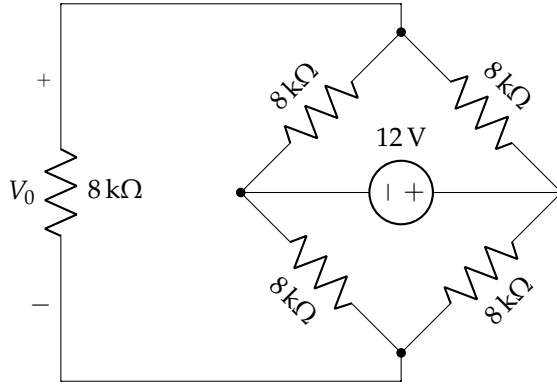
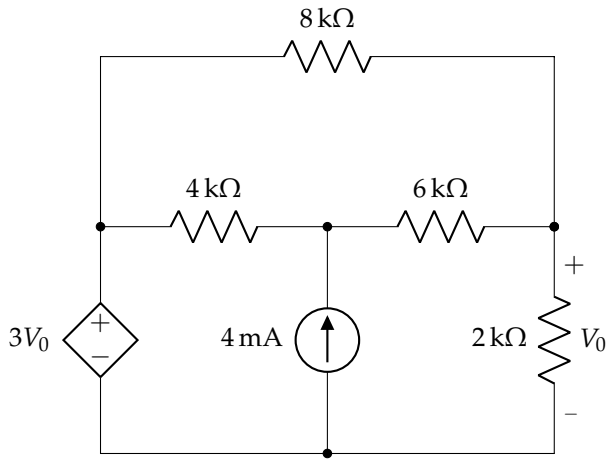
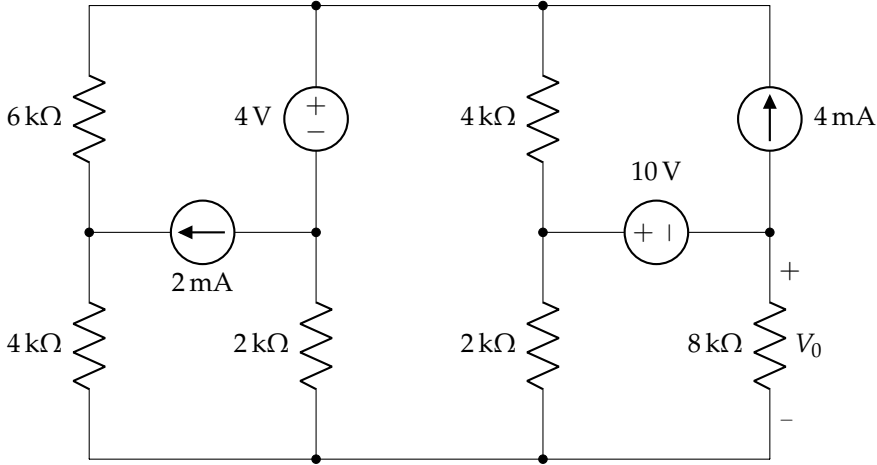
سوال 3.11: شکل 3.52 میں ترکیب جوڑ سے I_0 حاصل کریں۔

جواب: $I_0 = \frac{6}{11}\,\text{mA}$

سوال 3.12: شکل 3.53 میں ترکیب جوڑ سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = 4\,\text{V}$

سوال 3.13: شکل 3.54 میں ترکیب جوڑ سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = 0\,\text{V}$

شکل 3.52: سوال 3.11 کا دور۔

شکل 3.53: سوال 3.12 کا دور۔

شکل 3.54: سوال 3.13 کا دور۔

شکل 3.55: سوال 3.14 کا دور۔

شکل 3.56: سوال 3.15 کا دور۔

سوال 3.14: شکل 3.55 میں ترکیب جوڑ سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = 32\,\text{V}$

سوال 3.15: شکل 3.56 میں ترکیب جوڑ سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = -11.67\,\text{V}$

سوال 3.16: شکل 3.57 میں ترکیب جوڑ سے V_0 حاصل کریں۔

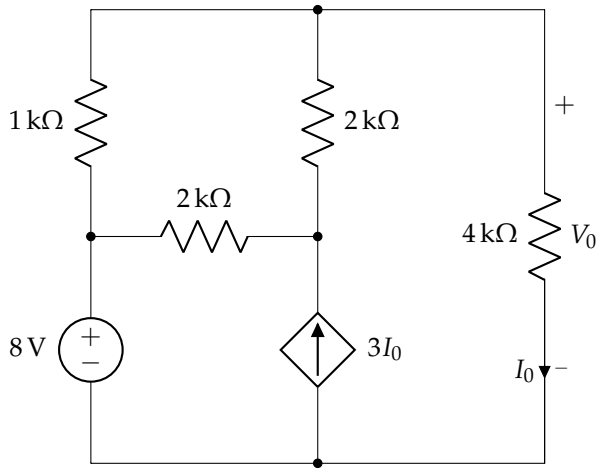
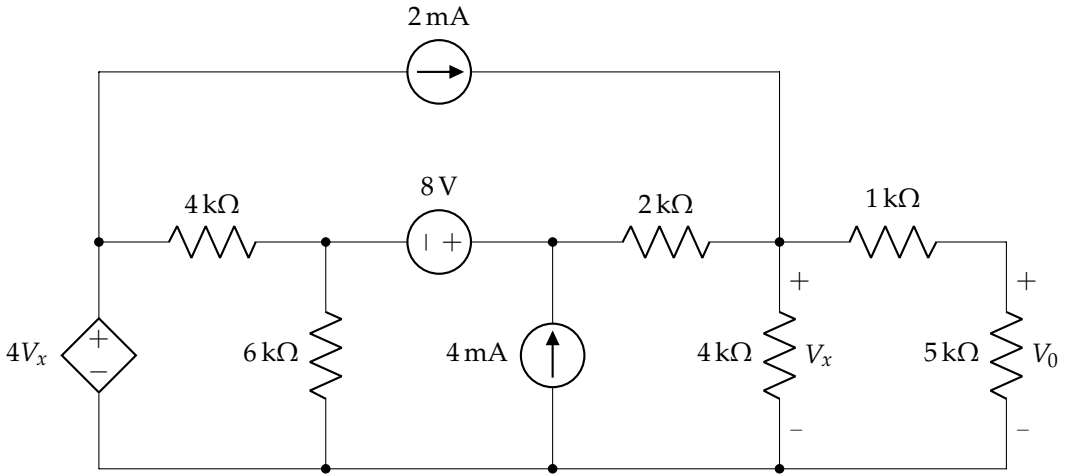
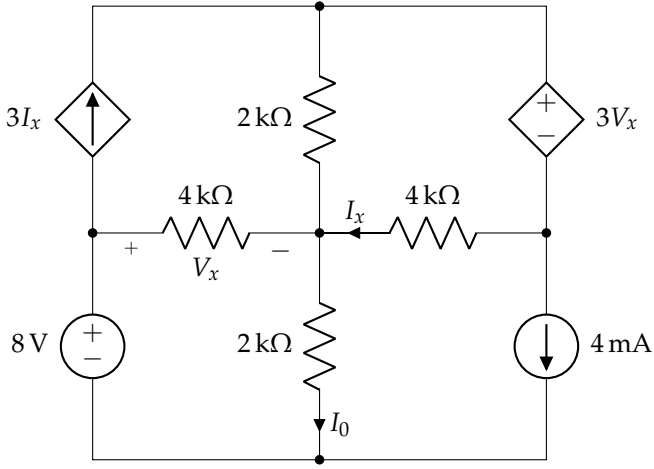
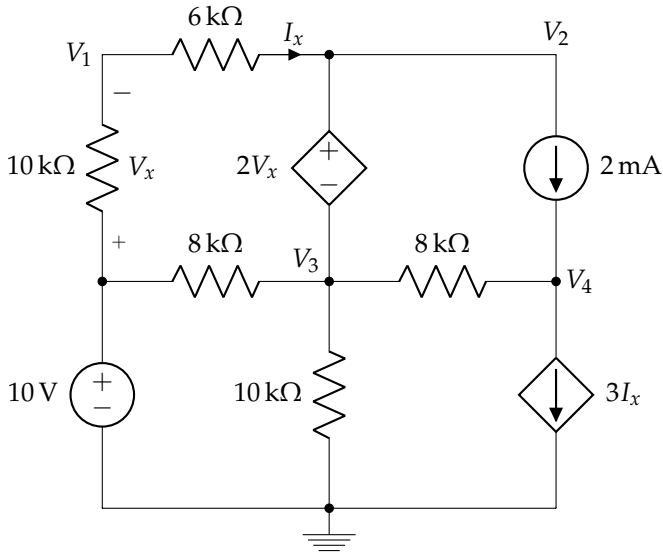
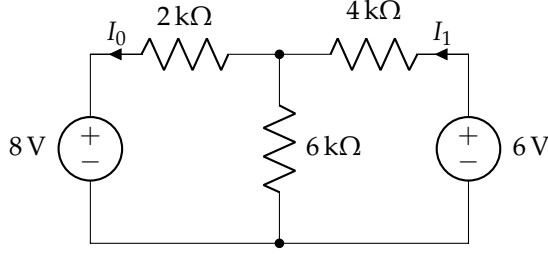
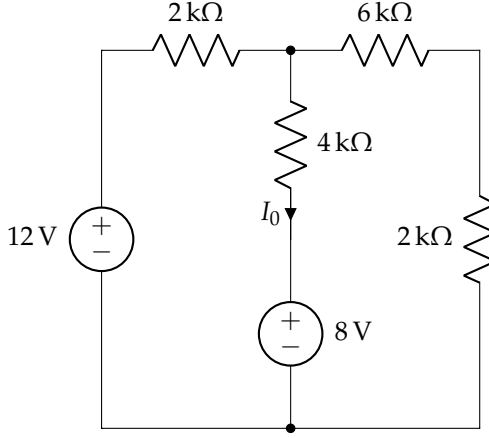
جواب: $V_0 = 4.57\,\text{V}$

سوال 3.17: شکل 3.58 میں ترکیب جوڑ سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = \frac{660}{13}\,\text{V}$

سوال 3.18: شکل 3.59 میں ترکیب جوڑ سے I_0 حاصل کریں۔

جواب: $I_0 = \frac{16}{3}\,\text{mA}$

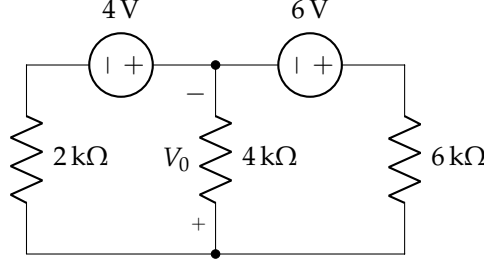
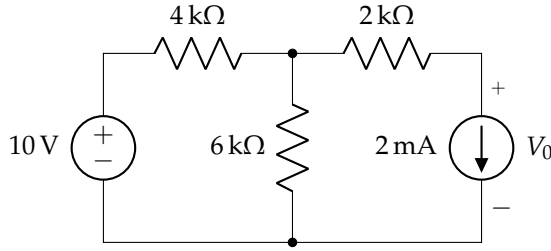
سوال 3.19: شکل 3.60 میں تمام جوڑ کے دباو حاصل کریں۔

شکل 3.57: سوال 3.16 کا دور۔

شکل 3.58: سوال 3.17 کا دور۔

شکل 3.59: سوال 3.18 کا دور۔

شکل 3.60: سوال 3.19 کا دور۔

شکل 3.61: سوال 3.20 کا دور۔

شکل 3.62: سوال 3.21 کا دور۔

جوابات: $V_1 = \frac{510}{61}\,\text{V}$ ، $V_2 = \frac{450}{61}\,\text{V}$ ، $V_3 = \frac{250}{61}\,\text{V}$ ، $V_4 = \frac{986}{61}\,\text{V}$

سوال 3.20: شکل 3.61 کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے I_0 اور I_1 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = -1\,\text{mA}$ ، $I_1 = 0$

سوال 3.21: شکل 3.62 کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = \frac{2}{7}\,\text{mA}$

شکل 3.63: سوال 3.22 کا دور۔

شکل 3.64: سوال 3.23 کا دور۔

سوال 3.22: شکل 3.63-الف کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = -\frac{12}{11}\,\mathrm{V}$

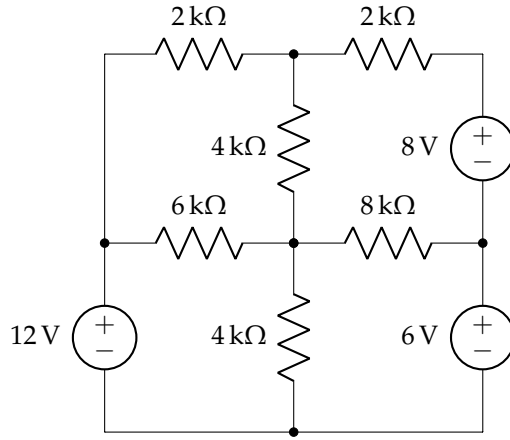
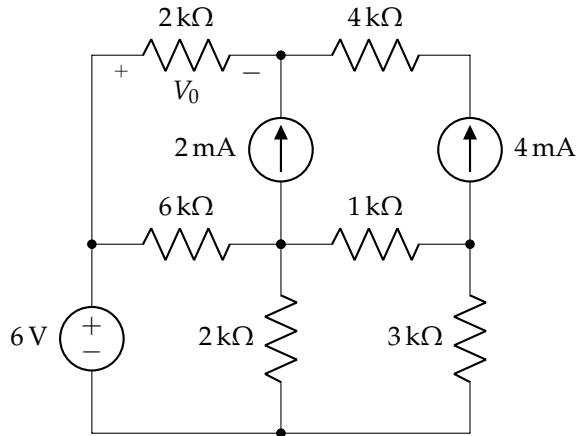
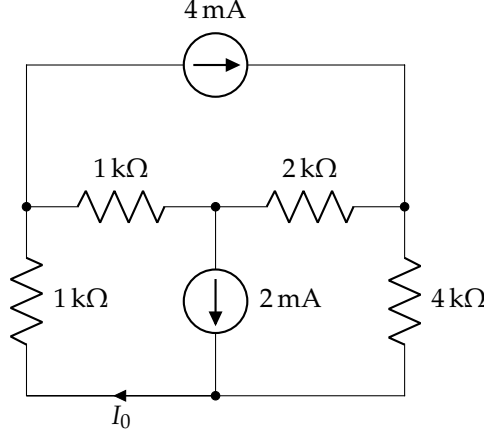
سوال 3.23: دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے شکل 3.64 میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = -2.8\,\mathrm{V}$

سوال 3.24: دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے شکل 3.65 کے $8\,\mathrm{k\Omega}$ مزاحمت میں طاقت ضیاع حاصل کریں۔

جواب: $106.5\,\mathrm{\mu W}$

سوال 3.25: دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے شکل 3.66 میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = -12\,\mathrm{V}$

شکل 3.65: سوال 3.24 کا دور۔

شکل 3.66: سوال 3.25 کے ادوار۔

شکل 3.67: سوال 3.26 کا دور۔

سوال 3.26: دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے شکل 3.67 کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے I_0 حاصل کریں۔

جواب: $I_0 = 3\,\mathrm{mA}$

سوال 3.27: دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے شکل 3.68 کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے I_0 حاصل کریں۔

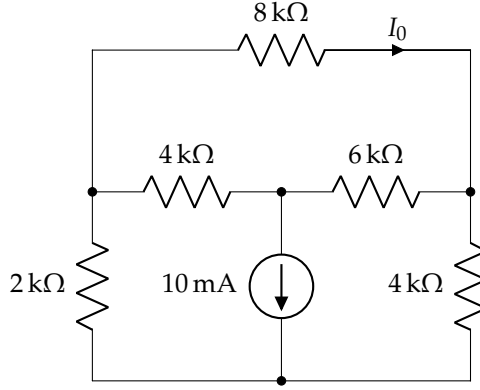
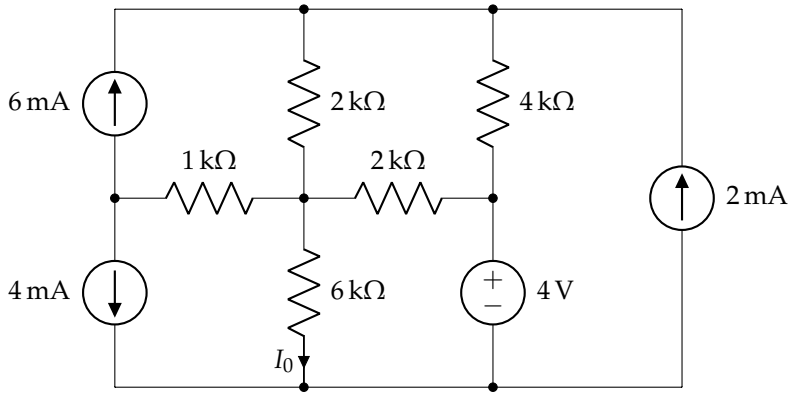
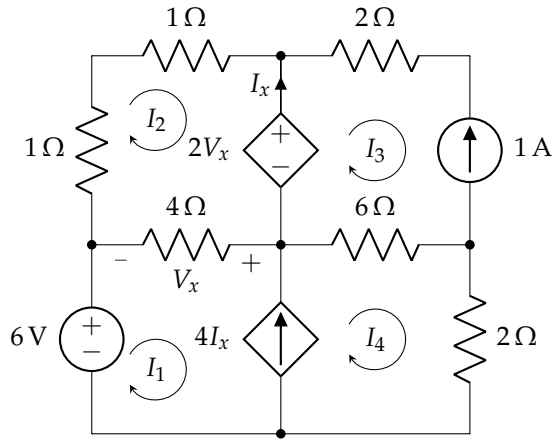
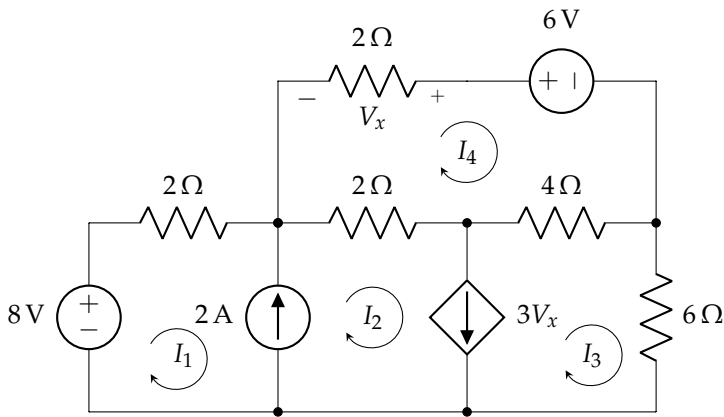
جواب: $I_0 = 212.8\,\mu\mathrm{A}$

سوال 3.28: دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے شکل 3.69 کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے I_0 حاصل کریں۔ جواب: $I_0 = -0.4\,\mathrm{mA}$

سوال 3.29: دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے شکل 3.70 کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے تمام دائری رو دریافت کریں۔

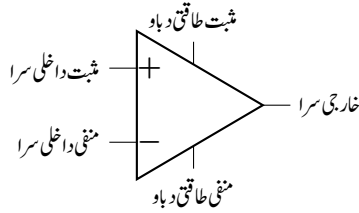
جوابات: $I_1 = -\frac{12}{7}\,\mathrm{A}$ ، $I_2 = -\frac{72}{49}\,\mathrm{A}$ ، $I_3 = -1\,\mathrm{A}$ ، $I_4 = \frac{8}{49}\,\mathrm{A}$

سوال 3.30: دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے شکل 3.71 کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے تمام دائری رو دریافت کریں۔

جوابات: $I_1 = -\frac{2}{3}\,\mathrm{A}$ ، $I_2 = \frac{4}{3}\,\mathrm{A}$ ، $I_3 = -\frac{2}{3}\,\mathrm{A}$ ، $I_4 = -\frac{1}{3}\,\mathrm{A}$

شکل 3.68: سوال 3.27 کے ادوار۔

شکل 3.69: سوال 3.28 کا دور۔

شکل 3.70: سوال 3.29 کا دور۔

شکل 3.71: سوال 3.30 کا دور۔

باب 4

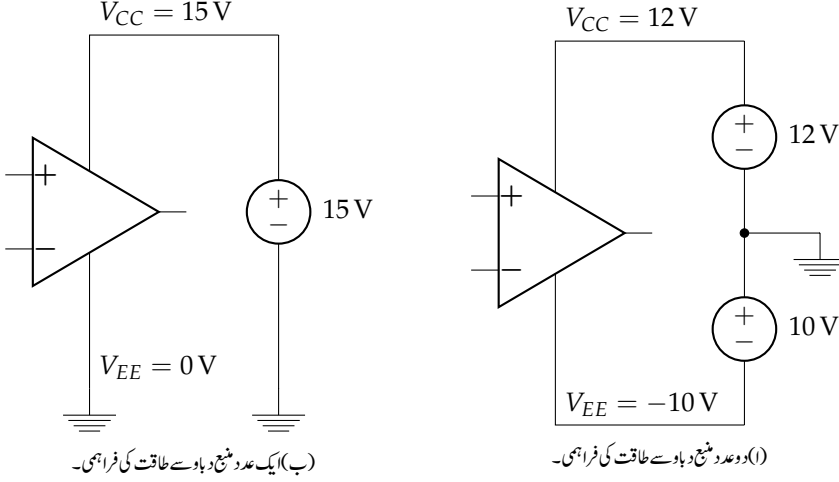
حسابی ایمپلیفائر

شکل 4.1 میں حسابی ایمپلیفائر[1] کی علامت دکھائی گئی ہے۔حسابی ایمپلیفائر کے دو عدد داخلی سرے (پنیے) ہیں جنہیں **مثبت داخلی سرا**[2] اور **منفی داخلی سرا**[3] کہا جاتا ہے جبکہ اس کا ایک عدد **خارجی سرا** (پنیا) ہے۔اس کے علاوہ دو عدد **طاقتی پنیے**[4] حسابی ایمپلیفائر کو برقی طاقت فراہم کرنے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں جن میں ایک پر مثبت طاقتی دباو اور دوسرے پر منفی طاقتی دباو فراہم کی جاتی ہے۔حسابی ایمپلیفائر کے ادوار کرخوف کے قوانین سے با آسانی حل ہوتے ہیں۔

شکل 4.1: حسابی ایمپلیفائر کی علامت۔

---

[1] operational amplifier, opamp
[2] non-inverting pin
[3] inverting pin
[4] power pins

(ب) ایک عدد منبع دباو سے طاقت کی فراہمی۔

(ا) دو عدد منبع دباو سے طاقت کی فراہمی۔

شکل 4.2: حسابی ایمپلیفائر کو طاقت کی فراہمی کے طریقے۔

شکل 4.2-الف میں حسابی ایمپلیفائر کو دو عدد منبع دباو سے طاقت فراہم کی گئی ہے جبکہ شکل-ب میں ایک عدد منبع دباو سے حسابی ایمپلیفائر کو طاقت کی فراہمی کی گئی ہے۔ مثبت طاقتی دباو کو V_{CC} اور منفی طاقتی دباو کو V_{EE} لکھا جاتا ہے۔ شکل-الف میں $V_{CC} = 12\,\mathrm{V}$ اور $V_{EE} = -10\,\mathrm{V}$ ہیں۔ عموماً ادوار میں مثبت اور منفی طاقتی دباو کے مطلق قیمتیں برابر $|V_{CC}| = |V_{EE}|$ ہوتی ہیں۔ حسابی ایمپلیفائر کے داخلی سروں پر **برقی اشارات**[5] فراہم کئے جاتے ہیں۔

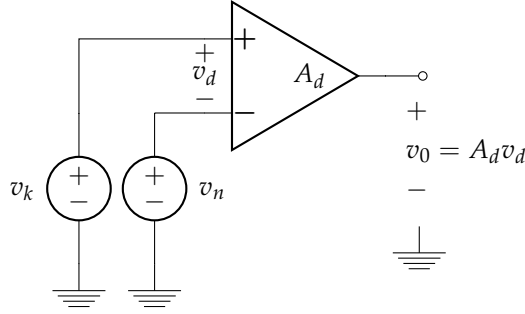
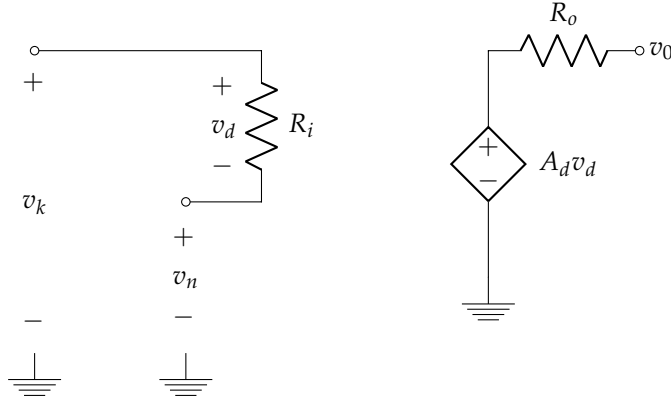
حسابی ایمپلیفائر داخلی سروں پر فراہم کردہ اشارات v_k اور v_n میں فرق v_d

$$v_d = v_k - v_n \tag{4.1}$$

کو A_d گنّا بڑھا کر خارجی پنیا پر خارج کرتا ہے۔

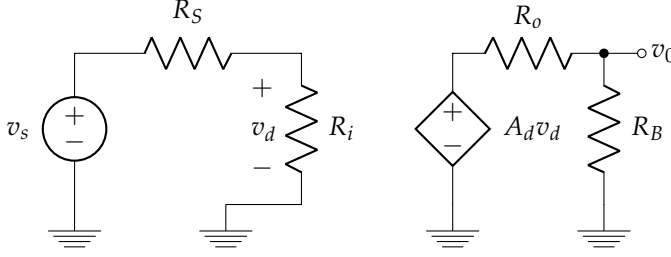
$$v_0 = A_d v_d = A_d(v_k - v_n) \tag{4.2}$$

v_d کو **داخلی تفرقی اشارہ**[6] کہتے ہیں۔ داخلی تفرقی اشارہ بڑھانے کی صلاحیت کو **افزائش**[7] کہتے اور A_d سے ظاہر کرتے ہیں۔ حسابی ایمپلیفائر کے ادوار کے اشکال میں عموماً طاقتی پنیے نہیں دکھائے جاتے تاکہ اشکال صاف ستھرے نظر آئیں۔ شکل 4.3 میں ایسا ہی کرتے ہوئے حسابی ایمپلیفائر کے طاقتی پنیے نہیں دکھائے گئے ہیں۔ شکل 4.4 میں

[5] electrical signals
[6] difference signal
[7] gain

شکل 4.3: حسابی ایمپلیفائر داخلی اشارات کے فرق کو بڑھاتا ہے۔

شکل 4.4: حسابی ایمپلیفائر کا ریاضی نمونہ۔

حسابی ایمپلیفائر کے ریاضی نمونے[8] کا دور دکھایا گیا ہے جس سے حسابی ایمپلیفائر کی کارکردگی سمجھی جا سکتی ہے۔اس نمونے سے ظاہر ہے کہ حسابی ایمپلیفائر کے داخلی سروں پر داخلی رو i_d اور داخلی تفرقی دباو v_d راست تناسب کا تعلق رکھتے ہیں۔یہ حقیقت داخلی پنیوں کے مابین مزاحمت $R_i = \frac{v_d}{i_i}$ ظاہر کرتی ہے۔اسی طرح خارجی جانب بھی مزاحمتی اثر پایا جاتا ہے جسے R_o سے ظاہر کیا گیا ہے۔ آئیں حسابی ایمپلیفائر کا دور، اس کے ریاضی نمونے کی مدد سے حل کریں۔شکل 4.5 میں حسابی ایمپلیفائر کے داخلی جانب منفی داخلی پنیے پر اشارہ v_s اور مزاحمت R_S سلسلہ وار جوڑے گئے ہیں جبکہ مثبت پنیا کو زمین کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔خارجی جانب حسابی ایمپلیفائر پر مزاحمتی بوجھ

---

[8] model

شکل 4.5: حسابی ایمپلیفائر کا دور۔

R_B ڈالا گیا ہے۔داخلی جانب تقسیم دباو سے

$$v_d = \left(\frac{R_i}{R_i + R_S}\right) v_s$$

لکھا جائے گا۔خارجی جانب تقسیم دباو سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$v_0 = \left(\frac{R_B}{R_B + R_o}\right) A_d v_d$$

مندرجہ بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے

$$\frac{v_0}{v_s} = A_d \left(\frac{R_B}{R_B + R_o}\right) \left(\frac{R_i}{R_i + R_S}\right) = A_v \tag{4.3}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں A_v بوجھ بردار حسابی ایمپلیفائر کی **افزائشِ دباو**[9] کہلاتی ہے۔

مساوات 4.3 میں دونوں قوسین کی قیمت اکائی سے کم ہے لہٰذا A_v کی قیمت A_d سے کم ہو گی۔زیادہ سے زیادہ A_v حاصل کرنے کی خاطر دونوں قوسین کی قیمت اکائی کے قریب ترین ہونا ضروری ہے۔ایسا تب ممکن ہو گا جب

$$\begin{aligned} R_i &\gg R_S \\ R_o &\ll R_B \end{aligned} \tag{4.4}$$

ہوں۔

جدول 4.1 میں حسابی ایمپلیفائر کے ریاضی نمونے کے متغیرات کی قیمتوں کے عمومی حدود دیے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایسے حسابی ایمپلیفائر دستیاب ہیں جن کی افزائش $50\,000\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے اور ایسے ایمپلیفائر بھی دستیاب ہیں جن کی افزائش $1\,000\,000\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔

[9] voltage gain

جدول 4.1: حسابی ایمپلیفائر کے نمونے کے متغیرات کی عمومی قیمتیں۔

$R_0(\Omega)$	$R_i(\Omega)$	$A_d(\mathrm{V\,V^{-1}})$
$2-200$	10^5-10^{12}	$50\,000-1\,000\,000$

مثال 4.1: شکل 4.5 میں $A_d=100\,000\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ، $R_i=10^{12}\,\Omega$ ، $R_o=100\,\Omega$ ، $R_S=50\,\mathrm{k\Omega}$ اور $R_B=10\,\mathrm{k\Omega}$ ہیں۔ایمپلیفائر کی افزائش دباو A_v حاصل کریں۔

حل: مساوات 4.3 میں دی گئی قیمتیں پُر کرتے ہیں۔

$$A_v=100\,000\left(\frac{10\,000}{10\,000+100}\right)\left(\frac{10^{12}}{10^{12}+50\,000}\right)=99\,010\,\mathrm{V\,V^{-1}}$$

حسابی ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ کسی بھی صورت مثبت طاقتی دباو V_{CC} سے زیادہ نہیں اور منفی طاقتی دباو V_{EE} سے کم نہیں ہو سکتا۔کئی اقسام کے حسابی ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ طاقتی دباو سے چند ملی وولٹ کے فاصلے تک پہنچ پاتا ہے۔عموماً حسابی ایمپلیفائر ایسا کرنے کی صلاحیت نہیں رکھتے اور ان کا خارجی اشارہ مثبت طاقتی دباو سے $1\,\mathrm{V}$ تا $3\,\mathrm{V}$ کم اور منفی طاقتی دباو سے $1\,\mathrm{V}$ تا $3\,\mathrm{V}$ زیادہ ہی رہتا ہے۔

$$V_{CC}-\Delta_+>v_0>V_{EE}+\Delta_- \tag{4.5}$$

آئیں اس حقیقت کے اثرات ایک مثال کی مدد سے دیکھیں۔

مثال 4.2: مثال 4.1 میں $v_s=50\,\mathrm{\mu V}$ ، $v_s=200\,\mathrm{\mu V}$ ، $v_s=2\,\mathrm{V}$ اور $v_s=-150\,\mathrm{\mu V}$ کی صورت میں v_0 حاصل کریں۔حسابی ایمپلیفائر کے $\Delta_+=1.5\,\mathrm{V}$ اور $\Delta_-=1.2\,\mathrm{V}$ تصور کریں جبکہ طاقتی دباو $12\,\mathrm{V}$ اور $-12\,\mathrm{V}$ ہیں۔

حل: مساوات 4.5 کے تحت خارجی اشارے کے حدود درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}12-1.5 &> v_0 > -12+1.2\\ 10.5\,\mathrm{V} &> v_0 > -10.8\,\mathrm{V}\end{aligned} \tag{4.6}$$

گزشتہ مثال میں ہم A_v کی قیمت حاصل کر چکے ہیں۔چونکہ $A_v = \frac{v_0}{v_s}$ ہوتا ہے لہٰذا $v_s = 50\,\mathrm{\mu V}$ کی صورت میں

$$v_0 = A_v v_s = 99010 \times 50 \times 10^{-6} = 4.95\,\mathrm{V} \qquad (v_s = 50\,\mathrm{\mu V})$$

ہو گا۔اسی طرح $v_s = 200\,\mathrm{\mu V}$ کی صورت میں جواب

$$v_0 = 99010 \times 200 \times 10^{-6} = 19.8\,\mathrm{V} \qquad \text{(اس جواب کو رد کیا جاتا ہے)}$$

متوقع ہے۔مساوات 4.6 کے تحت v_0 کی قیمت $10.5\,\mathrm{V}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی۔ایسی صورت میں حسابی ایمپلیفائر کوشش کرتا ہے کہ اس کا خارجی اشارہ $19.8\,\mathrm{V}$ تک پہنچے لیکن ایسا ممکن نہیں ہے لہٰذا v_0 بڑھتے بڑھتے $10.5\,\mathrm{V}$ پر جا رکتا ہے۔یوں درست جواب درج ذیل ہے۔

$$v_0 = 10.5\,\mathrm{V} \qquad (v_s = 200\,\mathrm{\mu V})$$

داخلی اشارہ $2\,\mathrm{V}$ ہونے کی صورت میں $v_0 = 198\,\mathrm{kV}$ متوقع ہے جو حسابی ایمپلیفائر کے لئے حاصل کرنا نا ممکن ہے لہٰذا اب بھی

$$v_0 = 10.5\,\mathrm{V} \qquad (v_s = 2\,\mathrm{V})$$

ہو گا۔آخری داخلی اشارے کے لئے $v_0 = 99010 \times (-150 \times 10^{-6}) = -14.9\,\mathrm{V}$ متوقع لیکن نا قابل حصول جواب ہے اور یوں

$$v_0 = -10.8\,\mathrm{V} \qquad (v_s = -150\,\mathrm{\mu V})$$

ہو گا۔

مثال 4.3: گزشتہ مثال میں مختلف داخلی اشارات مہیا کرتے ہوئے حسابی ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ حاصل کیا گیا۔آپ سے گزارش ہے کہ داخلی اشارے کے وہ حدود حاصل کریں جن کے اندر رہتے ہوئے v_0 اور v_s کا تعلق خطی ہو گا۔

حل: ہم دیکھتے ہیں کہ جب تک خارجی اشارہ مساوات 4.5 میں دیے حدود کے اندر رہتا ہے اس وقت تک v_0 اور v_s خطی تعلق[10] $A_v = \frac{v_0}{v_s}$ رکھتے ہیں۔مندرجہ بالا مثال میں بالائی حد

$$v_{s,\text{بلند تر}} = \frac{v_0}{A_d} = \frac{10.5}{99010} = 106\,\mu\text{V}$$

پر اور نچلی حد

$$v_{s,\text{کمتر}} = \frac{v_0}{A_d} = \frac{-10.8}{99010} = -109\,\mu\text{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔یوں حسابی ایمپلیفائر اس وقت تک داخلی اشارے کو خطی طور پر بڑھاتا ہے جب تک داخلی اشارہ درج ذیل حدود میں رہے۔

$$-109\,\mu\text{V} < v_s < 106\,\mu\text{V}$$

ان حدود میں رہتے ہوئے v_d کے حدود شکل 4.5 سے بذریعہ تقسیم دباو یوں حاصل ہوتے ہیں۔

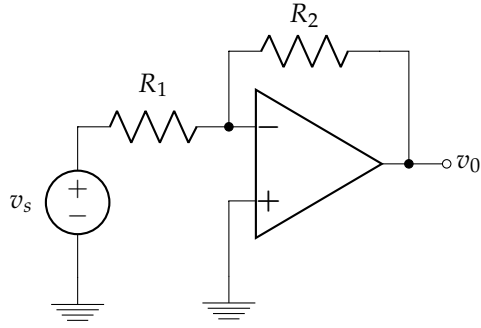
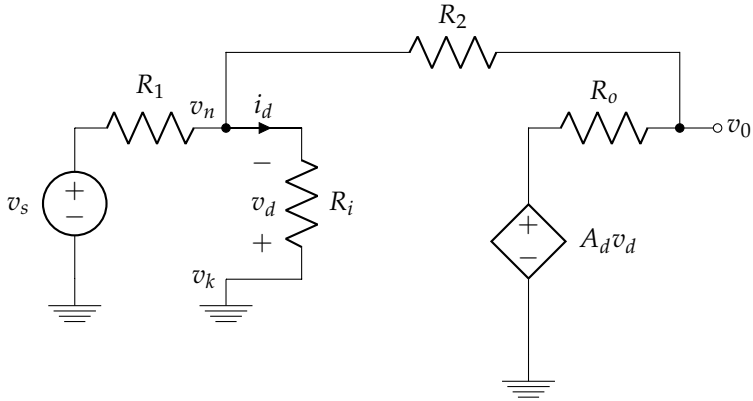
$$v_{d,\text{بلند تر}} = \frac{R_i v_s}{R_i + R_S} = \frac{10^{12} \times 106\,\mu\text{V}}{10^{12} + 5 \times 10^4} \approx 106\,\mu\text{V}$$
$$v_{d,\text{کمتر}} = \frac{10^{12} \times (-109\,\mu\text{V})}{10^{12} + 5 \times 10^4} \approx -109\,\mu\text{V}$$

یوں جب تک

$$-109\,\mu\text{V} < v_d < 106\,\mu\text{V} \tag{4.7}$$

رہے، حسابی ایمپلیفائر خطی رہتا ہے۔

مثال 4.4: شکل 4.6 میں حسابی ایمپلیفائر کو یوں پلٹایا گیا ہے کہ اس کا مثبت سرا نیچے اور منفی سرا اوپر ہے۔اس کی افزائش دباو $A_v = \frac{v_0}{v_s}$ حاصل کریں۔

[10] linear relationship

شکل 4.6: منفی ایمپلیفائر اور اس کا مساوی دور۔

حل: شکل 4.6-الف میں حسابی ایمپلیفائر کی جگہ اس کا نمونہ نسب کرنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے جسے کرخوف کے قوانین سے حل کیا جا سکتا ہے۔شکل-ب ایمپلیفائر کا مساوی دور ہے۔منفی داخلی پنیے پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\frac{v_n - v_s}{R_1} + \frac{v_n}{R_i} + \frac{v_n - v_0}{R_2} = 0$$

جسے

$$v_n \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{v_s}{R_1} + \frac{v_o}{R_2}$$

لکھتے ہوئے v_n حاصل کرتے ہیں۔

$$v_n = \frac{\frac{v_s}{R_1} + \frac{v_o}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2}} \tag{4.8}$$

خارجی جوڑ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\frac{v_0 - v_n}{R_2} + \frac{v_0 - A_d v_d}{R_o} = 0$$

جس میں $v_d = -v_n$ پُر کرتے اور ترتیب دیتے ہوئے

$$v_0 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) = v_n \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A_d}{R_o} \right)$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 4.8 کی مدد سے اس کو

$$v_0 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) = \frac{\left(\frac{v_s}{R_1} + \frac{v_o}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A_d}{R_o} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2}}$$

یا

$$v_0 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) = \left(\frac{v_s}{R_1} + \frac{v_o}{R_2} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A_d}{R_o} \right)$$

یعنی

$$v_0 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o} \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{v_0}{R_o} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A_d}{R_o} \right) = \frac{v_s}{R_1} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{A_d}{R_o} \right)$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو حل کرتے ہوئے درج ذیل افزائش دباو A_v ملتی ہے۔

$$\frac{v_0}{v_s} = A_v = \frac{\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{A_d}{R_o}\right)}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_o}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{A_d}{R_o}\right)}$$

اس کو درج ذیل صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{v_0}{v_s} = A_v = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 - \left[\frac{\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_o}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_i}+\frac{1}{R_2}\right)}{\left(\frac{1}{R_2}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{A_d}{R_o}\right)}\right]} \tag{4.9}$$

مثال 4.4 میں عمومی قیمتیں یعنی

$$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_i = 10^8\,\Omega, \quad R_o = 100\,\Omega, \quad A_d = 10^5\,\mathrm{V\,V^{-1}}$$

پُر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{-10}{1 - \left[\frac{(0.0101)(0.001101)}{(0.0001)\left(0.0001 - \frac{100000000}{100}\right)}\right]} \\ &= -9.999\,998\,888\,\mathrm{V\,V^{-1}} \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\frac{A_d}{R_o}$ جزو کے علاوہ تمام قوسین کی قیمتیں انتہائی چھوٹی ہیں۔آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ A_d کی قیمت زیادہ ہونے کی وجہ سے چکور قوسین کی قیمت تقریباً صفر کے برابر حاصل ہوتی ہے لہٰذا چکور قوسین کی قیمت کو رد کیا جا سکتا ہے اور یوں مساوات 4.9 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$A_v = \frac{v_0}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{4.10}$$

اس مساوات سے افزائش دباو

$$A_v = -\frac{10000}{1000} = -10\,\mathrm{V\,V^{-1}}$$

حاصل ہوتی ہے۔بالائی دو جوابات تقریباً برابر ہیں جبکہ نچلا جواب انتہائی آسانی سے حاصل ہوا۔آئیں حسابی ایمپلیفائر حل کرنے کا انتہائی آسان طریقہ سیکھیں۔اس طریقے میں کامل حسابی ایمپلیفائر استعمال کیا جاتا ہے لہٰذا پہلے کامل حسابی ایمپلیفائر پر غور کرتے ہیں۔

4.1 کامل حسابی ایمپلیفائر

ہم نے دیکھا کہ حسابی ایمپلیفائر کے داخلی مزاحمت R_i کی قیمت بڑی مقدار ہے۔اسی طرح A_d کی قیمت بھی بڑی مقدار ہے جبکہ R_0 کی قیمت بیرونی لاگو مزاحمتوں کی نسبت سے بہت کم ہے۔**کامل حسابی ایمپلیفائر**[11] میں R_i اور A_d کو لامحدود جبکہ R_0 کو صفر تصور کیا جاتا ہے۔

$$R_i \to \infty \tag{4.11}$$

$$A_d \to \infty \tag{4.12}$$

$$R_o \to 0 \tag{4.13}$$

مثال 4.3 میں ہم نے v_d کے وہ حدود حاصل کئے جن میں رہتے ہوئے v_0 اور v_s کا تعلق خطی ہوتا ہے۔حسابی ایمپلیفائر کو خطی خطے میں ہی چلایا جاتا ہے۔مساوات 4.7 میں یہ حدود دیے گئے ہیں جہاں سے واضح ہے کہ کسی بھی حقیقی دور میں v_d کی مطلق قیمت تقریباً سو ملی وولٹ رہتی ہے جو نہایت کم مقدار ہے۔کامل حسابی ایمپلیفائر میں v_d کو صفر تصور کیا جاتا ہے۔

$$v_d \to 0 \tag{4.14}$$

چونکہ $v_d = v_k - v_n$ کے برابر ہے لہٰذا مندرجہ بالا مساوات کو درج ذیل صورت میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_k = v_n \tag{4.15}$$

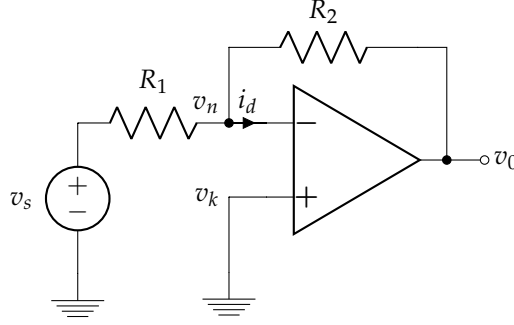
اگر $v_d = 100\,\mu\text{V}$ اور $R_i = 10^{12}\,\Omega$ لیا جائے تو شکل 4.6-ب میں $i_d = \frac{100\,\mu\text{V}}{10^{12}\,\Omega} \approx 0$ حاصل ہوتا ہے۔یوں کامل حسابی ایمپلیفائر کے دونوں داخلی پنیوں پر رو کی قیمت صفر تصور کی جاتی ہے۔

$$i_d = 0 \tag{4.16}$$

4.2 منفی ایمپلیفائر

گزشتہ مثال میں شکل 4.6 کو حل کیا گیا جسے یہاں بطور شکل 4.7 دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔کامل حسابی ایمپلیفائر تصور کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔ شکل میں داخلی دباو v_k اور v_n کی نشاندہی کی گئی ہے۔ساتھ ہی ساتھ حسابی ایمپلیفائر کی داخلی رو i_d بھی ظاہر کی گئی ہے۔کامل حسابی ایمپلیفائر کے ادوار حل کرتے ہوئے جوڑ v_k اور v_n پر کرخوف مساوات لکھ کر ان سے v_k اور v_n حاصل کریں۔مساوات 4.15 کے تحت یہ قیمتیں برابر ہونی چاہیں لہٰذا انہیں برابر پُر کرتے ہوئے v_0 کے لئے حل کریں۔آئیں ایسا ہی کرتے ہیں۔

---

[11] ideal opamp

شکل 4.7: منفی ایمپلیفائر۔

چونکہ جوڑ v_k زمین کے ساتھ جڑا ہے لہٰذا اس کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$v_k = 0$$

جوڑ v_n پر مساوات 4.16 کے تحت $i_d = 0$ لیتے ہوئے کرخوف قانون رو لکھتے ہیں۔

$$\frac{v_n - v_s}{R_1} + \frac{v_n - v_0}{R_2} = 0$$

چونکہ $v_k = 0$ ہے لہٰذا مساوات 4.15 کے تحت $v_n = 0$ ہو گا۔یہ قیمت درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہیں۔

$$\frac{0 - v_s}{R_1} + \frac{0 - v_0}{R_2} = 0$$

اس کو حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{v_0}{v_s} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{4.17}$$

مساوات 4.10 سے موازنہ کریں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کامل حسابی ایمپلیفائر تصور کرتے ہوئے جواب نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔

شکل 4.6 کا دور داخلی اشارہ v_s کو بڑھانے کے ساتھ ساتھ منفی سے ضرب بھی دیتا ہے لہٰذا اس دور کو **منفی ایمپلیفائر**[12] کہتے ہیں۔

[12] inverting amplifier

عموماً $R_2 > R_1$ ہوتا ہے اور یوں خارجی اشارے کا حیطہ داخلی اشارے کے حیطے سے زیادہ ہوتا ہے۔افزائش سے مراد اشارے کا حیطہ بڑھانا ہی ہے البتہ ایسی کوئی وجہ نہیں کہ $R_1 > R_2$ نہ رکھا جا سکے۔ایسا کرنے سے خارجی اشارے کا حیطہ داخلی اشارے کے حیطے سے کم ہو گا۔دونوں صورتوں میں $-\frac{R_2}{R_1}$ کو افزائش ہی کہا جاتا ہے۔

مندرجہ بالا مثال میں افزائش A_v کی مقدار حسابی ایمپلیفائر کے ساتھ بیرونی جڑے مزاحمت R_1 اور R_2 پر منحصر ہے۔حسابی ایمپلیفائر کے متغیرات A_d ، R_i اور R_o کا افزائش پر کوئی اثر نہیں۔اس کا مطلب ہے کہ شکل 4.7 میں حسابی ایمپلیفائر تبدیل کرنے سے افزائش تبدیل نہیں ہوتی۔حسابی ایمپلیفائر کے متغیرات درجہ حرارت، وقت اور دیگر طبعی اثرات کے ساتھ تبدیل ہوتے ہیں جبکہ مزاحمت کی قیمت میں تبدیلی انتہائی کم ہوتی ہے جسے رد کیا جا سکتا ہے۔چونکہ منفی ایمپلیفائر کی افزائش ان متغیرات پر منحصر نہیں لہٰذا اس کی افزائش اٹل تصور کی جا سکتی ہے۔اس کتاب میں یہاں سے آگے حسابی ایمپلیفائر کو کامل تصور کرتے ہوئے تمام ادوار حل کئے جائیں گے۔

مثال 4.5: منفی ایمپلیفائر کی افزائش $A_v = -15\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ درکار ہے۔مزاحمتوں کی قیمتیں دریافت کریں۔اگر $v_s = -0.2\,\mathrm{V}$ ہو تب v_0 کیا ہو گا۔

حل: منفی ایمپلیفائر کے افزائش کا قلیہ $A_v = -\frac{R_2}{R_1}$ ہے جس سے $R_2 = 15R_1$ لکھا جا سکتا ہے۔ادوار تخلیق کرتے ہوئے عموماً ایسی صورت کا سامنا کرنا پڑتا ہے جہاں کلیات سے تمام متغیرات حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔موجودہ مثال بھی ایسی ہے۔ایسی صورت میں کسی ایک متغیرہ یا ایک سے زیادہ متغیرات کے قیمتیں چنی جاتی ہیں جس کے بعد بقایا متغیرات کو کلیات سے حاصل کیا جاتا ہے۔عموماً متغیرات چنتے وقت دیگر ضروریات کو مد نظر رکھا جاتا ہے۔

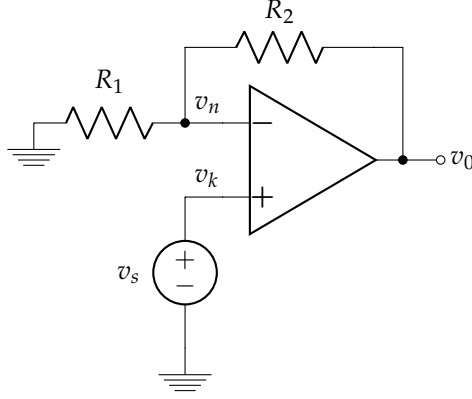
حسابی ایمپلیفائر کے ادوار میں مزاحمتوں کی قیمت $1\,\mathrm{k\Omega}$ تا $100\,\mathrm{k\Omega}$ رکھتے ہوئے ٹھیک ادوار بنتے ہیں لہٰذا ہم

$$R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$$

چن سکتے ہیں جس سے $R_2 = 15\,\mathrm{k\Omega}$ حاصل ہوتا ہے۔

دیے گیے اشارے کی صورت میں خارجی اشارہ

$$v_0 = A_v v_s = -15 \times (-0.2) = 3\,\mathrm{V}$$

ہو گا۔

شکل 4.8: مثبت ایمپلیفائر۔

4.3 مثبت ایمپلیفائر

مثبت ایمپلیفائر[13] کو شکل 4.8 میں دکھایا گیا ہے۔اس کی افزائش $\frac{v_0}{v_s}$ حاصل کرتے ہیں۔

مثبت داخلی پنیا کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$v_k = v_s \tag{4.18}$$

منفی داخلی پنیا پر $i_d = 0$ لیتے ہوئے کرخوف مساوات رو لکھ

$$\frac{v_n}{R_1} + \frac{v_n - v_0}{R_2} = 0$$

کر v_n کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$v_n = \frac{\frac{v_0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \tag{4.19}$$

مساوات 4.18 اور مساوات 4.19 میں حاصل کردہ v_k اور v_n کی قیمتیں برابر پُر کرتے ہیں۔

$$v_s = \frac{\frac{v_0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

---

non-inverting amplifier[13]

اس کو $\frac{v_0}{v_s}$ کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$A_v = \frac{v_0}{v_s} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \tag{4.20}$$

مثال 4.6: مثبت ایمپلیفائر میں $R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ اور $R_2 = 8\,\mathrm{k\Omega}$ ہیں جبکہ $v_s = 0.5 \sin 100t$ ہے۔ خارجی اشارہ حاصل کریں۔

حل: افزائش

$$A_v = 1 + \frac{8000}{2000} = 5\,\mathrm{V\,V^{-1}}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ خارجی اشارہ درج ذیل ہو گا۔

$$v_0 = A_v v_s = 5 \times 0.5 \sin 100t = 2.5 \sin 100t \quad (\mathrm{V})$$

4.4 مستحکم کار

شکل 4.8 میں $R_1 = \infty$ اور $R_2 = 0$ پُر کرنے سے شکل 4.9 حاصل ہوتا ہے اور مساوات 4.20 سے

$$A_v = \frac{v_0}{v_s} = 1 + \frac{0}{\infty} = 1$$

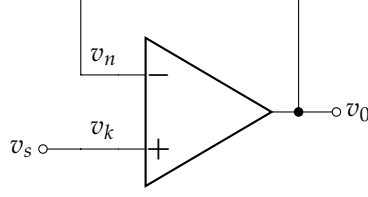
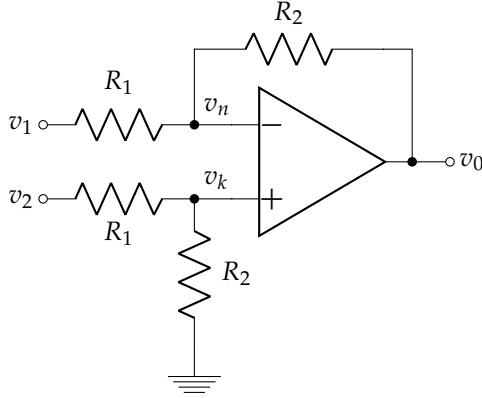
یعنی

$$v_0 = v_s \tag{4.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 4.9 **مستحکم کار**[14] کہلاتا ہے۔ مساوات 4.21 حاصل کرنے کی دوسری منطق یہ ہے کہ چونکہ $v_k = v_s$ ہے لہٰذا v_n بھی v_s کے برابر ہو گا۔ اب v_n اور v_0 ایک ہی جوڑ کے دو نام ہیں لہٰذا

$$v_0 = v_s \tag{4.22}$$

ہو گا۔

[14] buffer

شکل 4.9: مستحکم کار۔

شکل 4.10: منفی کار۔

4.5 منفی کار

شکل 4.10 میں R_1 دو جگہ نسب ہے۔اس کا مطلب ہے کہ دونوں جگہ پر R_1 قیمت کے مزاحمت نسب ہیں۔اسی طرح دو جگھوں پر R_2 نسب ہے جس کا مطلب ہے کہ ان جگھوں پر R_2 قیمت کے مزاحمت نسب ہیں۔ مثبت اور منفی داخلی پنیوں کے کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں۔

$$\frac{v_n - v_1}{R_1} + \frac{v_n - v_0}{R_2} = 0$$
$$\frac{v_k - v_2}{R_1} + \frac{v_k}{R_2} = 0$$

ان سے v_n اور v_k حاصل کرتے ہیں۔

$$v_n = \frac{\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$
$$v_k = \frac{\frac{v_2}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

v_n اور v_k کو برابر پُر کرتے ہیں۔

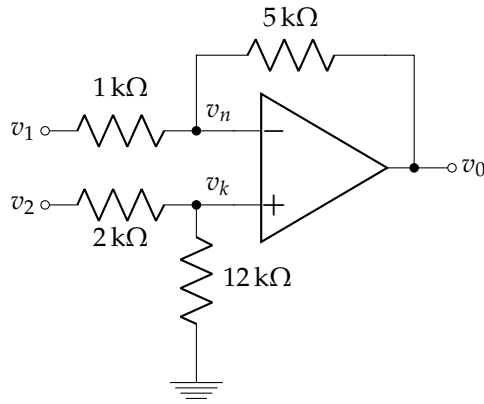
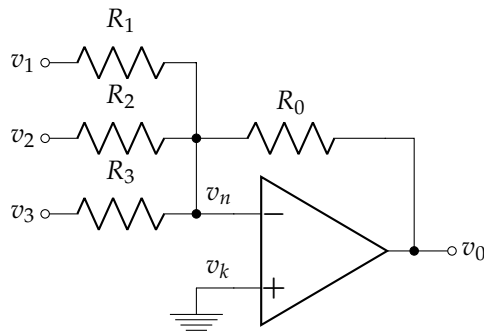
$$\frac{\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{\frac{v_2}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

مساوی نشان کے دونوں اطراف کسر کے نچلے حصے برابر ہونے کی وجہ سے کٹ جاتے ہیں۔بقایا مساوات کو v_0 کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_0 = \frac{R_2}{R_1}(v_2 - v_1) \tag{4.23}$$

اس مساوات میں $R_1 = R_2$ کی صورت میں خارجی اشارہ داخلی اشارات کے فرق کے برابر ہے۔اسی لئے اس دور کو منفی کار[15] کہتے ہیں۔بیرونی مزاحمت برابر نہ ہونے کی صورت میں داخلی اشارات کے فرق کو $\frac{R_2}{R_1}$ گنا بڑھایا بھی جاتا ہے۔

مشق 4.1: شکل 4.11 میں v_0 کی مساوات دریافت کریں۔خارجی اشارہ $v_1 = -0.15\,\text{V}$ اور $v_2 = 0.7\cos 50t$ کی صورت میں کیا ہو گی؟

جوابات: $v_0 = -5v_1 + \frac{36v_2}{7}$ ، $v_0 = \frac{3}{4} + 3.6\cos 50t$

شکل 4.11: مشق 4.1 کا دور۔

شکل 4.12: جمع کار۔

4.6 جمع کار

جمع کار[16] کو شکل 4.12 میں دکھایا گیا ہے۔ داخلی پنیوں پر مساوات لکھتے ہیں۔

$$v_k = 0$$
$$\frac{v_n - v_1}{R_1} + \frac{v_n - v_2}{R_2} + \frac{v_n - v_3}{R_3} + \frac{v_n - v_0}{R_0} = 0$$

چونکہ $v_k = 0$ ہے لہٰذا $v_n = 0$ ہو گا۔ یہ قیمت مندرجہ بالا مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{0 - v_1}{R_1} + \frac{0 - v_2}{R_2} + \frac{0 - v_3}{R_3} + \frac{0 - v_0}{R_0} = 0$$

اسے v_0 کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$v_0 = -R_0 \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3} \right) \tag{4.24}$$

اگر تمام بیرانی مزاحمتوں کی قیمتیں برابر ہوں یعنی اگر $R_1 = R_2 = R_3 = R_0$ ہو تب مندرجہ بالا مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$v_0 = -\left(v_1 + v_2 + v_3 \right) \tag{4.25}$$

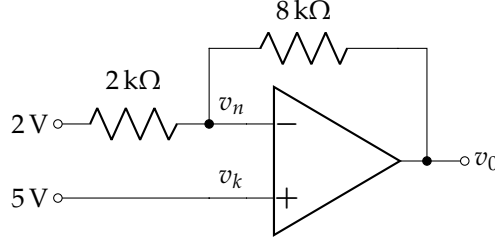
اس مساوات کے تحت خارجی اشارہ تمام داخلی اشارات کے مجموعے کے منفی برابر ہے۔اسی لئے اس دور کو جمع کار کہتے ہیں۔بیرونی مزاحمتیں برابر نہ ہونے کی صورت میں داخلی اشارات کے قدر[17] مختلف تصور کرتے ہوئے ان کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔یوں پہلے اشارے کی قدر $\frac{R_0}{R_1}$ لی گئی ہے جبکہ دوسرے اشارے کی قدر $\frac{R_0}{R_2}$ لی گئی ہے۔شکل 4.12 میں مزید داخلی اشارات شامل کئے جا سکتے ہیں۔

مثال 4.7: شکل 4.13 میں v_0 دریافت کریں۔

حل: جوڑ v_n پر کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$\frac{v_n - 2}{2000} + \frac{v_n - v_0}{8000} = 0$$

---

subtractor[15]
adder[16]
weightage[17]

شکل 4.13: مثال 4.7 کا دور۔

جس سے

$$v_n = \frac{8+v_0}{5}$$

حاصل ہوتا ہے۔ جوڑ v_k کے لئے

$$v_k = 5$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دونوں جوڑ کی قیمتیں برابر پُر کرتے ہیں۔

$$\frac{8+v_0}{5} = 5$$

اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_0 = 17\,\mathrm{V}$$

اگر مثبت طاقتی دباو اس قیمت سے زیادہ ہو تب یہی جواب درست ہو گا۔

4.7 متوازن اور غیر متوازن صورت

حسابی ایمپلیفائر مخلوط دور[18] ہے جس میں متعدد مزاحمت اور ٹرانزسٹر[19] پائے جاتے ہیں۔ ٹرانزسٹر کے بارے میں آپ برقیات[20] کی کتاب میں پڑھیں گے۔

[18] integrated circuit, IC
[19] transistor
[20] electronics

برقی اشارہ موصل تار میں تقریباً روشنی کی رفتار سے سفر کرتا ہے۔یوں ٹرانزسٹر کا داخلی اشارہ تبدیل ہونے کا اثر ٹرانزسٹر کے خارجی اشارے پر کچھ دیر بعد ہوتا ہے، اگرچہ یہ دورانیہ انتہائی کم ہوتا ہے۔حسابی ایمپلیفائر میں متعدد ٹرانزسٹر پائے جاتے ہیں لٰہذا حسابی ایمپلیفائر کے داخلی اشارے کے تبدیل ہونے کا اثر خارجی اشارے پر کچھ دیر بعد رونما ہو گا۔اسی طرح خارجی اشارہ کسی ایک قیمت سے دوسری قیمت کے دباو تک پہنچتے ہوئے کچھ وقت لیتا ہے۔شکل 4.14 میں مثبت ایمپلیفائر کے داخلی اشارے کو یک دم[21] تبدیل ہوتا دکھایا گیا ہے۔مثبت ایمپلیفائر کی قلیہ افزائش

$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1} \tag{4.26}$$

سے $A_v = 2\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ حاصل ہوتا ہے۔شکل میں خارجی اشارہ بھی دکھایا گیا ہے جہاں خارجی اشارہ تبدیل ہونے کے دورانیے کو بڑھا چڑھا کر پیش کیا گیا ہے۔حقیقت میں یہ دورانیہ چند مائیکرو سیکنڈ کا ہوتا ہے۔

آئیں شکل 4.14 پر تفصیلاً غور کریں۔منفی جوڑ پر کرخوف مساوات رو

$$\frac{v_n}{R_1} + \frac{v_n - v_0}{R_2} = 0$$

یعنی

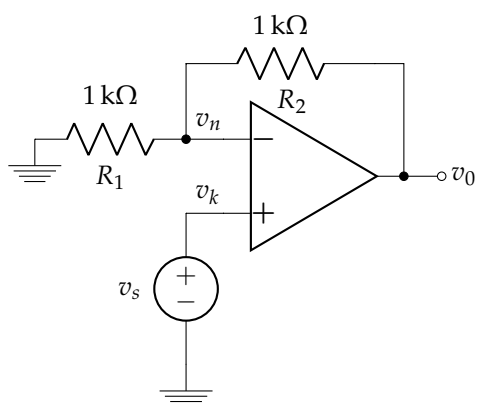
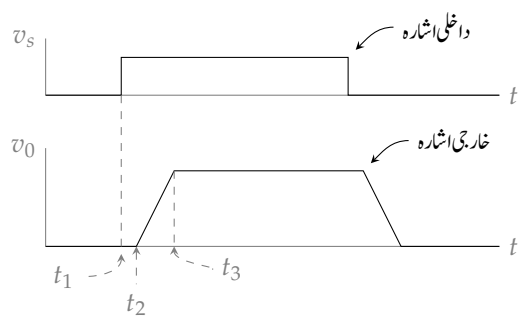
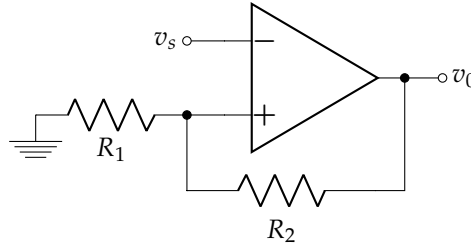
$$v_n = \frac{R_1 v_0}{R_1 + R_2} \tag{4.27}$$

ہے۔یہی مساوات شکل کو دیکھ کر تقسیم دباو کے قلیے سے بھی لکھی جا سکتی ہے۔

وقت $t = 0$ پر داخلی اشارہ $0\,\mathrm{V}$ ہے اور یوں مساوات 4.26 کے تحت $v_0 = 0\,\mathrm{V}$ ہو گا۔مساوات 4.27 میں $v_0 = 0\,\mathrm{V}$ پُر کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $v_n = 0\,\mathrm{V}$ ہے لٰہذا v_k اور v_n برابر ہیں۔

لمحہ t_1 پر داخلی اشارہ تبدیل ہو کر $1\,\mathrm{V}$ ہو جاتا ہے۔ابتدائی طور پر داخلی اشارے کا اثر خارجی اشارے پر نہیں ہو گا لٰہذا t_1 سے t_2 تک $v_0 = 0\,\mathrm{V}$ ہی رہے گا۔مساوات 4.27 میں $v_0 = 0\,\mathrm{V}$ پُر کرنے سے $v_n = 0\,\mathrm{V}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $v_k = v_s = 1\,\mathrm{V}$ ہے۔یوں t_1 تا t_2 دورانیے میں v_k اور v_n برابر نہیں ہیں۔اس طرح $v_d = v_k - v_n = 1\,\mathrm{V}$ ہو گا۔تفرقی داخلی اشارہ v_d مثبت ہونے کی وجہ سے حسابی ایمپلیفائر خارجی اشارے کو مثبت طاقتی دباو کی جانب بڑھانا شروع کرتا ہے۔یہ ردعمل خارجی اشارے پر لمحہ t_2 پر نمودار ہونا شروع ہوتا ہے۔لمحہ t_3 پر خارجی اشارہ $2\,\mathrm{V}$ پر پہنچتا ہے۔یوں t_3 پر مساوات 4.27 کے تحت

$$v_n = \frac{1000 \times 2}{1000 + 1000} = 1\,\mathrm{V}$$

[21] آپ یہاں سوال کر سکتے ہیں کہ اگر خارجی اشارہ یکدم تبدیل نہیں ہو سکتا تب داخلی اشارہ کس طرح یک دم تبدیل ہو سکتا ہے۔فی الحال بس فرض کریں کہ ایسا ہے۔

شکل 4.14: متوازن دور کی مثال۔

شکل 4.15: غیر متوازن دور کی مثال۔

ہو گا۔یوں ایک مرتبہ پھر $v_k = v_n$ یعنی $v_d = 0\,\mathrm{V}$ ہو گا۔داخلی تفرقی اشارہ صفر ہوتے ہی حسابی ایمپلیفائر خارجی اشارہ تبدیل کرنا روک دیتا ہے۔یوں $v_0 = 2\,\mathrm{V}$ پر برقرار رہتا ہے۔

آئیں دیکھیں کہ اگر کسی وجہ سے v_0 کی قیمت درکار قیمت ($2\,\mathrm{V}$) سے مختلف ہو تب حسابی ایمپلیفائر کا رد عمل کیا ہو گا۔فرض کریں کہ کسی طرح $v_0 = 2.2\,\mathrm{V}$ ہو جائے۔ایسی صورت میں مساوات 4.27 کے تحت

$$v_n = \frac{1000 \times 2.2}{1000 + 1000} = 1.1\,\mathrm{V}$$

ہو گا جبکہ $v_k = 1\,\mathrm{V}$ ہے لہٰذا $v_d = -0.1\,\mathrm{V}$ ہو گا جس کی وجہ سے حسابی ایمپلیفائر خارجی اشارے کو منفی طاقتی دباو کی جانب لے جانا شروع کرے گا یعنی v_0 کی قیمت $2.2\,\mathrm{V}$ سے گھٹنے شروع ہو جائے گی۔ہم دیکھتے ہیں کہ $v_k = 1\,\mathrm{V}$ کی صورت میں حسابی ایمپلیفائر کسی بھی صورت v_0 کی قیمت $2\,\mathrm{V}$ سے زیادہ برداشت نہیں کرتا۔اسی طرح v_0 کی قیمت $2\,\mathrm{V}$ سے کم ہونے کی صورت حال دیکھتے ہیں۔فرض کریں کہ $v_0 = 1.8\,\mathrm{V}$ ہو جائے تب مساوات 4.27 کے تحت

$$v_n = \frac{1000 \times 1.8}{1000 + 1000} = 0.9\,\mathrm{V}$$

اور $v_d = 1 - 0.9 = 0.1\,\mathrm{V}$ ہو گا اور یوں حسابی ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ v_0 مثبت طاقتی دباو کی جانب بڑھے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ حسابی ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ عین $2\,\mathrm{V}$ پر آ رکتا ہے۔

مندرجہ بالا تبصرے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثبت ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ مساوات 4.26 اور v_s کی قیمت سے تعین ہوتا ہے۔آپ نے دیکھا کہ خارجی اشارہ درکار قیمت پر ہی ٹھہرتا ہے۔اس خاصیت کو **متوازن**[22] صورت کہتے ہیں۔

---

stable[22]

آئیں اب شکل 4.15 میں دکھائے دور پر غور کرتے ہیں۔فرض کریں کہ $R_1 = R_2 = 1\,\text{k}\Omega$ اور $v_s = 1\,\text{V}$ ہیں۔اگر $v_0 = 2\,\text{V}$ ہو تب منفی داخلی جوڑ پر کرخوف مساوات رو

$$v_k = \frac{R_1 v_n}{R_1 + R_2} \tag{4.28}$$

سے $v_n = 1\,\text{V}$ اور یوں $v_d = 0\,\text{V}$ حاصل ہوتا ہے۔ایسا معلوم ہوتا ہے کہ یہی صحیح جواب ہے۔آئیں v_0 کی قیمت میں تبدیلی کے اثرات دیکھیں۔فرض کریں کہ $v_0 = 2.2\,\text{V}$ ہو جاتا ہے۔ایسی صورت میں درج بالا مساوات کے تحت

$$v_k = \frac{1000 \times 2.2}{1000 + 1000} = 1.1\,\text{V}$$

اور $v_d = v_k - v_n = 1.1 - 1 = 0.1\,\text{V}$ ہو گا۔یوں خارجی اشارہ بڑھنے شروع ہو گا لیکن خارجی اشارہ جتنا بڑھتا ہے v_k اور v_d کی قیمتیں اتنی ہی زیادہ ہوتی چلی جاتی ہیں۔آخر کار $v_0 = V_{CC} - \Delta_+$ تک پہنچ کر رک جائے گا اور یہیں رکا رہے گا۔اس کے برعکس v_0 کی قیمت دو وولٹ سے کم ہونے کی صورت میں v_d منفی ہو گا لہٰذا خارجی اشارہ منفی جانب چل پڑیگا اور آخر کار $V_{EE} + \Delta_-$ پر جا رکے گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوانین کرخوف سے شکل 4.15 کا حاصل جواب (یعنی $v_0 = 2\,\text{V}$) **غیر متوازن**[23] صورت کو ظاہر کرتی ہے جو برقرار نہیں رہ سکتی۔ یوں حسابی ایمپلیفائر کے ادوار حل کرتے ہوئے دور کا متوازن یا غیر متوازن ہونے پر غور ضروری ہے۔اس کتاب میں ہم صرف متوازن ادوار پر غور کریں گے جو قوانین کرخوف سے قابل حل ہوں گے۔

4.8 موازنہ کار

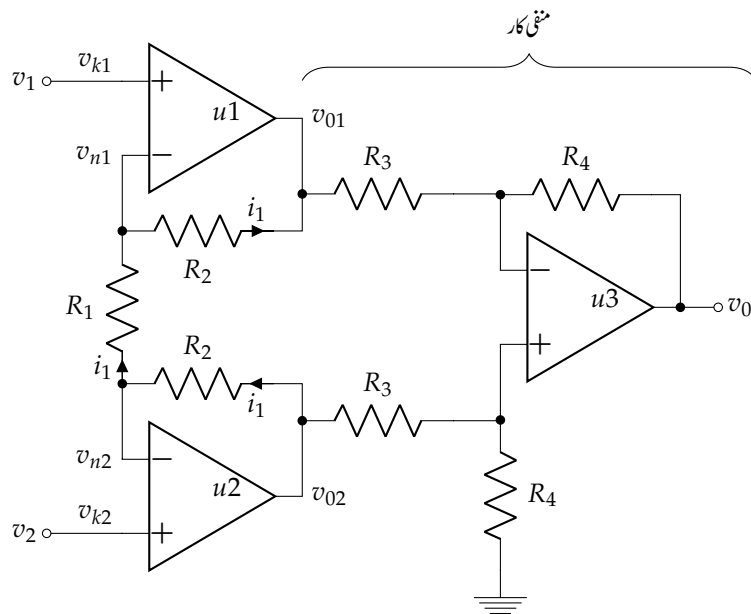
حسابی ایمپلیفائر کی ایک مخصوص صورت کو موازنہ کار[24] کہتے ہیں۔

لکھنا باقی ہے

4.9 آلاتی ایمپلیفائر

آلاتی ایمپلیفائر کو شکل 4.16 میں دکھایا گیا ہے۔ باریک اور حساس اشارات کی افزائش کے لئے اسے استعمال کیا جاتا ہے۔ اس کی کارکردگی پر غور کرتے ہیں۔

---

[23] unstable
[24] comparator

شکل 4.16: آلاتی ایمپلیفائر۔

چونکہ $v_{k2} = v_2$ ہے لہٰذا $v_{n2} = v_2$ ہو گا۔اسی طرح $v_{k1} = v_1$ کی بنا $v_{n1} = v_1$ ہو گا۔اس طرح مزاحمت R_1 پر دباو

$$v_{n2} - v_{n1} = v_2 - v_1$$

ہو گا جس سے اس کی رو قانون اوہم سے

$$i_1 = \frac{v_2 - v_1}{R_1} \tag{4.29}$$

لکھی جا سکتی ہے۔حسابی ایمپلیفائر کی داخلی رو صفر لیتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ i_1 نچلی اور بالائی مزاحمت R_2 سے گزرے گی۔یوں بالائی اور نچلی R_2 کے دو سروں کے مابین دباو

$$v_{n1} - v_{01} = v_1 - v_{01} = i_1 R_2$$
$$v_{02} - v_{n2} = v_{02} - v_2 = i_1 R_2$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$v_{01} = v_1 - i_1 R_2 \tag{4.30}$$
$$v_{02} = v_2 + i_1 R_2 \tag{4.31}$$

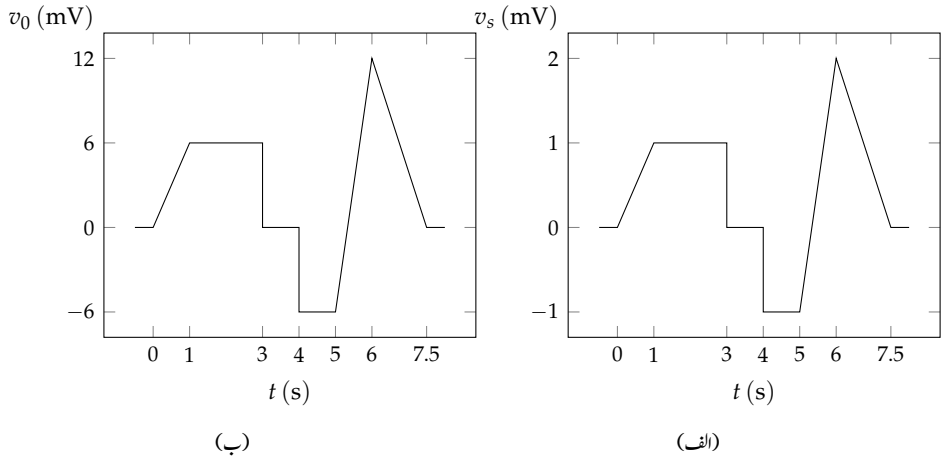
شکل 4.16 میں R_3 ، R_4 اور حسابی ایمپلیفائر $u3$ منفی کار کا دور ہے جس کی مساوات درج ذیل ہے۔

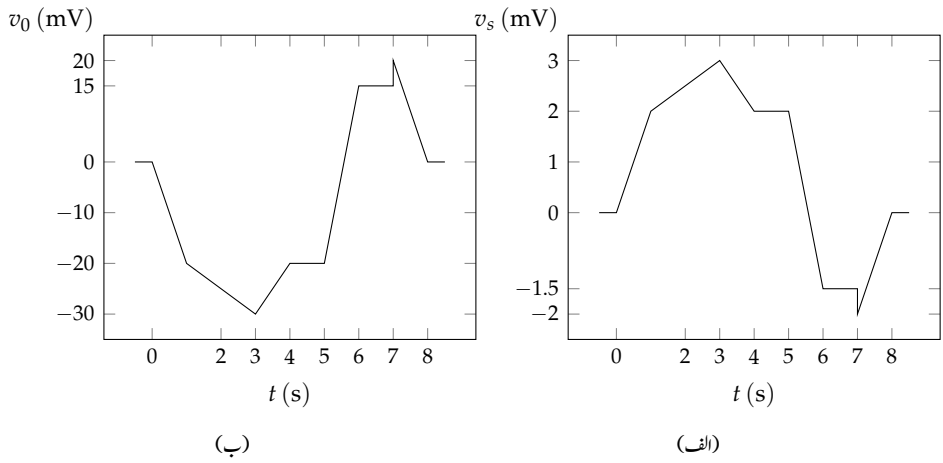
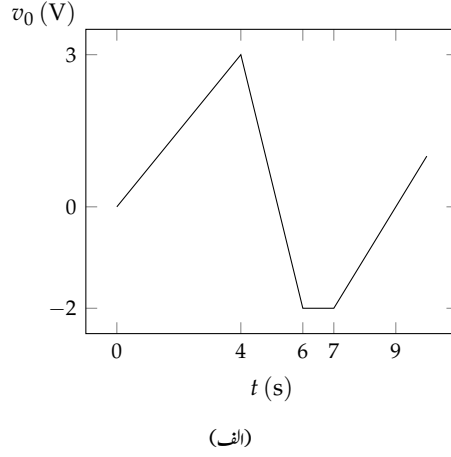
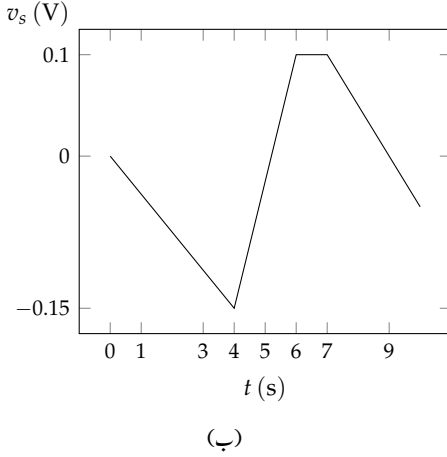
$$v_0 = \frac{R_4}{R_3}(v_{02} - v_{01})$$

اس میں مساوات 4.29 اور مساوات 4.30 استعمال کرتے ہوئے آلاتی ایمپلیفائر کی مساوات ملتی ہے۔

$$v_0 = \frac{R_4}{R_3}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)(v_2 - v_1) \qquad \text{آلاتی ایمپلیفائر کی مساوات} \tag{4.32}$$

سوالات

سوال 4.1: ایک حسابی ایمپلیفائر کی افزائش 6 ہے۔اس کا داخلی اشارہ شکل 4.17-الف میں دیا گیا ہے۔خارجی اشارے کا خط کھینچیں۔

جواب: شکل-ب

شکل 4.17: سوال 4.1 کے اشکال۔

شکل 4.18: سوال 4.2 کے اشکال۔

شکل 4.19: سوال 4.3 کے اشکال۔

سوال 4.2: ایک حسابی ایمپلیفائر کی افزائش -10 ہے۔اس کا داخلی اشارہ شکل 4.18-الف میں دیا گیا ہے۔خارجی اشارے کا خط کھینچیں۔

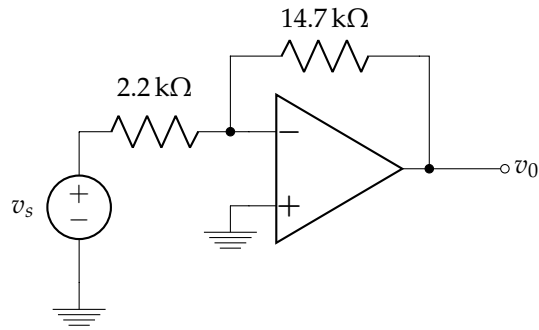
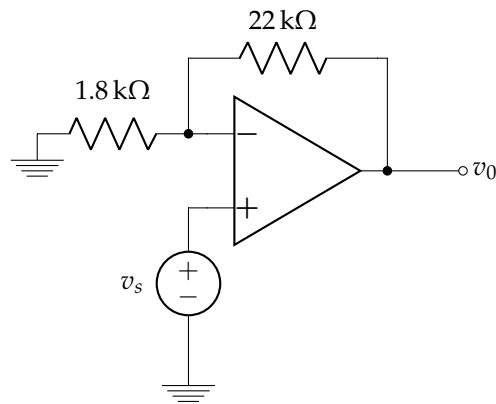
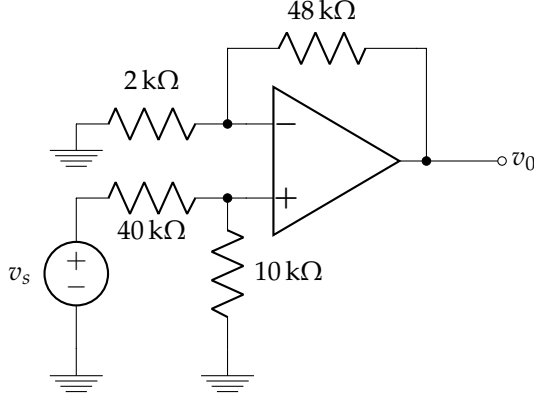
جواب: شکل-ب

سوال 4.3: ایک حسابی ایمپلیفائر کی افزائش -20 ہے اور اس کو $\mp 15\,\mathrm{V}$ طاقت فراہم کی جا رہی ہے۔اس کا خارجی اشارہ شکل 4.19-الف میں دیا گیا ہے۔داخلی اشارے کا خط کھینچیں۔

جواب: شکل-ب

سوال 4.4: کامل حسابی ایمپلیفائر کی داخلی مزاحمت لامتناہی اور خارجی مزاحمت صفر ہوتے ہیں۔ان کا داخلی رو اور داخلی دباو پر کیا اثر پایا جاتا ہے۔

حل: داخلی رو صفر ہوتی ہے۔ داخلی دباو صفر ہوتا ہے۔

سوال 4.5: شکل 4.20 کا افزائش دباو دریافت کریں اور $v_s = 0.23 \sin 10t\,\mathrm{V}$ کی صورت میں v_0 حاصل کریں۔

شکل 4.20: سوال 4.5 کا دور۔

شکل 4.21: سوال 4.6 کا دور۔

شکل 4.22: سوال 4.7 کا دور۔

جوابات: $A_v = -6.68\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ، $v_0 = -1.54\sin 10t\,\mathrm{V}$

سوال 4.6: شکل 4.21 کا افزائش دباو دریافت کریں اور $v_s = 0.16\cos 314t\,\mathrm{V}$ کی صورت میں v_0 حاصل کریں۔

جوابات: $A_v = 13.22\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ، $v_0 = 2.12\cos 314t\,\mathrm{V}$

سوال 4.7: شکل 4.22 کا افزائش دباو دریافت کریں۔

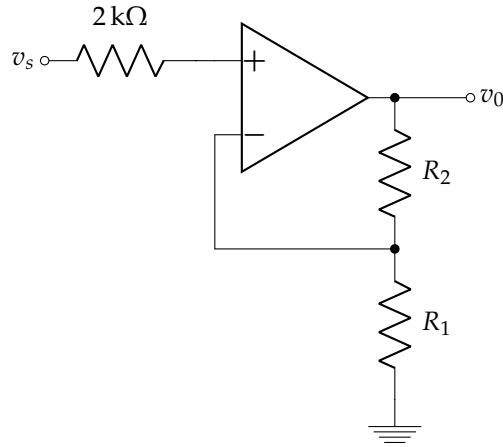
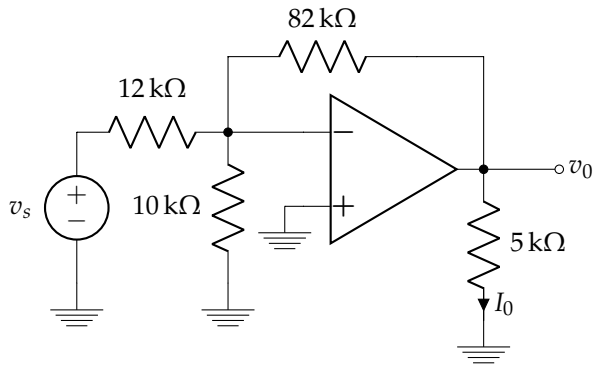
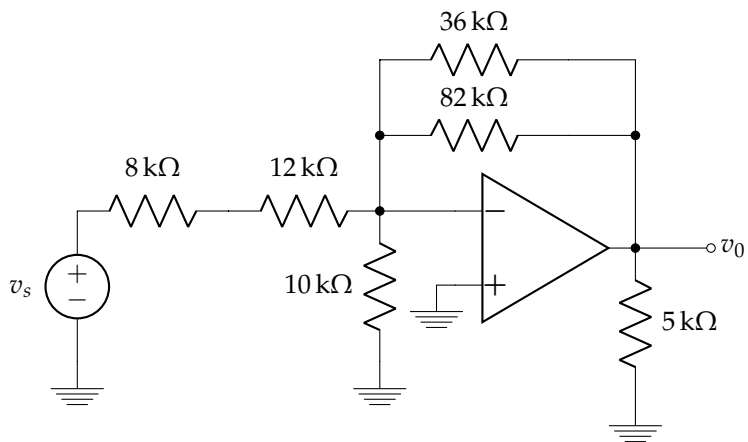
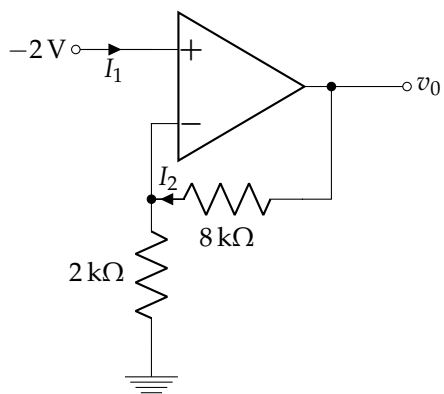
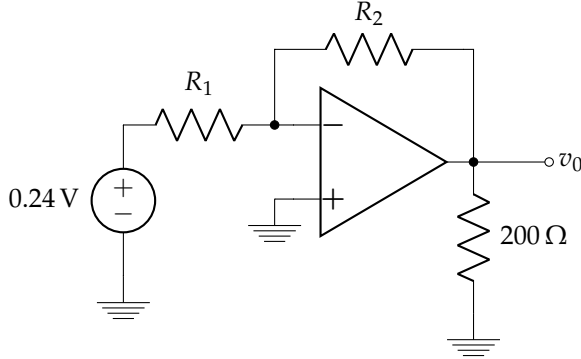
جوابات: $A_v = 5\,\mathrm{V\,V^{-1}}$

سوال 4.8: شکل 4.23 کا افزائش دباو دریافت کریں۔کامل حسابی ایمپلیفائر استعمال کیا گیا ہے۔

جوابات:داخلی جانب نسب $2\,\mathrm{k\Omega}$ کا افزائش پر کوئی اثر نہیں پایا جاتا لہٰذا $A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ ہے۔

سوال 4.9: شکل 4.24 کا افزائش دباو دریافت کریں۔داخلی دباو $v_s = 0.4\,\mathrm{V}$ کی صورت میں I_0 دریافت کریں۔

جوابات: $A_v = -\frac{41}{6}\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ، $I_0 = -\frac{41}{75}\,\mathrm{mA}$

سوال 4.10: شکل 4.25 کا افزائش دباو دریافت کریں۔

شکل 4.23: سوال 4.8 کا دور۔

شکل 4.24: سوال 4.9 کا دور۔

شکل 4.25: سوال 4.10 کا دور۔

شکل 4.26: سوال 4.11 کا دور۔

شکل 4.27: سوال 4.12 کا دور۔

جوابات: $A_v = -\frac{369}{295}\,\mathrm{V\,V^{-1}}$

سوال 4.11: شکل 4.26 میں کامل حسابی ایمپلیفائر استعمال کیا گیا ہے۔اس میں I_1 اور I_2 حاصل کریں۔

جوابات: $I_1 = 0$ ، $I_2 = -1\,\mathrm{mA}$

سوال 4.12: شکل 4.27 کا حسابی ایمپلیفائر $60\,\mathrm{mA}$ سے زیادہ رو مہیا نہیں کر سکتا۔ایمپلیفائر کو $\mp 18\,\mathrm{V}$ سے طاقت فراہم کی گئی ہے۔اس کی افزائش R_1 اور R_2 سے اس طرح تعین کی جاتی ہے کہ $R_1 + R_2 = 20\,\mathrm{k\Omega}$ رہے۔زیادہ سے زیادہ ممکنہ افزائش کیا ممکن ہے۔

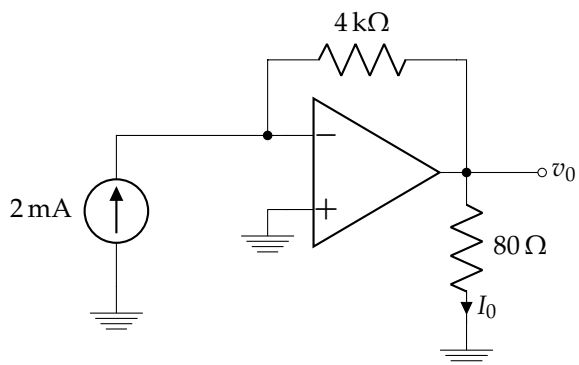
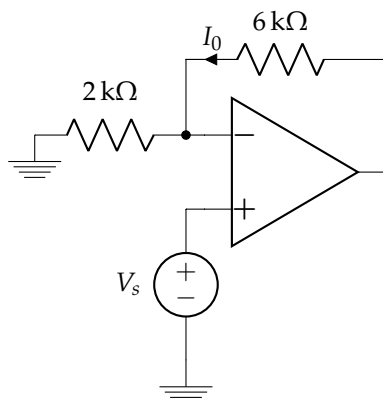
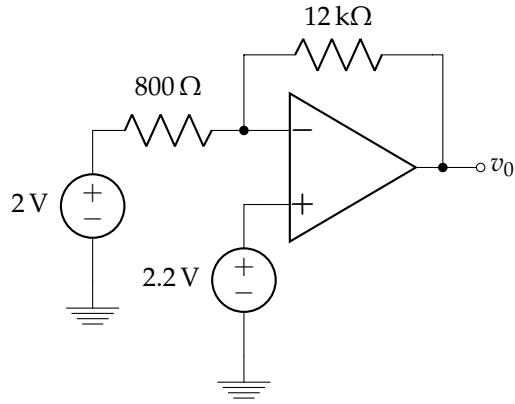
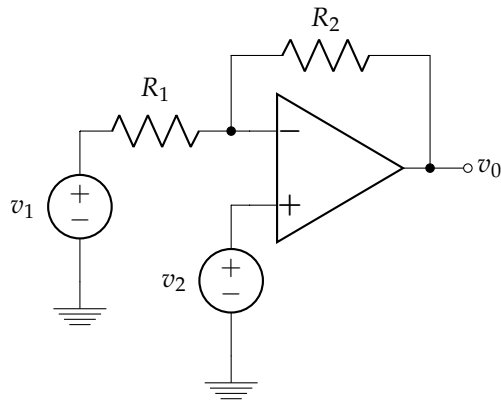
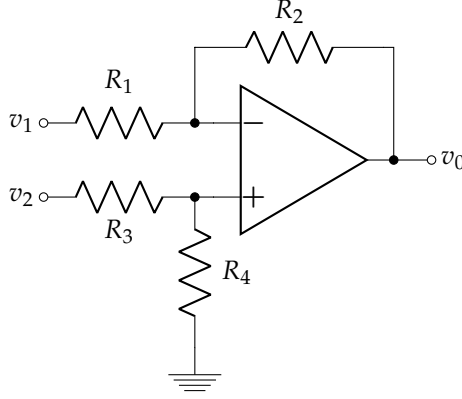
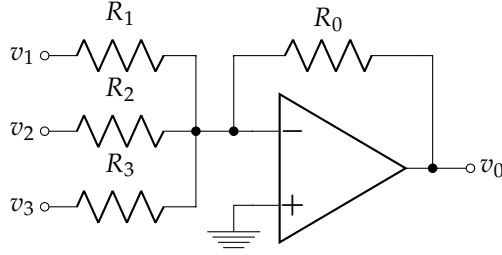
جوابات: $A_v = -50\,\mathrm{V\,V^{-1}}$

سوال 4.13: شکل 4.28 رو سے دباو حاصل کرتا ہے۔خارجی دباو v_0 حاصل کریں۔بیرونی بوجھ مزاحمت کی رو I_0 بھی حاصل کریں۔

جوابات: $v_0 = -8\,\mathrm{V}$ ، $I_0 = -100\,\mathrm{mA}$

سوال 4.14: شکل 4.29 میں موصل نما افزائش $\frac{I_0}{V_s}$ دریافت کریں۔

جوابات: $\frac{I_0}{V_s} = \frac{1}{2}\,\mathrm{mA\,V^{-1}}$

سوال 4.15: شکل 4.30 میں خارجی دباو v_0 دریافت کریں۔

شکل 4.28: سوال 4.13 کا دور۔

شکل 4.29: سوال 4.14 کا دور۔

شکل 4.30: سوال 4.15 کا دور۔

شکل 4.31: سوال 4.16 کا دور۔

شکل 4.32: سوال 4.17 کا دور۔

شکل 4.33: سوال 4.18 کا دور۔

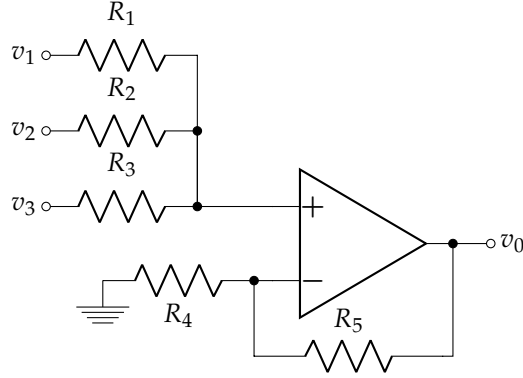
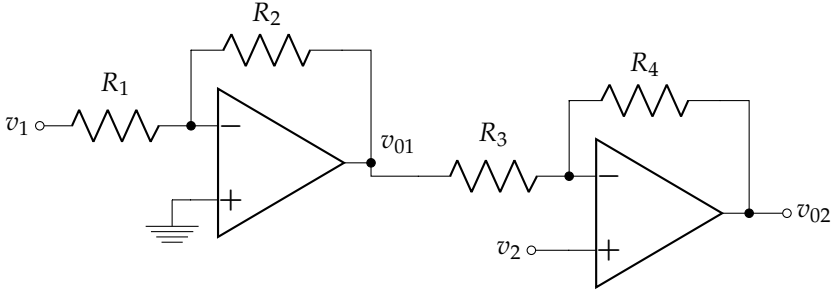
جوابات: $v_0 = 5.2\,\text{V}$

سوال 4.16: شکل 4.31 میں خارجی دباو v_0 اور داخلی دباو v_1 ، v_2 کا تعلق دریافت کریں۔

جوابات: $v_0 = (1 + \frac{R_2}{R_1})v_2 - \frac{R_2}{R_1}v_1$

سوال 4.17: شکل 4.32 میں خارجی دباو v_0 اور داخلی دباو v_1 ، v_2 کا تعلق دریافت کریں۔

جوابات: $v_0 = (\frac{R_1+R_2}{R_3+R_4})(\frac{R_4}{R_1})v_2 - \frac{R2}{R1}v_1$

سوال 4.18: شکل 4.33 میں v_0 حاصل کریں۔

شکل 4.34: سوال 4.19 کا دور۔

شکل 4.35: سوال 4.20 کا دور۔

جواب: $v_0 = -R_0\left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3}\right)$

سوال 4.19: شکل 4.34 میں v_0 حاصل کریں۔

جواب: $v_0 = \frac{1+\frac{R_5}{R_4}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}\left[\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_3}{R_3}\right]$

سوال 4.20: شکل 4.35 میں v_{01} اور v_1 کا تعلق دریافت کریں۔اب v_{02} کا v_2 اور v_{01} کے ساتھ تعلق دریافت کریں۔ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے v_{02} کا v_1 اور v_2 کے ساتھ تعلق لکھیں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
v_{01} &= -\frac{R_2}{R_1}v_1\\
v_{02} &= \left(1+\frac{R_4}{R_3}\right)v_2 - \frac{R_4}{R_3}v_{01}\\
v_{02} &= \left(1+\frac{R_4}{R_3}\right)v_2 + \frac{R_4R_2}{R_3R_1}v_1
\end{aligned}
$$

باب 5

مسئلے

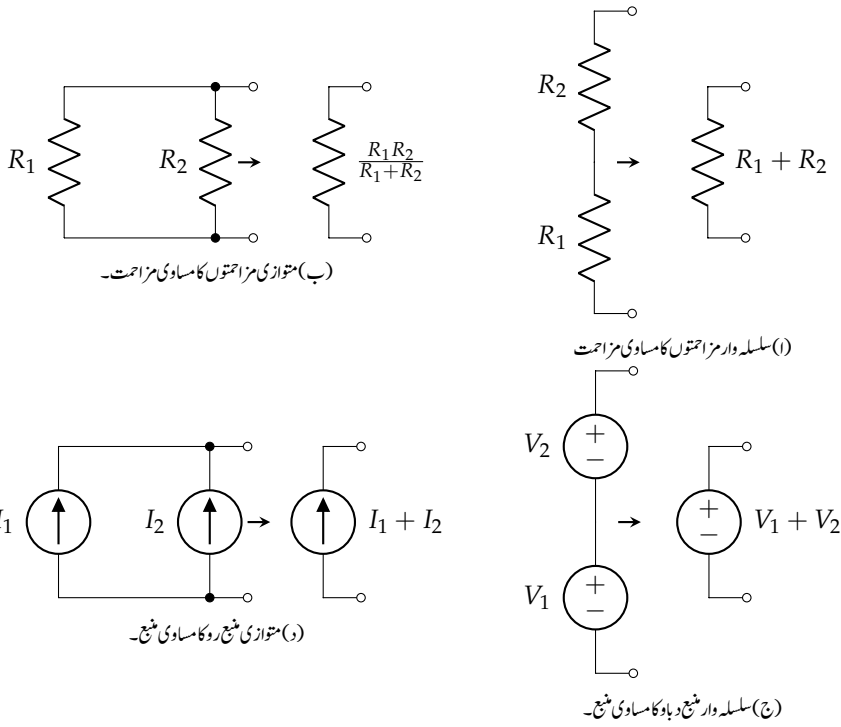
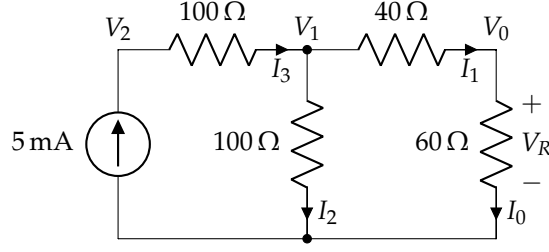
گزشتہ ابواب میں ہم نے ادوار میں مختلف مقامات پر دباو اور رو حاصل کرنے کے چند ترکیب دیکھے۔ایسا کرتے ہوئے ہم نے چند حقائق کا استعمال کیا جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

5.1 مساوی دور

آپ جانتے ہیں کہ سلسلہ وار مزاحمتوں کی جگہ ان کا مساوی مزاحمت نسب کرتے ہوئے ان کی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔اسی طرح متوازی مزاحمتوں کی جگہ ان کا مساوی مزاحمت نسب کرتے ہوئے ان پر دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہ عمل شکل 5.1 میں دکھائے گئے ہیں۔اسی طرح سلسلہ وار منبع دباو کا مساوی اور متوازی منبع رو کا مساوی بالترتیب شکل-ج اور شکل-د میں دکھائے گئے ہیں۔یاد رہے کہ دو یا دو سے زیادہ منبع رو کو صرف اور صرف اس صورت سلسلہ وار جوڑا جا سکتا ہے جب تمام کی رو برابر ہو اور تمام ایک ہی سمت میں ہوں۔ اسی طرح دو یا دو سے زیادہ منبع دباو کو صرف اور صرف اس صورت متوازی جوڑا جا سکتا ہے جب تمام منبع کے دباو برابر اور سمت ایک ہو۔

5.2 مسئلہ خطیّت

برقی ادوار میں دباو اور رو درکار متغیرات ہیں۔ اس کتاب میں صرف ایسے ادوار پر غور کیا جائے گا جن میں دباو اور رو کا تعلق خطی[1] ہے۔انہیں خطی ادوار کہا جاتا ہے۔ خطی ادوار میں ایک متغیرہ کو n گنا کرنے سے دوسرے متغیرات بھی n گنا ہو جاتے ہیں۔آئیں خطیت کی خاصیت سے دور حل کرنا دیکھیں۔

[1] linear

شکل 5.1: مساوی ادوار کی مثال۔

شکل 5.2: مثال 5.1 کا دور۔

مثال 5.1: شکل 5.2 میں $60\,\Omega$ پر دباو معلوم کریں۔

حل: ہم اس دور کو با آسانی قوانین کرخوف سے حل کر سکتے ہیں۔آئیں اس دور کو خطیت کی خاصیت کی مدد سے حل کریں۔اس ترکیب میں ہم درکار دباو کو $1\,\text{V}$ تصور کرتے ہوئے منبع رو کی قیمت دریافت کریں گے۔اس کے بعد خطیت کو استعمال کرتے ہوئے منبع رو کی اصل قیمت کے مطابقت سے درکار دباو حاصل کی جائے گی۔

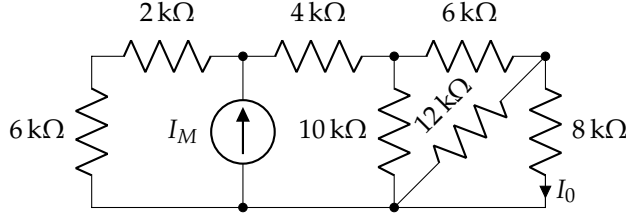
یوں $V_R = 1\,\text{V}$ تصور کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
V_0 &= 1\,\text{V} \\
I_0 &= \frac{V_0}{60} = \frac{1}{60}\,\text{A} \\
I_1 &= I_0 = \frac{1}{60}\,\text{A}
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ قانون اوہم استعمال کرتے ہوئے

$$V_1 - V_0 = 40 \times \frac{1}{60} = \frac{2}{3}\,\text{V}$$

یعنی

$$V_1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\,\text{V}$$

شکل 5.3: مشق 5.1 کا دور۔

حاصل ہوتا ہے۔ قانون اوہم کا دوبارہ استعمال کرنے سے

$$I_2 = \frac{\frac{5}{3}}{100} = \frac{1}{60}\,\text{A}$$

ملتا ہے لہٰذا

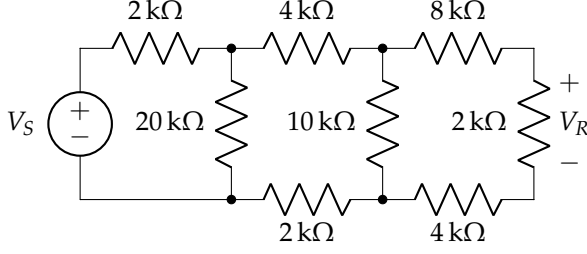
$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{30}\,\text{A}$$

ہو گا۔ یوں $V_R = 1\,\text{V}$ تصور کرتے ہوئے منبع کی رو $\frac{1}{30}\,\text{A}$ متوقع ہے۔

اب ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر منبع کی رو $\frac{1}{30}\,\text{A}$ ہو تب $V_R = 1\,\text{V}$ ہو گا لہٰذا خطیت کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ منبع کی رو $5\,\text{mA}$ ہونے کی صورت میں V_R کی قیمت

$$\frac{0.005 \times 1}{\frac{1}{30}} = 0.15\,\text{V}$$

ہو گی۔

مشق 5.1: شکل 5.3 میں $I_0 = 10\,\text{mA}$ تصور کرتے ہوئے I_M حاصل کریں۔ اب $I_M = 20\,\text{mA}$ کی صورت میں خطیت کے استعمال سے I_0 معلوم کریں۔

شکل 5.4: مشق 5.2 کا دور۔

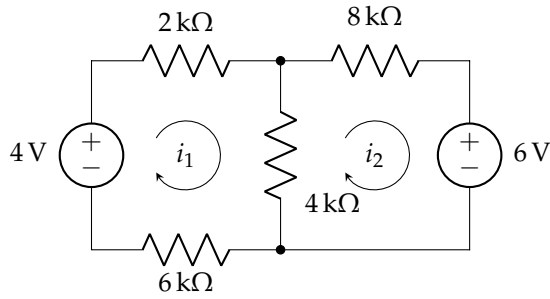
جوابات: $I_M = 74.5\,\text{mA}$ ، $I_0 = 2.685\,\text{mA}$

مشق 5.2: شکل 5.4 میں $V_R = 2\,\text{V}$ تصور کرتے ہوئے منبع دباو کی قیمت دریافت کریں۔خطیت کے استعمال سے $V_S = 50\,\text{V}$ پر V_R دریافت کریں۔

جوابات: $V_s = \frac{901}{25}\,\text{V}$ ، $V_0 = 2.77\,\text{V}$

5.3 مسئلہ خطی میل

متعدد منبع کی صورت میں ہر منبع کا انفرادی اثر دیکھنے کی خاطر شکل 5.5-الف کو مثال بناتے ہیں۔ دونوں منبع کا مجموعی اثر دیکھنے کی خاطر دونوں منبع کی موجودگی میں اس دور کو حل کرتے ہیں۔دو خانوں کے مساوات لکھتے ہیں۔

$$-4 + 2000i_1 + 4000(i_1 - i_2) + 6000i_1 = 0$$
$$4000(i_2 - i_1) + 8000i_2 + 6 = 0$$

(الف) دو عدد انفرادی منبع کا مجموعی اثر۔

(ب) بائیں منبع کا اثر دیکھتے وقت دائیں منبع کے اثر کو ختم کیا گیا ہے۔

(پ) دائیں منبع کا اثر دیکھتے وقت بائیں منبع کے اثر کو ختم کیا گیا ہے۔

شکل 5.5: مجموعی اثر انفرادی اثرات کا مجموعہ ہے۔

ان کا حل درج ذیل ہے۔

$$i_1 = \frac{3}{16}\,\text{mA}$$
$$i_2 = -\frac{7}{16}\,\text{mA}$$

انفرادی منبع سے دور میں مختلف مقامات پر نافذ دباو اور رو دریافت کرنے کی خاطر باری باری ایک ایک منبع کے علاوہ بقایا تمام منبع کے اثر کو ختم کرتے ہوئے دور کو حل کیا جاتا ہے۔منبع دباو کا اثر ختم کرنے کی خاطر اس کو قصر دور کیا جاتا ہے جبکہ منبع رو کے اثر کو ختم کرنے کی خاطر اس کو کھلے دور کیا جاتا ہے۔

آئیں انفرادی منبع کی نافذ رو دریافت کریں۔یوں $4\,\text{V}$ منبع کی نافذ رو حاصل کرتے وقت $6\,\text{V}$ کی منبع کو قصر دور کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے شکل 5.5-ب حاصل ہوتا ہے جس کے مساوات

$$-4 + 2000i_1' + 4000(i_1' - i_2') + 6000i_1' = 0$$
$$4000(i_2' - i_1') + 8000i_2' = 0$$

اور حل درج ذیل ہیں۔

$$i_1' = \frac{3}{8}\,\text{mA}$$
$$i_2' = \frac{1}{8}\,\text{mA}$$

اسی طرح $6\,\text{V}$ منبع کی نافذ رو حاصل کرنے کی خاطر $4\,\text{V}$ منبع کو قصر دور کیا جاتا ہے۔ایسا شکل 5.5-پ میں دکھایا گیا ہے جس کے مساوات

$$2000i_1'' + 4000(i_1'' - i_2'') + 6000i_1'' = 0$$
$$4000(i_2'' - i_1'') + 8000i_2'' + 6 = 0$$

اور حل درج ذیل ہیں۔

$$i_1'' = -\frac{3}{16}\,\text{mA}$$
$$i_2'' = -\frac{9}{16}\,\text{mA}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ انفرادی منبع کی نافذ رو کا مجموعہ تمام منبع کی مجموعی نافذ رو کے برابر ہے۔

$$i_1 = i_1' + i_1''$$
$$i_2 = i_2' + i_2''$$

اس حقیقت کو مسئلہ خطی میل[2] کہا جاتا ہے جسے درج ذیل طریقے سے بیان کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ خطی میل کے تحت کسی بھی خطی دور، جس میں متعدد غیر تابع منبع دباو اور غیر تابع منبع رو پائے جاتے ہوں، میں کسی بھی مقام پر نافذ دباو (رو)، تمام منبع کے انفرادی نافذ کردہ قیمتوں کے مجموعے کے برابر ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ہر منبع، دور میں یوں دباو اور رو نافذ کرتا ہے جیسے دور میں کوئی دوسرا منبع پایا ہی نا جاتا ہو۔

مسئلہ خطی میل کا عمومی ثبوت پیش کرتے ہیں۔صفحہ 176 پر مساوات 3.40 متعدد منبع دباو استعمال کرنے والے دور کی عمومی مساوات ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} & \cdots - R_{1m} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} & \cdots - R_{2m} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} & \cdots - R_{3m} \\ \vdots & & & \\ -R_{m1} & -R_{m2} & -R_{m3} & \cdots R_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

اس مساوات میں مزاحمتی قالب کا دارومدار صرف اور صرف مزاحمتوں پر ہے۔دور میں موجود منبع دباو کا اس قالب پر کوئی اثر نہیں ہے۔اس قالبی مساوات $\mathbf{RI} = \mathbf{V}$ کا حل $\mathbf{I} = \mathbf{R^{-1}V}$ ہے۔ چونکہ مزاحمتی قالب $\mathbf{R}$ کے اجزاء صرف اور صرف دور کے مزاحمتوں پر مبنی ہے لہٰذا اس کے ریاضی معکوس $\mathbf{R^{-1}}$ کے اجزاء بھی صرف مزاحمتوں پر مبنی ہوں گے۔ریاضی معکوس کے قالب کو درج ذیل عمومی شکل میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathbf{R^{-1}} = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12} & -g_{13} & \cdots - g_{1m} \\ -g_{21} & g_{22} & -g_{23} & \cdots - g_{2m} \\ -g_{31} & -g_{32} & g_{33} & \cdots - g_{3m} \\ \vdots & & & \\ -g_{m1} & -g_{m2} & -g_{m3} & \cdots g_{mm} \end{bmatrix}$$

یوں حل درج ذیل ہو گا

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & -g_{12} & -g_{13} & \cdots - g_{1m} \\ -g_{21} & g_{22} & -g_{23} & \cdots - g_{2m} \\ -g_{31} & -g_{32} & g_{33} & \cdots - g_{3m} \\ \vdots & & & \\ -g_{m1} & -g_{m2} & -g_{m3} & \cdots g_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

---

[2] superposition

جس سے i_1 لکھتے ہیں۔

$$i_1 = g_{11}v_1 - g_{12}v_2 - g_{13}v_3 - \cdots - g_{1m}v_m \tag{5.2}$$

اگر v_1 کے علاوہ تمام منبع دباو کو قصر دور کیا جائے تب ان کی قیمت $0\,\mathrm{V}$ پُر کرتے ہوئے مساوات 5.2 سے

$$i_1' = g_{11}v_1$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ صرف اور صرف v_1 کی نافذ رو ہے۔اسی طرح v_2 کے علاوہ تمام منبع کو قصر دور کرنے سے $i_1'' = -g_{12}v_2$ نافذ ہوتی ہے۔اسی طرح بقایا منبع دباو کی نافذ رو بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تمام منبع کی انفرادی نافذ رو کا مجموعہ مساوات 5.2 دیتی ہے۔

مساوات 5.1 ان ادوار کو ظاہر کرتی ہے جن میں صرف منبع دباو پائے جاتے ہوں۔آپ اسی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے منبع رو کے اثرات کو بھی شامل کر سکتے ہیں۔

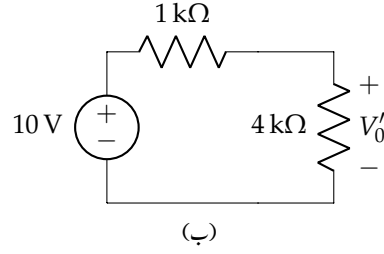
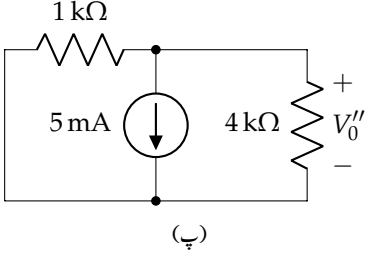
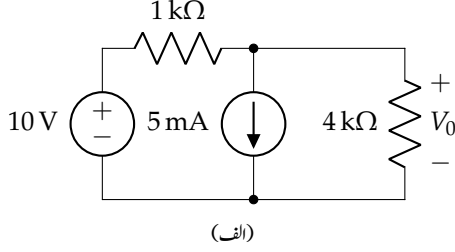
مسئلہ خطی میل ان ادوار پر بھی لاگو ہوتا ہے جن میں تابع منبع پائے جاتے ہوں البتہ تابع منبع دباو کو قصر دور اور تابع منبع رو کو کھلے دور نہیں کیا جاتا۔ آئیں مسئلہ خطی میل کا استعمال چند مثالوں کی مدد سے سیکھیں۔

مثال 5.2: شکل 5.6 میں منبع دباو اور منبع رو کے انفرادی نافذ دباو حاصل کرتے ہوئے کل V_0 حاصل کریں۔

حل: منبع رو کو کھلے سر کرتے ہوئے شکل 5.6-ب حاصل ہوتا ہے جس سے منبع دباو کا پیدا کردہ V_0' بذریعہ تقسیم دباو کے کلیے سے حاصل کرتے ہیں۔

$$V_0' = 10\left(\frac{4000}{1000+4000}\right) = 8\,\mathrm{V}$$

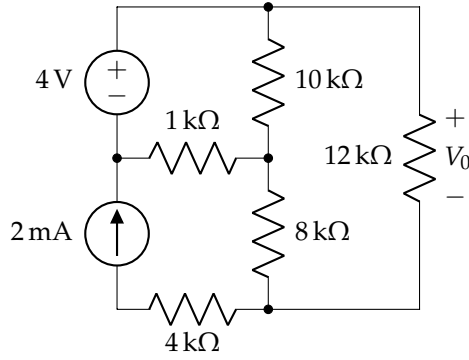
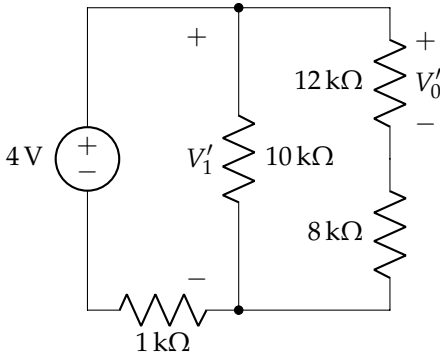
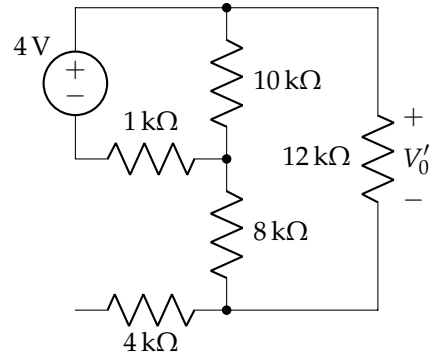
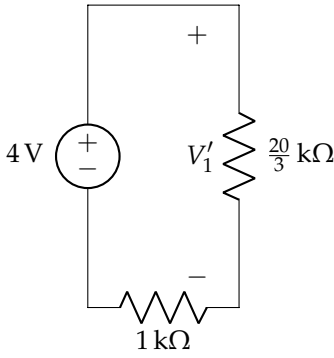
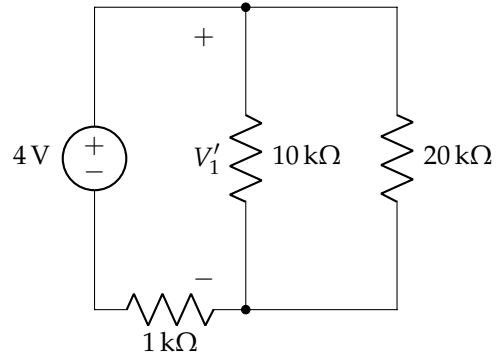
منبع دباو کو قصر دور کرتے ہوئے شکل 5.6-پ حاصل ہوتا ہے جس سے منبع رو کا پیدا کردہ V_0'' بذریعہ قانون اوہم حاصل کرتے ہیں۔

$$V_0'' = -5\,\mathrm{mA}\left(\frac{1\,\mathrm{k\Omega}\times 4\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{k\Omega}+4\,\mathrm{k\Omega}}\right) = -4\,\mathrm{V}$$

شکل 5.6: مثال 5.2 کا دور۔

یوں دونوں منبع کی موجودگی میں کل دباو V_0' اور V_0'' کا مجموعہ ہو گا۔

$$V_0 = V_0' + V_0'' = 8 - 4 = 4\,\mathrm{V}$$

مثال 5.3: شکل 5.7 میں منبع دباو اور منبع رو کو باری باری لیتے ہوئے $12\,\mathrm{k\Omega}$ پر نافذ دباو حاصل کرتے ہوئے دونوں منبع کی موجودگی میں کل دباو حاصل کریں۔

حل: شکل 5.7 میں منبع رو کو کھلا دور کرتے ہوئے شکل 5.8-الف حاصل ہوتا ہے جس سے منبع دباو سے پیدا کل دباو کا حصہ دریافت کیا جائے گا۔ شکل 5.8-ب میں شکل کو قدر مختلف صورت دی گئی ہے۔ چونکہ $4\,\mathrm{k\Omega}$ کا ایک سرا کہیں نہیں جڑا لہٰذا اس کا بقایا دور پر کوئی اثر نہیں ہو گا اور اسی لئے اس کو شکل-ب میں نہیں دکھایا گیا ہے۔

شکل 5.7: مثال 5.3 کا دور۔

شکل 5.8: منبع دباو کا حصہ معلوم کرتے ہیں۔

شکل-ب میں $12\,\mathrm{k\Omega}$ اور $8\,\mathrm{k\Omega}$ سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا ان کا مساوی مزاحمت $20\,\mathrm{k\Omega}$ ہو گا۔ شکل-پ میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ شکل-پ میں $20\,\mathrm{k\Omega}$ اور $10\,\mathrm{k\Omega}$ متوازی جڑے ہیں لہٰذا ان کا مساوی مزاحمت $\frac{20\,\mathrm{k\Omega}\times 10\,\mathrm{k\Omega}}{20\,\mathrm{k\Omega}+10\,\mathrm{k\Omega}}=\frac{20}{3}\,\mathrm{k\Omega}$ ہو گا جسے شکل-ت میں دکھایا گیا ہے جہاں سے تقسیم دباو کے کلیے سے

$$V_1'=4\left(\frac{\frac{20}{3}\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{k\Omega}+\frac{20}{3}\,\mathrm{k\Omega}}\right)=\frac{80}{23}\,\mathrm{V}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ شکل-ب کو دیکھتے ہوئے تقسیم دباو کے کلیے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

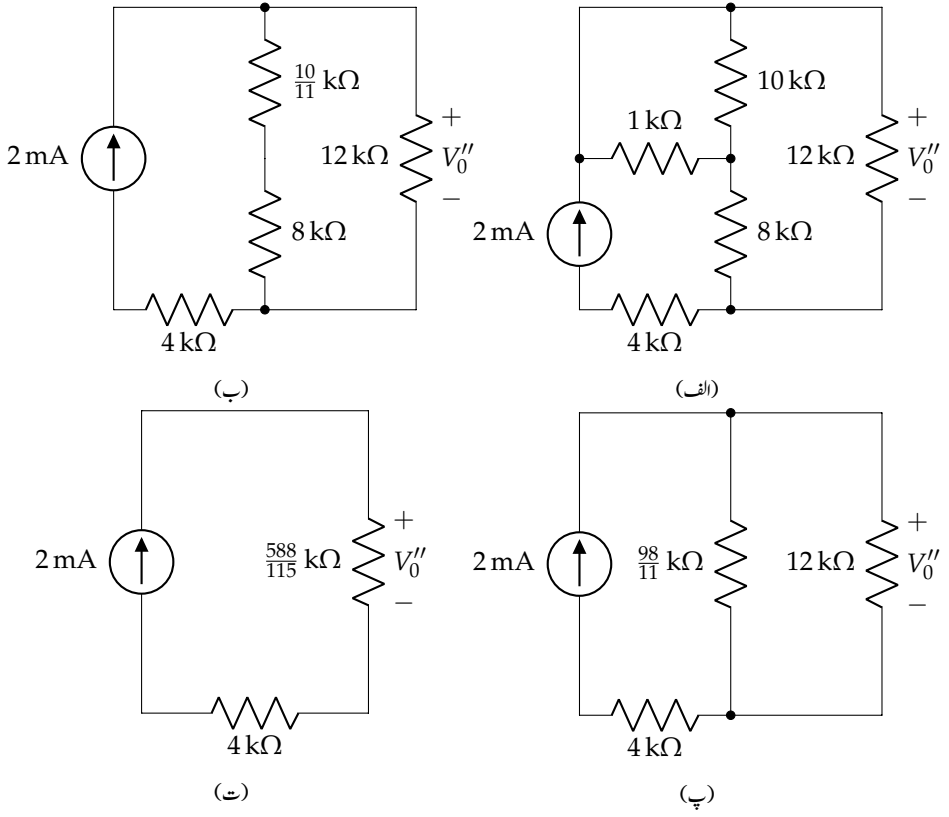
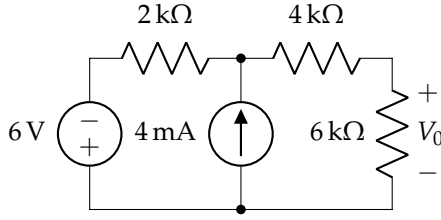
$$V_0'=\frac{80}{23}\left(\frac{12\,\mathrm{k\Omega}}{12\,\mathrm{k\Omega}+8\,\mathrm{k\Omega}}\right)=\frac{48}{23}\,\mathrm{V}$$

آئیں اب منبع دباو کو قصر دور کرتے ہوئے حل کریں۔ شکل 5.9-الف میں منبع دباو کو قصر دور کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $1\,\mathrm{k\Omega}$ اور $10\,\mathrm{k\Omega}$ متوازی جڑے ہیں لہٰذا ان کی جگہ $\frac{1\,\mathrm{k\Omega}\times 10\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{k\Omega}+10\,\mathrm{k\Omega}}=\frac{10}{11}\,\mathrm{k\Omega}$ نسب کیا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی شکل-ب میں کیا گیا ہے جہاں $\frac{10}{11}\,\mathrm{k\Omega}$ اور $8\,\mathrm{k\Omega}$ سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا ان کی جگہ شکل-پ میں $\frac{98}{11}\,\mathrm{k\Omega}$ نسب کیا گیا ہے۔ شکل-ت میں متوازی جڑے $\frac{98}{11}\,\mathrm{k\Omega}$ اور $12\,\mathrm{k\Omega}$ کی جگہ $\frac{588}{115}\,\mathrm{k\Omega}$ نسب کیا گیا ہے۔ اس شکل سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$V_0''=\frac{588}{115}\,\mathrm{k\Omega}\times 2\,\mathrm{mA}=\frac{1176}{115}\,\mathrm{V}$$

یوں دونوں منبع کی موجودگی میں جواب درج ذیل ہو گا۔

$$V_0=V_0'+V_0''=12\frac{36}{115}\,\mathrm{V}$$

مسئلہ خطی میل سے متعدد منبع استعمال کرنے والے ادوار حل کرتے ہوئے ضروری نہیں کہ تمام منبع کے انفرادی نافذ حصوں کو علیحدہ علیحدہ جانا جائے۔ یوں بھی ممکن ہے کہ منبع کے گروہ بناتے ہوئے باری باری ایک ایک گروہ کے مجموعی نافذ دباو یا رو دیکھیں جائیں اور آخر میں تمام کا مجموعہ لیا جائے۔ مسئلہ خطی میل سے دور میں کسی بھی مقام پر نافذ دباو یا نافذ رو حاصل کیا جا سکتا ہے البتہ اس مسئلے کا اطلاق طاقت دریافت کرنے کے لئے نہیں کیا جا سکتا۔ آپ جانتے ہیں کہ مزاحمت میں طاقت کو $\frac{V^2}{T}$ یا I^2R لکھا جا سکتا ہے جو غیر خطی تعلق ہیں لہٰذا طاقت کو مسئلہ خطی میل کی مدد سے حاصل نہیں کیا جا سکتا۔

شکل 5.9: منبع دباو کو قصر دور کیا گیا ہے۔

شکل 5.10: مشق 5.3 کا دور۔

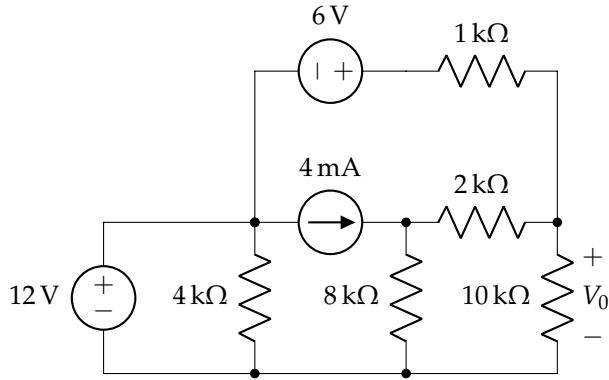
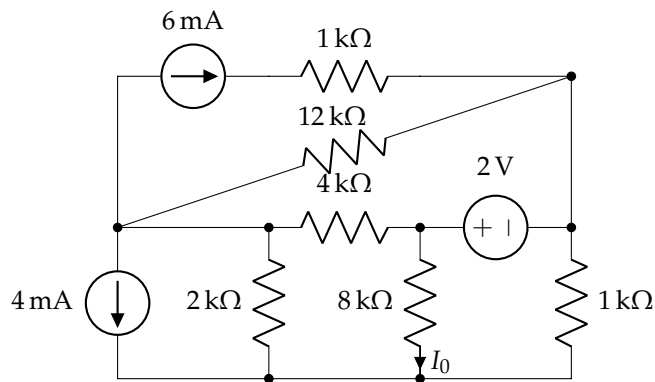
مشق 5.3: شکل 5.10 میں پہلے منبع رو اور بعد میں منبع دباو کا حصہ معلوم کرتے ہوئے کل دباو V_0 دریافت کریں۔

جوابات: $4\,\text{V}$ ، $-3\,\text{V}$ ، $V_0 = 1\,\text{V}$

مشق 5.4: شکل 5.11 میں مسئلہ خطی میل کی مدد سے V_0 دریافت کریں۔

جوابات: $10\,\text{V}$ ، $5\,\text{V}$ ، $\frac{8}{3}\,\text{V}$ ، $V_0 = \frac{53}{3}\,\text{V}$

مشق 5.5: شکل 5.12 کو مسئلہ خطی میل سے حل کرتے ہوئے I_0 دریافت کریں۔

جوابات: $0.201\,\text{mA}$ ، $0.309\,\text{mA}$ ، $-0.165\,\text{mA}$ ، $I_0 = 0.345\,\text{mA}$

شکل 5.11: مشق 5.4 کا دور۔

شکل 5.12: مشق 5.5 کا دور۔

مشق 5.6: شکل 5.13 میں $6\,\mathrm{V}$ منبع کے اثر کو ختم کرتے ہوئے $10\,\mathrm{V}$ اور $3\,\mathrm{mA}$ منبع کا مجموعی نافذ رو i' حاصل کریں۔اب اکیلے $6\,\mathrm{V}$ منبع کا اسی مزاحمت میں نافذ رو i'' دریافت کریں۔دونوں جوابات سے تینوں منبع سے پیدا مجموعی رو $i = i' + i''$ دریافت کریں۔

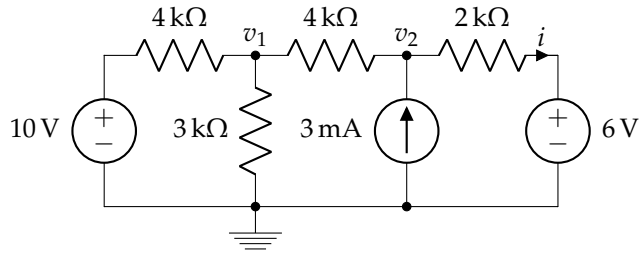
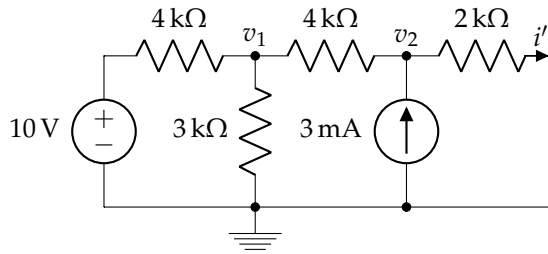
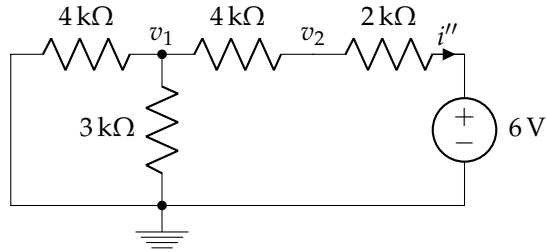
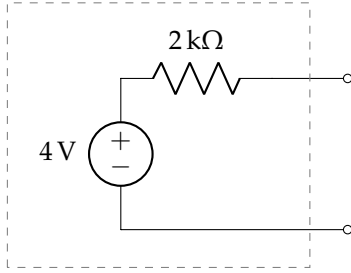
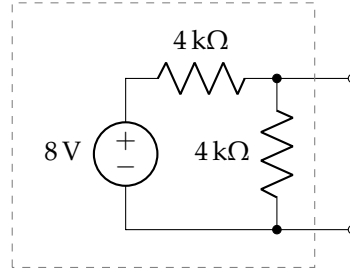
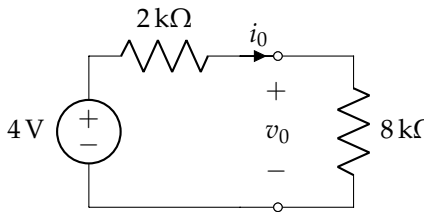
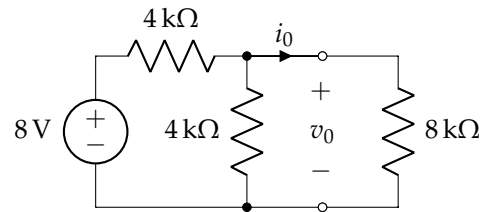
جوابات: شکل 5.13-ب سے $i' = \frac{25}{9}\,\mathrm{mA}$ اور شکل 5.13-پ سے $i'' = -\frac{7}{9}\,\mathrm{mA}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں شکل-الف میں $i = 2\,\mathrm{mA}$ حاصل ہوتا ہے۔

5.4 مساوی ادوار

شکل 5.14 میں دو عدد ادوار نقطہ دار لکیر میں بند دکھائے گئے ہیں۔تصور کریں کہ نقطہ دار لکیر بند ڈبے کو ظاہر کرتی ہے جس کے اندر دیکھنا ممکن نہیں ہے۔ہم بند ڈبے سے باہر نکلتی برقی سروں پر مختلف مزاحمت یا ادوار نسب کرتے ہوئے معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ ان کے اندر کیا نسب ہے۔

مثال 5.4: شکل 5.14-الف اور شکل 5.14-ب کے برقی سروں پر $8\,\mathrm{k\Omega}$ مزاحمت نسب کرتے ہوئے برقی سروں پر دباو اور رو حاصل کریں۔بند ڈبے کو نہیں دکھایا گیا تا کہ شکل صاف ستھری نظر آئے۔

حل: شکل 5.15 میں صورت حال دکھایا گیا ہے جہاں v_0 اور i_0 مطلوب ہیں۔شکل 5.15-الف میں $4\,\mathrm{k\Omega} \parallel 8\,\mathrm{k\Omega} = \frac{8}{3}\,\mathrm{k\Omega}$ لیتے ہوئے تقسیم دباو کے کلیے سے

$$v_0 = 8\left(\frac{\frac{8}{3}\,\mathrm{k\Omega}}{\frac{8}{3}\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega}}\right) = \frac{16}{5}\,\mathrm{V}$$

شکل 5.13: مشق 5.6 کا دور۔

شکل 5.14: مساوی ادوار۔

شکل 5.15: مثال 5.4 کے ادوار۔

لکھا جا سکتا ہے اور یوں

$$i_0 = \frac{v_0}{8\,\mathrm{k\Omega}} = \frac{\frac{16}{5}}{8000} = \frac{2}{5}\,\mathrm{mA}$$

ہو گی۔ شکل 5.15-ب کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_0 = \frac{4 \times 8000}{4000 + 8000} = \frac{16}{5}\,\mathrm{V}$$
$$i_0 = \frac{4}{2000 + 8000} = \frac{2}{5}\,\mathrm{mA}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ شکل-الف اور شکل-ب دونوں سے یکساں جوابات حاصل ہوتے ہیں۔آئیں مزید تجربے کرتے ہوئے دیکھیں کہ بند ڈبوں میں کیا پایا جاتا ہے۔

مثال 5.5: شکل 5.14 کے برقی سروں پر سلسلہ وار جڑے منبع دباو اور مزاحمت نسب کرتے ہوئے شکل 5.16 میں دکھایا گیا ہے۔انہیں حل کریں۔

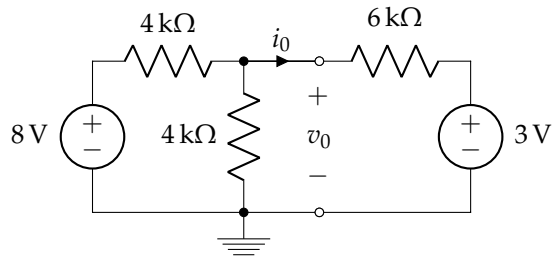
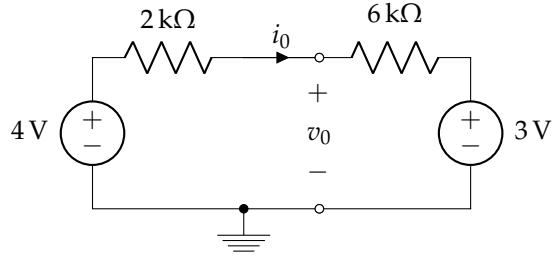
حل: نچلی جوڑ کو زمین چنتے ہوئے بالائی جوڑ پر دباو v_0 لکھی جائے گی۔یوں شکل 5.16-الف کے بالائی جوڑ پر درج ذیل کرخوف مساوات رو لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{v_0 - 8}{4000} + \frac{v_0}{4000} + \frac{v_0 - 3}{6000} = 0$$

جسے حل کرنے سے

$$v_0 = \frac{15}{4}\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے اور یوں

$$i_0 = \frac{v_0 - 3}{6000} = \frac{\frac{15}{4} - 3}{6000} = \frac{1}{8}\,\mathrm{mA}$$

شکل 5.16: مثال 5.5 کے ادوار۔

ہو گی۔آئیں اب شکل 5.16-ب کو حل کرتے ہیں۔ بالائی جوڑ پر کرخوف مساوات رو

$$\frac{v_0-4}{2000}+\frac{v_0-3}{6000}=0$$

سے

$$v_0=\frac{15}{4}\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ قانون اوہم سے رو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$i_0=\frac{4-3}{2000+6000}=\frac{1}{8}\,\mathrm{mA}$$

مندرجہ بالا دو مثالوں کے تجربات سے گمان ہوتا ہے کہ شکل 5.14 کے دونوں بند ڈبوں میں یکساں ادوار پائے جاتے ہیں۔ دیکھا یہ گیا ہے کہ دونوں بند ڈبوں کے بیرونی برقی سروں پر یکساں دور نسب کرنے سے بالکل یکساں جوابات حاصل ہوتے ہیں۔یہ ایک دلچسپ صورت حال ہے۔ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ شکل 5.14-الف اور شکل 5.14-ب مساوی ادوار[3] ہیں۔مزید یہ کہ شکل-الف کا دور، خطی ہونے کی صورت میں، جتنا بھی پیچیدہ کیوں نہ ہو، اس کا مساوی دور ایک عدد منبع اور ایک عدد مزاحمت سلسلہ وار جوڑنے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مساوی ادوار صرف اور صرف برقی سروں پر یکساں جوابات دیتے ہیں۔اس حقیقت کو سمجھنے کی خاطر شکل 5.14 میں برقی سرے کھلے رکھتے ہوئے دونوں ادوار میں طاقت کا ضیاع دریافت کرتے ہیں۔ شکل-الف میں طاقت کا ضیاع

$$\frac{8^2}{4000+4000}=8\,\mathrm{mW}$$

ہے جبکہ شکل-ب میں طاقت کا ضیاع $0\,\mathrm{W}$ ہے۔مساوی ادوار کے اندرونی متغیرات عموماً یکساں نہیں ہوتے۔

اگلے حصے میں تھونن مساوی دور اور نارٹن مساوی دور پر غور کیا جائے گا۔ان پر غور کرتے ہوئے مسئلہ تبادلہ منبع بھی اخذ کیا جائے گا۔

[3] equivalent circuit

5.5 مسئلہ تھونن، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ تبادلہ منبع

شکل 5.17-الف کے تین جوڑ پر کرخوف مساوات رو لکھتے

$$\begin{aligned}\frac{v_1-10}{4000}+\frac{v_1}{3000}+\frac{v_1-v_2}{4000}&=0\\ \frac{v_2-v_1}{4000}-0.003+\frac{v_2-v_3}{2000}&=0\\ \frac{v_3-v_2}{2000}+\frac{v_3}{6000}+\frac{v_3+2}{8000}&=0\end{aligned}$$

ہوئے حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}v_1&=6\,\mathrm{V}\\ v_2&=10\,\mathrm{V}\\ v_3&=6\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

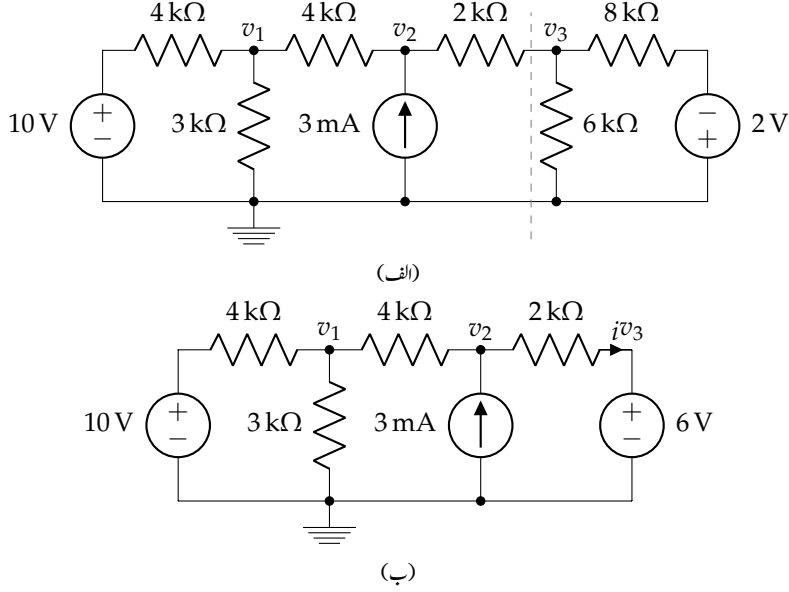
دباو جوڑ جانتے ہوئے تمام شاخوں کی رو دریافت کی جا سکتی ہے۔آئیں اس دور کو نقطہ دار لکیر پر دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل 5.17-ب میں بائیں حصے کو دکھایا گیا ہے جہاں جوڑ v_3 پر $6\,\mathrm{V}$ منبع دباو نسب کیا گیا ہے۔ اس کو حل کرنے کی خاطر کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}\frac{v_1-10}{4000}+\frac{v_1}{3000}+\frac{v_1-v_2}{4000}&=0\\ \frac{v_2-v_1}{4000}-0.003+\frac{v_2-6}{2000}&=0\end{aligned}$$

جنہیں حل کرتے ہوئے ایک بار دوبارہ

$$\begin{aligned}v_1&=6\,\mathrm{V}\\ v_2&=10\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔آپ نے دیکھا کہ شکل-ب کے دباو جوڑ بالکل تبدیل نہیں ہوئے لہٰذا اس میں تمام مقامات پر رو بھی وہی ہو گی جو شکل-الف میں تھی۔

شکل 5.17-الف میں نقطہ دار لکیر کے بائیں حصے پر لکیر کے دائیں جانب دور کا اثر صرف اور صرف جوڑ v_3 کے ذریعہ ہوتا ہے۔یوں جیسا شکل-ب میں کیا گیا، اگر جوڑ v_3 پر دباو اسی قیمت پر رکھا جائے جو لکیر کے دائیں جانب دور کے نسب کرنے سے حاصل ہوتا ہے، تب لکیر کے بائیں جانب دور کے متغیرات جوں کے توں رہتے ہیں۔

شکل 5.17: مسئلہ تھونن سمجھنے کا دور۔

شکل 5.17-ب میں رو i کو مسئلہ خطی میل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔آپ مشق 5.6 میں اس دور کو مسئلہ خطی میل کی مدد سے حل کر چکے ہیں۔اسی مشق کے شکل 5.13-پ میں بقایا منبع کے اثر کو ختم کرتے ہوئے 6 V کو صرف مزاحمت نظر آتے ہیں۔آئیں شکل-پ میں دیے دور کا مساوی مزاحمت حاصل کرتے ہیں۔منبع سے دور ترین نقطے سے شروع کرتے ہیں جہاں چار کلو اوہم اور تین کلو اوہم متوازی $3\,\mathrm{k\Omega} \parallel 4\,\mathrm{k\Omega}$ جڑے ہیں۔متوازی جڑے مزاحمت از خود سلسلہ وار جڑے $2\,\mathrm{k\Omega}$ اور $4\,\mathrm{k\Omega}$ کے ساتھ سلسلہ وار پائے جاتے ہیں لہٰذا ان تمام کا مجموعی مساوی مزاحمت

$$R_{\text{تھونن}} = \left(4\,\mathrm{k\Omega} \parallel 3\,\mathrm{k\Omega}\right) + \left(2\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega}\right) = \frac{54}{7}\,\mathrm{k\Omega}$$

ہو گا جسے **تھونن مزاحمت**[4] کہتے ہیں۔

آئیں ان حقائق کو سامنے رکھتے ہوئے **مسئلہ تھونن**[5] اور **مسئلہ نارٹن**[6] سیکھیں۔ساتھ ہی ساتھ **مسئلہ تبادلہ منبع**[7] پر بھی غور کیا جائے گا۔مسئلہ تھونن کہتا ہے کہ کسی بھی خطی دور کو سلسلہ وار جڑے ایک عدد منبع اور ایک عدد مزاحمت سے

[4] Thevenin Resistance
[5] Thevenin theorem
[6] Norton theorem
[7] Source Transformation theorem

ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اس دور کو مساوی تھونن دور کہا جائے گا۔اسی طرح مسئلہ نارٹن کہتا ہے کہ کسی بھی خطی دور کو متوازی جڑے ایک عدد منبع رو اور ایک عدد مزاحمت سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔اس دور کو مساوی نارٹن دور کہا جائے گا۔

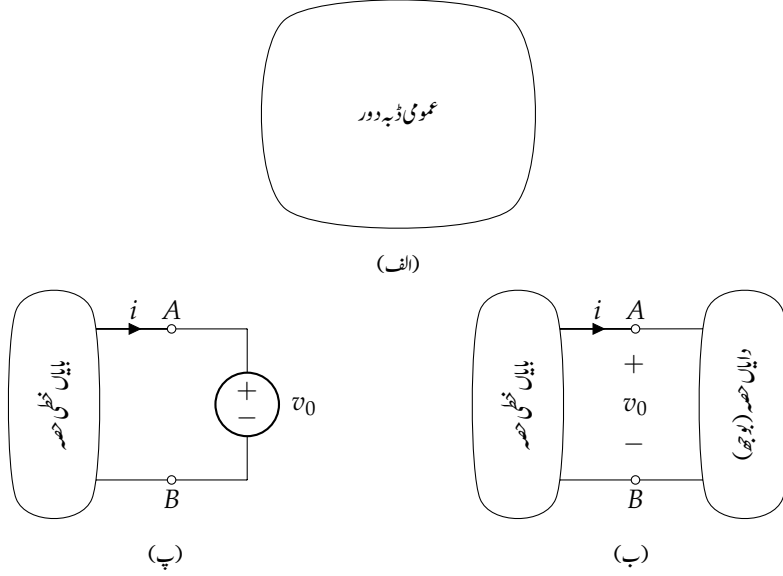
شکل 5.18-الف میں عمومی ڈبہ دور دکھایا گیا ہے۔اس کو دو حصوں میں تقسیم کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔شکل-ب میں بائیں حصے کے مساوی تھونن دور اور مساوی نارٹن دور حاصل کیے جائیں گے۔بایاں حصہ خطی ہونا ضروری ہے۔دایاں حصہ خطی یا غیر خطی ہو سکتا ہے۔دائیں حصے کو برقی بوجھ تصور کیا جائے گا۔یہ حصے دو تاروں سے آپس میں جڑے ہیں۔ان تاروں کے مابین v_0 دباو پایا جاتا ہے جبکہ بوجھ کو رو i مہیا کی جاتی ہے۔اگر شکل-ب میں بائیں ڈبے دور کی جگہ اس کا مساوی تھونن دور یا مساوی نارٹن دور نسب کرنے سے v_0 اور i کی قیمتوں پر فرق نہیں پڑے تب دائیں ڈبے کی نقطہ نظر سے دور میں کوئی تبدیلی رو نما نہیں ہوئی ہے لہٰذا اس کے لئے بایاں ڈبے کا دور اور مساوی تھونن (یا مساوی نارٹن) دور یک برابر ہیں۔

شکل-الف میں تابع منبع کی موجودگی میں ڈبے دور کو اس طرح دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے گا کہ تابع منبع اور اسے قابو کرنے والا متغیر ایک ہی ڈبے کا حصہ بنیں۔تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار کو حل کرنا اگلے حصے میں سکھایا جائے گا۔

شکل-پ میں دائیں حصے کی جگہ منبع دباو نسب کیا گیا ہے جس کا دباو v_0 ہے۔

شکل 5.18-پ میں i کو مسئلہ خطی میل کی مدد سے دو حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔ پہلا حصہ i' کو ڈبہ دور کے اندرونی منبع نافذ کرتے ہیں جبکہ دوسرا حصہ i'' کو بیرونی منبع v_0 نافذ کرتا ہے۔جیسا شکل 5.19-الف میں دکھایا گیا ہے، i' حاصل کرتے وقت بیرونی منبع کو قصر دور کیا جاتا ہے لہٰذا اس رو کو $i_{\text{قصر}}$ کہا جائے گا۔

$$i' = i_{\text{قصر}} \tag{5.3}$$

اسی طرح جیسا شکل 5.19-ب میں دکھایا گیا ہے، i'' حاصل کرتے وقت ڈبہ دور کے تمام اندرونی منبع کے اثر کو ختم کیا جاتا ہے۔ڈبہ دور کے تمام اندرونی منبع کو صفر کرنے سے بیرونی منبع v_0 کو ڈبہ دور کے اندرونی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت $R_{\text{تھونن}}$ نظر آئے گا لہٰذا رو درج ذیل ہو گی۔

$$i'' = \frac{v_0}{R_{\text{تھونن}}} \tag{5.4}$$

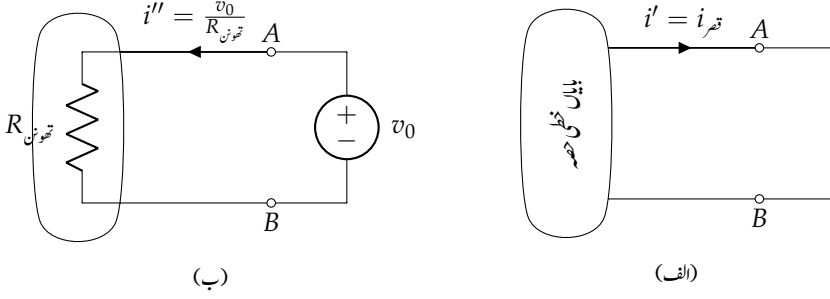
شکل 5.18: مسئلہ تھونن کا عمومی دور۔

شکل 5.19-الف اور شکل 5.19-ب میں رو کی سمتوں کو دیکھتے ہوئے $i = i' - i''$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$i = i_{\text{قصر}} - \frac{v_0}{R_{\text{تھونن}}} \qquad \text{مسئلہ نارٹن} \tag{5.5}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 5.5 عمومی مساوات ہے جس میں $i_{\text{قصر}}$ اور $R_{\text{تھونن}}$ صرف بائیں ڈبہ دور پر منحصر ہیں جبکہ v_0 اور i پر دایاں ڈبہ دور بھی اثر انداز ہوتا ہے۔یوں اگر شکل 5.18-ب میں بائیں ڈبہ دور تبدیل نہ کیا جائے تب $i_{\text{قصر}}$ اور $R_{\text{تھونن}}$ اٹل قیمتیں ہوں گی جبکہ v_0 اور i متغیرات ہوں گے جو دائیں ڈبہ دور پر منحصر ہوں گے۔چونکہ مساوات 5.5 عمومی مساوات ہے لہٰذا یہ ہر ممکنہ صورت حال کے لئے درست ہو گی۔یوں دائیں ڈبہ دور کھلا دور ہونے کی صورت میں بھی یہی مساوات کارآمد ہو گی۔اگر دائیں ڈبہ دور کو کھلا دور تصور کیا جائے تب

$$\begin{aligned} i &= 0 \\ v_0 &= v_{\text{کھلا}} \end{aligned} \tag{5.6}$$

شکل 5.19: رو کو مسئلہ خطی میل سے دو حصوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

ہوں گے۔ شکل 5.20 میں کھلے دور کی صورت حال دکھائی گئی ہے۔ اس طرح مساوات 5.5 میں مساوات 5.6 پُر کرتے ہوئے

$$0 = i_{قصر} - \frac{v_{کھلا}}{R_{تھونن}}$$

یعنی

$$i_{قصر} = \frac{v_{کھلا}}{R_{تھونن}} \qquad \text{مسئلہ تبادلہ منبع} \tag{5.7}$$

یا

$$v_{کھلا} = i_{قصر} R_{تھونن} \qquad \text{مسئلہ تبادلہ منبع} \tag{5.8}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 5.7 کو مساوات 5.5 میں پُر کرنے سے

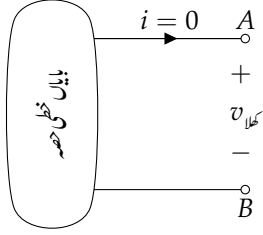
$$i = \frac{v_{کھلا}}{R_{تھونن}} - \frac{v_0}{R_{تھونن}}$$

یعنی

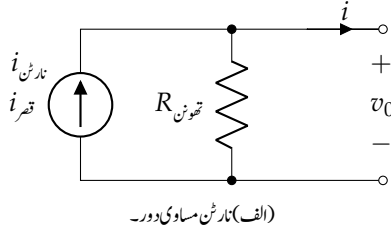
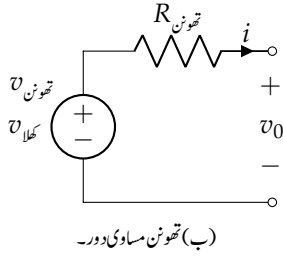
$$v_0 = v_{کھلا} - iR_{تھونن} \qquad \text{مسئلہ تھونن} \tag{5.9}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 5.5 **مسئلہ نارٹن**[8][9] بیان کرتی ہے جسے شکل 5.21-الف میں دکھایا گیا ہے جبکہ مساوات 5.9 **مسئلہ تھونن**[10][11]

[8] ایڈورڈ لوری نارٹن اور ہنس فرڈیننانڈ میئر نے اس مسئلے کو علیحدہ علیحدہ 1926 میں اخذ کیا۔
[9] Norton Theorem
[10] لیوں شارلس تھونن نے 1883 میں اور ہرمن لڈوگ فرڈیننانڈ ون ہلم ہولٹز نے 1853 میں اس مسئلے کو علیحدہ علیحدہ اخذ کیا۔
[11] Thevenin Theorem

شکل 5.20: کھلے دور سروں پر صفر رو اور تھونن دباو پائی جاتی ہے۔

(ب) تھونن مساوی دور۔

(الف) نارٹن مساوی دور۔

شکل 5.21: تھونن اور نارٹن مساوی ادوار۔

بیان کرتی ہے جسے شکل 5.21-ب میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 5.7 **مسئلہ تبادلہ منبع**[12] بیان کرتی ہے۔

شکل 5.21-الف کی کرخوف مساوات دباو اور شکل 5.21-ب کے بالائی جوڑ پر کرخوف مساوات رو درج ذیل ہیں۔

$$v_0 = v_{\text{کھلا}} - iR_{\text{تھونن}}$$
$$i = i_{\text{قصر}} - \frac{v_0}{R_{\text{تھونن}}}$$

ان کا مساوات 5.5 اور مساوات 5.6 سے موازنہ کرنے سے صاف ظاہر ہے کہ شکل 5.21-الف اور شکل 5.21-ب انہیں مساوات کو ظاہر کرتے ہیں۔

یوں کسی بھی دور کو شکل 5.21-الف کا تھونن مساوی دور یا شکل 5.21-ب کا نارٹن مساوی دور ظاہر کر سکتا ہے۔ نارٹن مساوی دور میں منبع رو کو $i_{\text{نارٹن}}$ یعنی **نارٹن رو**[13] بھی پکارا جاتا ہے۔ اسی طرح تھونن مساوی دور میں منبع دباو کو $v_{\text{تھونن}}$ یعنی **تھونن دباو**[14] بھی پکارا جاتا ہے۔

---

[12] Source Transformation Theorem
[13] norton current
[14] thevenin voltage

مساوات 5.7 یا مساوات 5.8 یعنی مسئلہ تبادلہ منبع کی مدد سے تھونن دور سے نارٹن دور اور نارٹن دور سے تھونن دور حاصل ہوتا ہے۔

آئیں ان مسئلوں کا استعمال مثالوں کو حل کرتے ہوئے دیکھیں۔

مثال 5.6: شکل 5.22-الف میں مسئلہ تھونن استعمال کرتے ہوئے V_0 حاصل کریں۔

حل:اس دور کو حل کرنے کی خاطر ہم $6\,\mathrm{k\Omega}$ کے علاوہ بقایا دور کا تھونن مساوی دور حاصل کرتے ہیں۔یوں $6\,\mathrm{k\Omega}$ کو بوجھ تصور کیا جائے گا۔شکل-ب میں بوجھ کو ہٹاتے ہوئے بقایا دور دکھایا گیا ہے جس کا تھونن مساوی دور درکار ہے۔اس دور کے کھلے سروں پر $V_{\text{کھلا}}$ پایا جاتا ہے۔نچلی جوڑ کو زمین تصور کرتے ہوئے بالائی جوڑ V_1 پر دباو دریافت کرتے ہیں۔منبع رو کی پوری رو بائیں خانے میں گھڑی کی الٹ گھومتی ہے لہٰذا

$$V_1 = 2\,\mathrm{mA}\,(3\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega}) = 8\,\mathrm{V}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$V_{\text{کھلا}} = V_1 - 3\,\mathrm{V} = 5\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔آئیں اب تھونن مزاحمت حاصل کریں۔

دور میں منبع دباو کو قصر دور اور منبع رو کو کھلے دور کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتا ہے جہاں سے

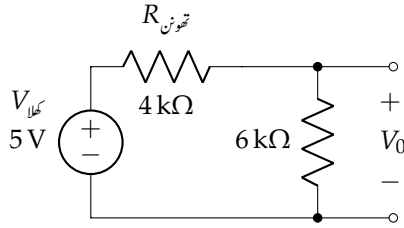
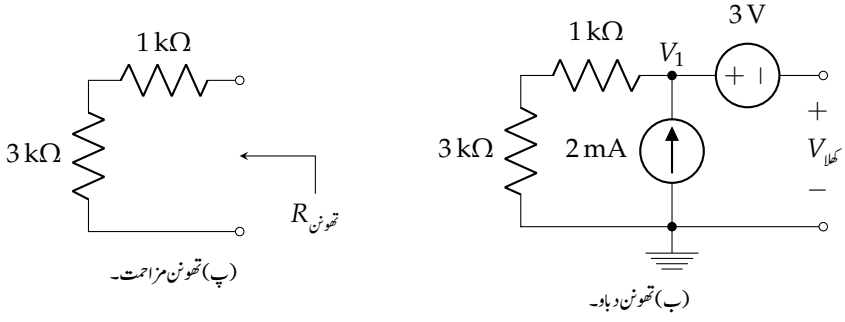
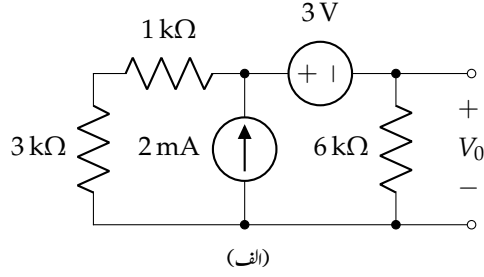
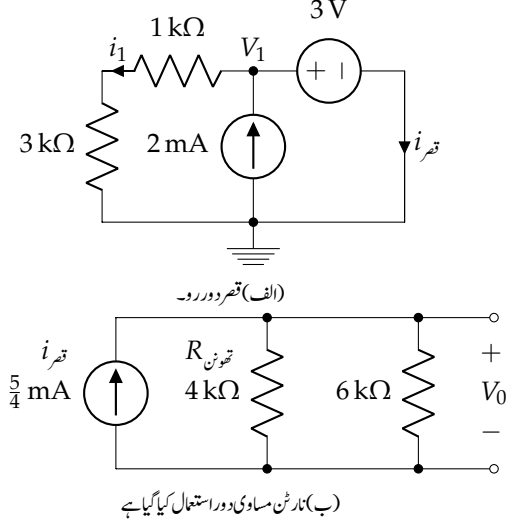
$$R_{\text{تھونن}} = 4\,\mathrm{k\Omega}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں شکل-ب کی جگہ اس کا مساوی تھونن دور نسب کرتے ہوئے شکل-الف کی جگہ شکل-ت حاصل ہوتا ہے جسے دیکھتے ہوئے تقسیم دباو کے کلیے سے بوجھ پر دباو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$V_0 = 5\left(\frac{6\,\mathrm{k\Omega}}{6\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega}}\right) = 3\,\mathrm{V} \tag{5.10}$$

شکل 5.22: مثال 5.6 کا دور۔

(الف) قصر دور رو۔

(ب) نارٹن مساوی دور استعمال کیا گیا ہے

شکل 5.23: مثال 5.7 کا دور۔

مثال 5.7: شکل 5.22-الف میں مسئلہ نارٹن استعمال کرتے ہوئے V_0 حاصل کریں۔

حل: گزشتہ مثال کی طرح دور کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جاتا ہے لہٰذا شکل 5.22-الف میں $6\,\mathrm{k\Omega}$ کو بوجھ سمجھتے ہوئے بقایا دور، جسے شکل 5.22-ب میں دکھایا گیا ہے، کا نارٹن مساوی دور حاصل کیا جائے گا۔

نارٹن مساوی دور میں $R_{تھونن}$ کے ساتھ ساتھ $i_{قصر}$ بھی درکار ہے۔ تھونن مزاحمت کو گزشتہ مثال میں حاصل کیا گیا ہے لہٰذا صرف قصر دور رو معلوم کرنا باقی ہے۔ شکل 5.22-ب کو قصر دور کرتے ہوئے شکل 5.23-الف میں دکھایا گیا ہے جس سے $i_{قصر}$ حاصل کرتے ہیں۔ دور کو دیکھتے ہوئے

$$V_1 = 3\,\mathrm{V}$$

اور یوں

$$i_1 = \frac{3\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{k\Omega} + 3\,\mathrm{k\Omega}} = \frac{3}{4}\,\mathrm{mA}$$

لکھا جا سکتا ہے۔بالائی جوڑ V_1 پر کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i_{\text{قصر}} = 2\,\text{mA} - \frac{3}{4}\,\text{mA} = \frac{5}{4}\,\text{mA}$$

نارٹن دور کے متغیرات استعمال کرتے ہوئے شکل 5.23-ب حاصل ہوتا ہے جہاں منبع رو کے متوازی مزاحمتوں کا مساوی

$$4\,\text{k}\Omega \parallel 6\,\text{k}\Omega = \frac{12}{5}\,\text{k}\Omega$$

ہے جس میں $\frac{5}{4}\,\text{mA}$ گزرنے سے دباو

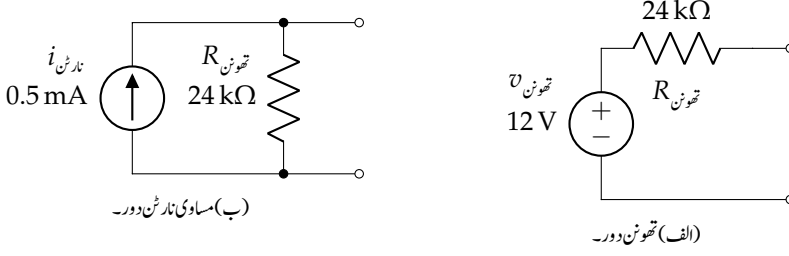
$$V_0 = \frac{5}{4}\,\text{mA} \times \frac{12}{5}\,\text{k}\Omega = 3\,\text{V}$$

پیدا ہو گا۔

اس مثال میں i کو مساوات 5.8 یعنی مسئلہ تبادلہ منبع سے بھی حاصل کیا جا سکتا تھا یعنی

$$i_{\text{قصر}} = \frac{v_{\text{کھلا}}}{R_{\text{تھونن}}} = \frac{5\,\text{V}}{4\,\text{k}\Omega} = \frac{5}{4}\,\text{mA}$$

مثال 5.8: شکل 5.24-الف میں ایک دور کا مساوی تھونن دور دیا گیا ہے۔اس دور کا مساوی نارٹن دور حاصل کریں۔

حل: تھونن دور سے نارٹن دور یا نارٹن دور سے تھونن دور کے حصول میں مساوات 5.8 اہم کردار ادا کرتی ہے۔اس مساوات کی مدد سے تھونن دور کے متغیرات $v_{\text{کھلا}}$ اور $R_{\text{تھونن}}$ سے نارٹن دور میں استعمال ہونے والا متغیر $i_{\text{قصر}}$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح اسی مساوات کی مدد سے نارٹن دور میں استعمال ہونے والے متغیرات $i_{\text{قصر}}$ اور $R_{\text{تھونن}}$ سے تھونن دور کا متغیر $v_{\text{کھلا}}$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔دونوں ادوار میں $R_{\text{تھونن}}$ کی قیمت یکساں ہے۔

شکل 5.24: مثال 5.8 کا مساوی تھونن دور۔

مساوات 5.8 استعمال کرتے ہوئے

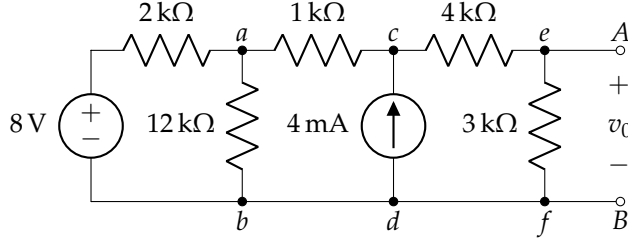
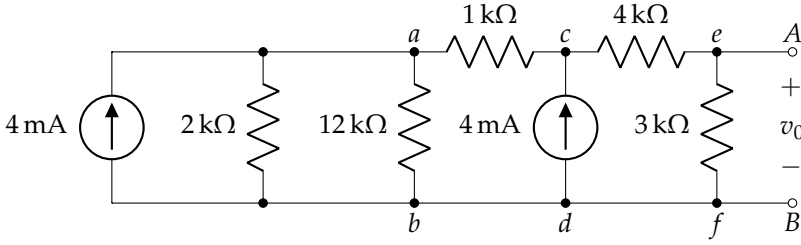
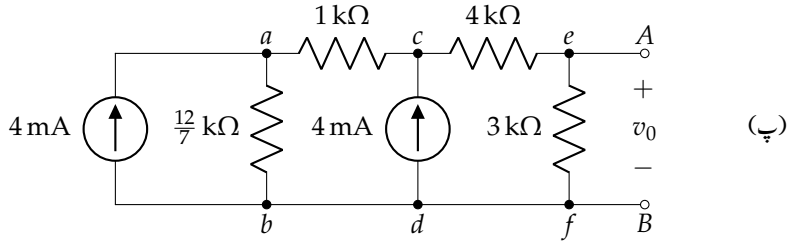
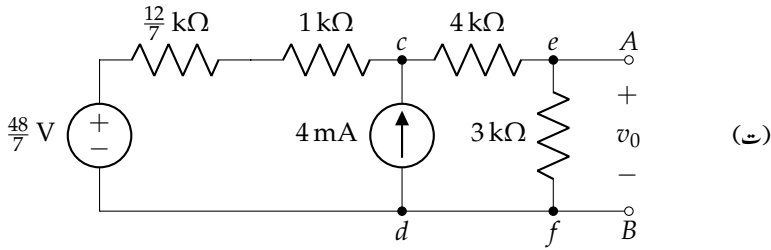
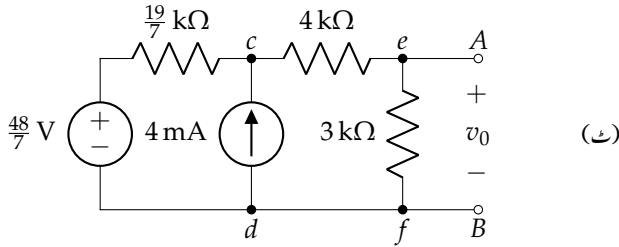
$$i_{\text{قصر}} = \frac{v_{\text{کھلا}}}{R_{\text{تھونن}}} = \frac{12\,\text{V}}{24\,\text{k}\Omega} = 0.5\,\text{mA}$$

حاصل ہوتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے شکل 5.24-ب کا مساوی نارٹن دور حاصل ہوتا ہے۔

مثال 5.9: شکل 5.25-الف میں $3\,\text{k}\Omega$ کو بوجھ تصور کریں۔ بار بار تھونن سے نارٹن اور نارٹن سے تھونن مساوی دور حاصل کرتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہوئے بوجھ پر دباو حاصل کریں۔

حل: شکل 5.25 کے بائیں سر سے شروع کرتے ہیں جہاں $8\,\text{V}$ اور $2\,\text{k}\Omega$ کو تھونن مساوی دور تصور کیا جا سکتا ہے۔اس دور کے سروں کو a اور b تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں $v_{\text{تھونن}} = 8\,\text{V}$ اور $R_{\text{تھونن}} = 2\,\text{k}\Omega$ لیتے ہوئے مساوات 5.7 کی مدد سے

$$i_{\text{نارٹن}} = \frac{8\,\text{V}}{2\,\text{k}\Omega} = 4\,\text{mA}$$

حاصل ہوتا ہے۔نقطہ a اور b کے بائیں جانب تھونن دور کی جگہ یوں مساوی نارٹن دور نسب کیا جا سکتا ہے۔ شکل-ب میں ایسا ہی کیا ہوا دکھایا گیا ہے جہاں $2\,\text{k}\Omega$ اور $12\,\text{k}\Omega$ متوازی مزاحمتوں کا مساوی $\frac{2\,\text{k}\Omega\times12\,\text{k}\Omega}{2\,\text{k}\Omega+12\,\text{k}\Omega} = \frac{12}{7}\,\text{k}\Omega$ ہو گا۔ شکل-پ میں متوازی مزاحمتوں کی جگہ $\frac{12}{7}\,\text{k}\Omega$ کو دکھایا گیا ہے۔

شکل 5.25: مثال 5.9 کا دور۔

شکل-پ میں $4\,\text{mA}$ کو $i_{\text{نارٹن}}$ اور $\frac{12}{7}\,\text{k}\Omega$ کو $R_{\text{تھونن}}$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ان دو اجزاء کے نارٹن دور کا مساوی تھونن دور حاصل کرنے کی خاطر مساوات 5.7 کی مدد سے

$$v_{\text{تھونن}} = i_{\text{نارٹن}} R_{\text{تھونن}} = 4\,\text{mA} \times \frac{12}{7}\,\text{k}\Omega = \frac{48}{7}\,\text{V}$$

حاصل کیا جاتا ہے۔شکل-پ میں $4\,\text{mA}$ اور $\frac{12}{7}\,\text{k}\Omega$ کے نارٹن دور کی جگہ $\frac{48}{7}\,\text{V}$ اور $\frac{12}{7}\,\text{k}\Omega$ کا تھونن دور نسب کرنے سے شکل-ت حاصل ہوتا ہے۔شکل-ت میں سلسلہ وار جڑے $\frac{12}{7}\,\text{k}\Omega$ اور $1\,\text{k}\Omega$ کی جگہ ان کا مساوی $\frac{19}{7}\,\text{k}\Omega$ نسب کرنے سے شکل-ٹ حاصل ہوتا ہے۔

شکل-ٹ میں $\frac{19}{7}\,\text{k}\Omega$ اور $\frac{48}{7}\,\text{V}$ مل کر تھونن دور بناتے ہیں جن کی جگہ نارٹن دور نسب کرنے کی غرض سے

$$i_{\text{نارٹن}} = \frac{v_{\text{تھونن}}}{R_{\text{تھونن}}} = \frac{\frac{48}{7}\,\text{V}}{\frac{19}{7}\,\text{k}\Omega} = \frac{48}{19}\,\text{mA}$$

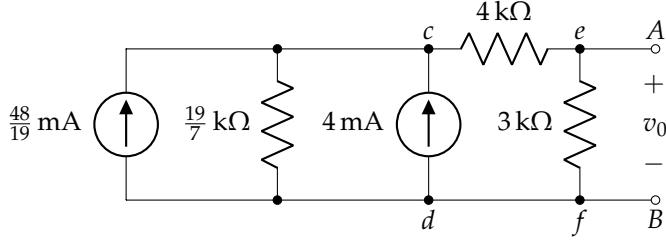
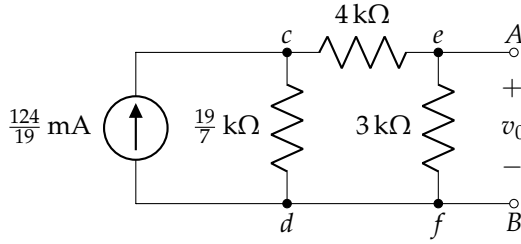
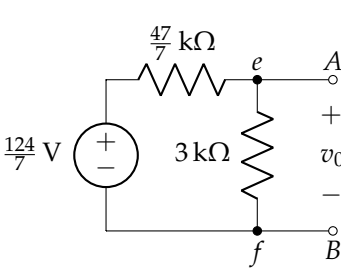
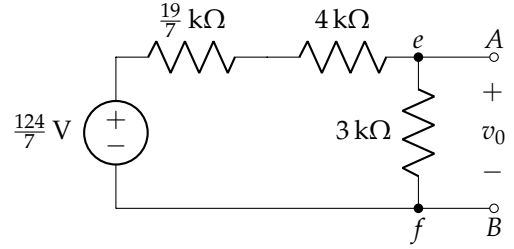
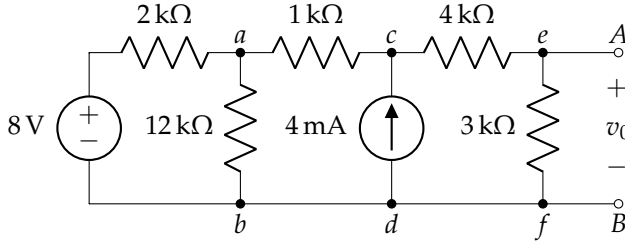
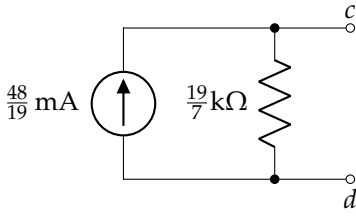
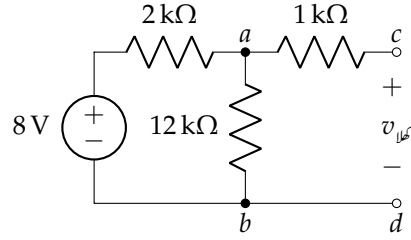
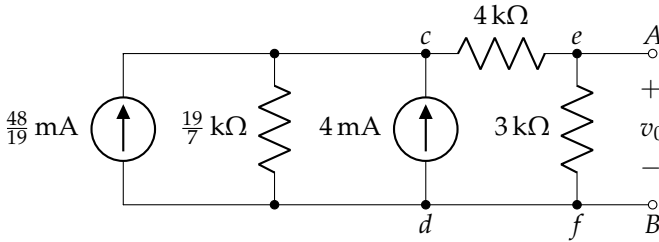
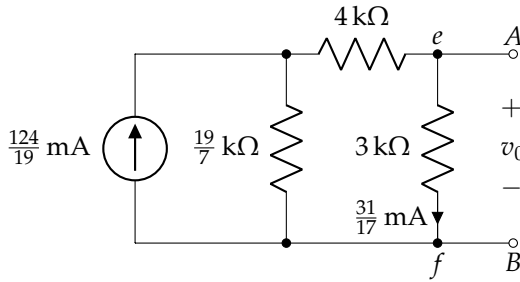
حاصل کرتے ہیں۔شکل 5.26-الف میں حاصل دور دکھایا گیا ہے جہاں $\frac{48}{19}\,\text{mA}$ اور $4\,\text{mA}$ متوازی جڑے منبع ہیں جن کا مجموعہ

$$\frac{48}{19}\,\text{mA} + 4\,\text{mA} = \frac{124}{19}\,\text{mA}$$

کے برابر ہے۔شکل 5.26-ب میں متوازی منبع کی جگہ ان کی مجموعی قیمت کا منبع نسب کیا گیا ہے۔

شکل 5.26-ب میں $\frac{124}{19}\,\text{mA}$ اور $\frac{19}{7}\,\text{k}\Omega$ نارٹن دور کی جگہ ان کا مساوی تھونن دور نسب کرنے سے شکل-پ حاصل ہوتا ہے جس میں $\frac{19}{7}\,\text{k}\Omega$ اور $4\,\text{k}\Omega$ سلسلہ وار جڑے ہیں جن کا مساوی $\frac{47}{7}\,\text{k}\Omega$ ہے۔شکل 5.26-ت میں یہی مساوی مزاحمت دکھایا گیا ہے۔

شکل-ت میں $3\,\text{k}\Omega$ بوجھ ہے جبکہ بقایا تھونن مساوی ہے۔تقسیم دباو سے بوجھ پر دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_0 = \frac{124}{7}\left(\frac{3\,\text{k}\Omega}{3\,\text{k}\Omega + \frac{47}{7}\,\text{k}\Omega}\right) = \frac{93}{17}\,\text{V}$$

شکل 5.26: مثال 5.9 حل کرتے ہوئے حاصل کئے گئے ادوار۔

شکل 5.27: مثال 5.10 حل کرتے ہوئے حاصل کئے گئے ادوار۔

مثال 5.10: گزشتہ مثال کا تھونن دور دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔اس مرتبہ دور کو ایسی جگہوں پر ٹکڑے کرتے ہوئے حل کرتے ہیں کہ جواب جلد حاصل ہو۔شکل 5.27 میں دور کو دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔

حل:دور کو cd پر توڑ کر شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔یوں cd پر مساوی دور حاصل کیا جائے گا۔شکل-ب میں v_{ab} اور v_{cd} برابر ہیں۔یوں

$$v_{\text{کھلا}} = v_{cd} = v_{ab} = \frac{8 \times 12000}{12000 + 2000} = \frac{48}{7}\,\text{V}$$

ہو گا اور cd سے دیکھتے ہوئے تھونن مزاحمت

$$\frac{2000 \times 12000}{2000 + 12000} + 1000 = \frac{19}{7}\,\text{k}\Omega$$

ہو گا۔ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 5.7 سے

$$i_{\text{قصر}} = \frac{v_{\text{کھلا}}}{R_{\text{تھونن}}} = \frac{\frac{48}{7}}{\frac{19}{7}} = \frac{48}{19}\,\text{mA}$$

ملتا ہے۔یوں شکل-ب کا مساوی نارٹن دور شکل-پ حاصل ہوتا ہے جسے شکل-الف میں cd کے بائیں جانب دور کی جگہ نسب کرنے سے شکل-ت ملتا ہے۔شکل-ت میں دو عدد منبع رو متوازی جڑی ہیں جن کی جگہ ایک عدد

$$\frac{48}{19}\,\text{mA} + 4\,\text{mA} = \frac{124}{19}\,\text{mA}$$

کی منبع نسب کی جا سکتی ہے جس سے شکل-ٹ حاصل ہوتا ہے۔شکل-ٹ میں سلسلہ وار جڑے $4\,\text{k}\Omega$ اور $3\,\text{k}\Omega$ از خود $\frac{19}{7}\,\text{k}\Omega$ کے متوازی ہے۔یوں سلسلہ وار مزاحمتوں میں رو کو تقسیم رو کے کلیے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\frac{124}{19}\,\text{mA}\left(\frac{\frac{19}{7}\,\text{k}\Omega}{\frac{19}{7}\,\text{k}\Omega + 4\,\text{k}\Omega + 3\,\text{k}\Omega}\right) = \frac{31}{17}\,\text{mA}$$

جسے شکل 5.27-ٹ میں دکھایا گیا ہے۔تین کلو بوجھ پر دباو درج ذیل ہے۔

$$v_{\text{کھلا}} = \frac{31}{17}\,\text{mA} \times 3\,\text{k}\Omega = \frac{93}{17}\,\text{V}$$

آخر میں مسئلہ اتنا سادہ بن چکا تھا کہ تقسیم رو اور اوہم کے قانون سے دباو حاصل کیا گیا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بوجھ پر دباو جلد حاصل ہوا لہٰذا مسئلے کو دیکھ کر فیصلہ کریں کہ کہاں سے دور کو ٹکڑے کرتے ہوئے حل کرنا ہے۔

مثال 5.11: شکل 5.28-الف میں مسئلہ نارٹن کی مدد سے V_0 حاصل کریں۔

حل: آٹھ کلو اوہم کی مزاحمت کو بوجھ تصور کرتے ہوئے بقایا دور کا نارٹن مساوی حاصل کرتے ہیں۔ بوجھ کو بقایا دور سے علیحدہ کرتے ہوئے تھونن مزاحمت حاصل کرنے کی خاطر منبع رو کو کھلے دور اور منبع دباو کو قصر دور کرتے ہوئے شکل 5.28-ب حاصل ہوتا ہے۔ اس کو دیکھ کر

$$R_{\text{تھونن}} = \frac{4\,\text{k}\Omega \times 1\,\text{k}\Omega}{4\,\text{k}\Omega + 1\,\text{k}\Omega} + 6\,\text{k}\Omega + 2\,\text{k}\Omega = \frac{44}{5}\,\text{k}\Omega$$

لکھا جا سکتا ہے۔

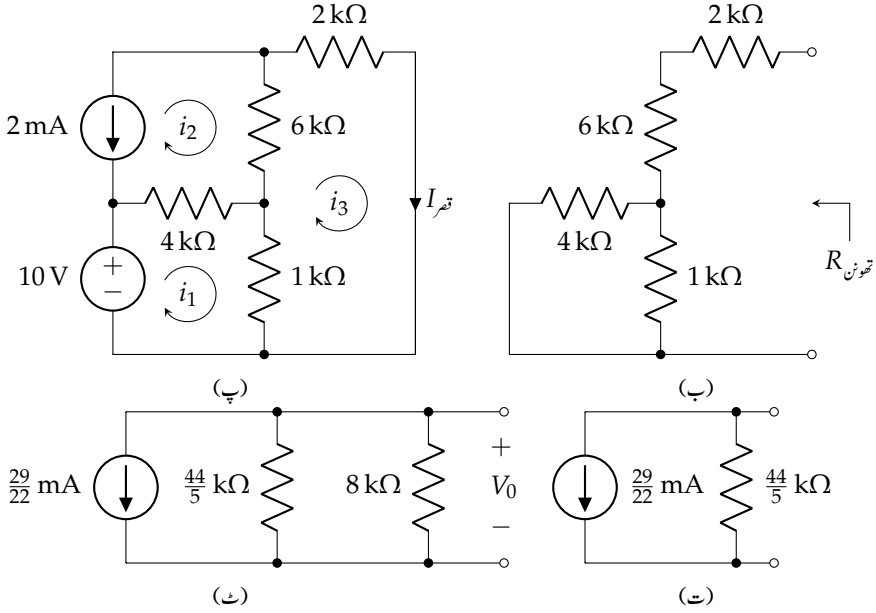
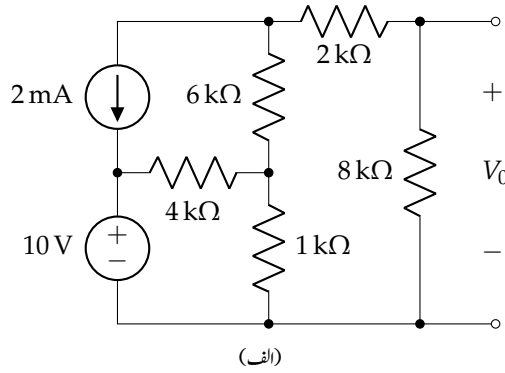
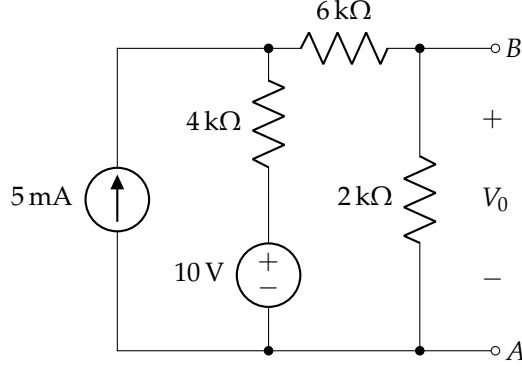
قصر دور رو یعنی نارٹن رو حاصل کرنے کی خاطر $8\,\text{k}\Omega$ بوجھ کو قصر دور کرتے ہوئے شکل 5.28-پ حاصل کرتے ہیں جس سے درج ذیل مساوات لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
-10 + (4000 + 1000)i_1 - 4000i_2 - 1000i_3 &= 0 \\
i_2 &= -0.002 \\
-1000i_1 - 6000i_2 + (1000 + 6000 + 2000)i_3 &= 0
\end{aligned}$$

درج بالا مساوات کو حل کرنے سے

$$I_{\text{قصر}} = i_3 = -\frac{29}{22}\,\text{mA}$$

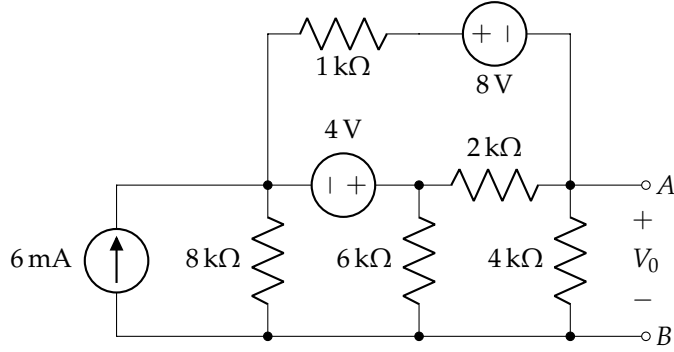
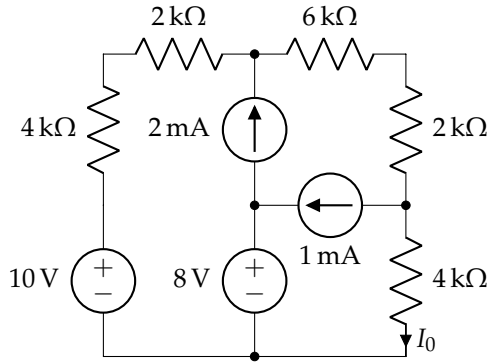
حاصل ہوتا ہے۔ تھونن مزاحمت اور نارٹن رو جانتے ہوئے $8\,\text{k}\Omega$ بوجھ کے علاوہ 5.28-الف کے بقایا دور کا مساوی نارٹن دور شکل 5.28-ت میں دکھایا گیا ہے جہاں نارٹن رو کی قیمت منفی ہونے کی بنا پر اسے الٹ سمت میں دکھایا گیا ہے۔ نارٹن مساوی دور کے ساتھ $8\,\text{k}\Omega$ بوجھ جوڑنے سے شکل-ٹ حاصل ہوتی ہے۔ اس شکل کو دیکھ کر درکار دباو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$V_0 = -\frac{29}{22}\,\text{mA}\left(\frac{\frac{44}{5}\,\text{k}\Omega \times 8\,\text{k}\Omega}{\frac{44}{5}\,\text{k}\Omega + 8\,\text{k}\Omega}\right) = -\frac{116}{21}\,\text{V}$$

شکل 5.28: مثال 5.11 کا دور۔

شکل 5.29: مشق 5.7 کا دور۔

مشق 5.7: شکل 5.29 میں دور دکھایا گیا ہے جسے مسئلہ تھونن سے حل کرتے ہوئے V_0 حاصل کریں۔(دائیں جانب نسب $2\,\mathrm{k\Omega}$ سے دیکھتے ہوئے بقایا دور کا تھونن دور حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔)

جوابات: $R_{\text{تھونن}} = 10\,\mathrm{k\Omega}$ ، $V_{\text{تھونن}} = 30\,\mathrm{V}$ ، $V_0 = 5\,\mathrm{V}$

مشق 5.8: شکل 5.30 کو تھونن مساوی دور سے حل کرتے ہوئے V_0 حاصل کریں۔($4\,\mathrm{k\Omega}$ مزاحمت کے ساتھ جڑی دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔)

جوابات: $R_{\text{تھونن}} = \frac{86}{21}\,\mathrm{k\Omega}$ ، $V_{\text{تھونن}} = \frac{100}{7}\,\mathrm{V}$ ، $V_0 = \frac{120}{17}\,\mathrm{V}$

شکل 5.30: مشق 5.8 کا دور۔

شکل 5.31: مشق 5.9 کا دور۔

مشق 5.9: مسئلہ نارٹن کی مدد سے شکل 5.31 میں I_0 حاصل کریں۔(دائیں جانب نسب $4\,\mathrm{k\Omega}$ مزاحمت کے ساتھ منسلک دور کا نارٹن مساوی حاصل کرتے ہوئے حل کریں۔)

جوابات: $R_{\text{تھونن}} = 14\,\mathrm{k\Omega}$ ، $I_{\text{نارٹن}} = \frac{4}{7}\,\mathrm{mA}$ ، $I_0 = \frac{4}{9}\,\mathrm{mA}$

5.6 تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار

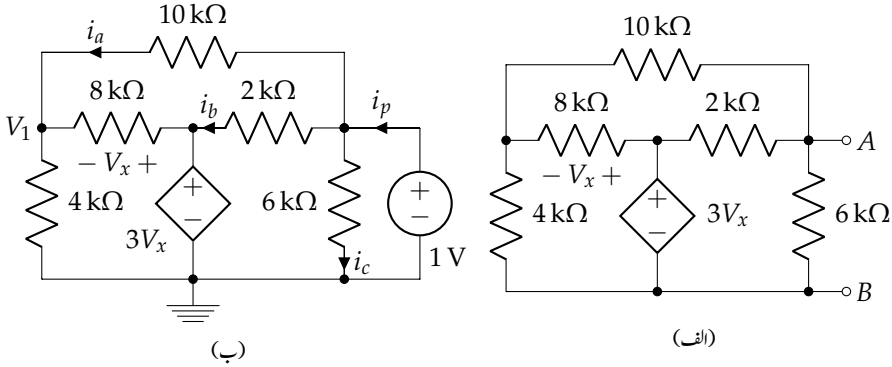
صرف تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار کا تھونن یا نارٹن مساوی دور صرف $R_{\text{تھونن}}$ ہوتا ہے۔ایسے ادوار میں چونکہ غیر تابع منبع نہیں پایا جاتا لہٰذا یہ از خود طاقت مہیا نہیں کر سکتے اور یوں ان سے تھونن دباو اور نارٹن رو صفر حاصل ہوتی ہیں۔تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار کا تھونن مزاحمت حاصل کرتے ہوئے اندرونی تابع منبع دباو کو قصر دور اور اندرونی تابع منبع رو کو کھلے دور نہیں کیا جاتا۔ان ادوار کے برقی سروں پر پیمائشی دباو v_p مہیا کرتے ہوئے انہیں سروں پر رو i_p حاصل کی جاتی ہے۔مزاحمت کی تعریف سے تھونن مزاحمت درج ذیل لکھی جاتی ہے۔

$$R_{\text{تھونن}} = \frac{v_p}{i_p} \tag{5.11}$$

آئیں چند مثال دیکھیں۔

مثال 5.12: شکل 5.32-الف میں تابع منبع دباو پایا جاتا ہے۔اس دور کا مساوی تھونن دور حاصل کریں۔

حل:شکل 5.32-ب میں برقی سروں AB پر پیمائشی دباو لاگو کرتے ہوئے i_p حاصل کرتے ہیں۔پیمائشی دباو کی قیمت کچھ بھی چنی جا سکتی ہے۔ہم نے $v_p = 1\,\mathrm{V}$ چنا ہے۔نچلی جوڑ کو زمین چنتے ہوئے درج ذیل مساوات لکھے جا سکتے ہیں

$$\frac{V_1}{4\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{V_1 - 3V_x}{8\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{V_1 - 1}{10\,\mathrm{k\Omega}} = 0$$
$$V_x = 3V_x - V_1$$

شکل 5.32: مثال 5.12 کا دور۔

جن سے

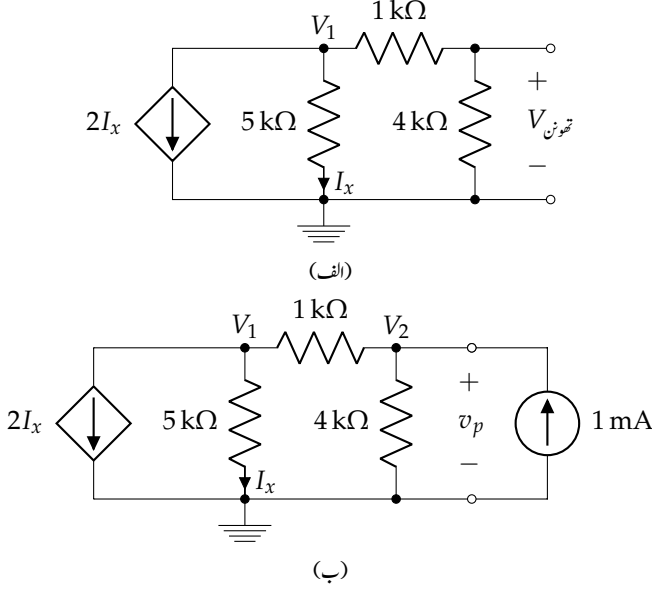
$$V_1 = \frac{8}{23}\,\mathrm{V}$$
$$V_x = \frac{4}{23}\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں لہٰذا دور کو دیکھتے ہوئے کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
i_p &= i_a + i_b + i_c \\
&= \frac{1-\frac{8}{23}}{10000} + \frac{1-3\times\frac{4}{23}}{2000} + \frac{1}{6000} \\
&= \frac{65}{138}\,\mathrm{mA}
\end{aligned}$$

تھونن مزاحمت درج ذیل ہو گا۔

$$R_{\text{تھونن}} = \frac{v_p}{i_p} = \frac{138}{65}\,\mathrm{k\Omega}$$

مثال 5.13: شکل 5.33-الف کا مساوی تھونن دور حاصل کریں۔

شکل 5.33: مثال 5.13 کا دور۔

حل: اس دور میں صرف تابع منبع پایا جاتا ہے اور ہم توقع کرتے ہیں کہ نارٹن رو یا تھونن دباو صفر حاصل ہو گا۔ آئیں دیکھیں کہ آیا ہماری توقع درست ہے۔ شکل 5.33-الف میں نچلے جوڑ کو زمین تصور کرتے ہوئے جوڑ V_1 پر کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$2I_x + \frac{V_1}{5000} + \frac{V_1}{1000 + 4000} = 0$$

جس میں

$$I_x = \frac{V_1}{5000}$$

پُر کرنے سے

$$\frac{2V_1}{5000} + \frac{V_1}{5000} + \frac{V_1}{1000 + 4000} = 0$$

یعنی

$$V_1 = 0\,\text{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے

$$V_{\text{تھونن}} = \left(\frac{1000}{1000+4000}\right) V_1 = 0\,\text{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ تھونن دباو صفر ہے لہٰذا مسئلہ تبادلہ منبع کے تحت نارٹن رو بھی صفر ہو گی۔

دور کی تھونن مزاحمت حاصل کرنے کی خاطر برقی سروں پر بیرونی منبع نسب کرنا ہو گا۔شکل 5.33-ب میں برقی سروں پر $i_p = 1\,\text{mA}$ کا پیمائشی رو نسب کیا گیا ہے۔برقی سروں پر پیمائشی دباو v_p جانتے ہوئے تھونن مزاحمت حاصل کی جا سکتی ہے۔

شکل 5.33-ب کے بالائی دو جوڑ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2I_x + \frac{V_1}{5000} + \frac{V_1 - V_2}{1000} &= 0 \\ \frac{V_2 - V_1}{1000} + \frac{V_2}{4000} - 0.001 &= 0 \end{aligned}$$

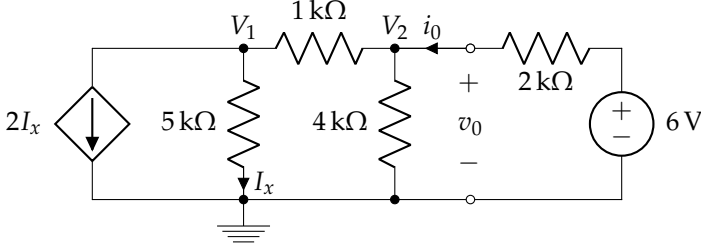
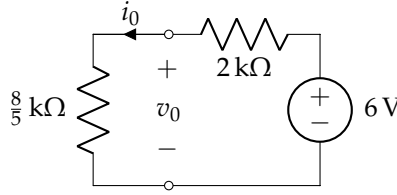
ان میں $I_x = \frac{V_1}{5000}$ پُر کرتے اور ترتیب دیتے ہوئے دوبارہ لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} 8V_1 - 5V_2 &= 0 \\ 4V_1 - 5V_2 &= -4 \end{aligned}$$

جس سے $V_2 = \frac{8}{5}\,\text{V}$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$v_p = \frac{8}{5}\,\text{V}$$

ہو گا۔یوں تھونن مزاحمت درج ذیل ہو گی۔

$$R_{\text{تھونن}} = \frac{v_p}{i_p} = \frac{8}{5}\,\text{k}\Omega$$

شکل 5.34: مثال 5.14 کا دور۔

مثال 5.14: گزشتہ مثال کے دور کو سلسلہ وار جڑے بیرونی منبع اور مزاحمت سے طاقت مہیا کی جاتی ہے۔ شکل 5.34 میں اسے دکھایا گیا ہے۔ برقی سروں پر دباو v_0 اور رو i_0 حاصل کریں۔ اب گزشتہ مثال کے دور کی جگہ اس کا مساوی تھونن دور نسب کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

حل: بالائی جوڑوں پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$
\begin{aligned}
2I_x + \frac{V_1}{5000} + \frac{V_1 - V_2}{1000} &= 0 \\
\frac{V_2 - V_1}{1000} + \frac{V_2}{4000} + \frac{V_2 - 6}{2000} &= 0
\end{aligned}
$$

جن میں $I_x = \frac{V_1}{5000}$ پر کرتے ہوئے اور ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
8V_1 - 5V_2 &= 0 \\
-4V_1 + 7V_2 &= 12
\end{aligned}
$$

انہیں حل کرتے ہوئے

$$V_1 = \frac{5}{3}\,\mathrm{V}$$
$$V_2 = \frac{8}{3}\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں لہٰذا

$$v_0 = V_2 = \frac{8}{3}\,\mathrm{V}$$
$$i_0 = \frac{6-\frac{8}{3}}{2000} = \frac{5}{3}\,\mathrm{mA}$$

ہوں گے۔

آئیں اب تھونن مساوی دور کی مدد سے اسی کو دوبارہ حل کریں۔ گزشتہ مثال میں $v_{\text{تھونن}} = 0\,\mathrm{V}$ اور $R_{\text{تھونن}} = \frac{8}{5}\,\mathrm{k\Omega}$ حاصل کئے گئے۔ تھونن مساوی دور استعمال کرتے ہوئے شکل 5.34-ب حاصل ہوتا ہے جہاں قانون اوہم کی مدد سے

$$i_0 = \frac{6\,\mathrm{V}}{\frac{8}{5}\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}} = \frac{5}{3}\,\mathrm{mA}$$

اور تقسیم دباو کے کلیے سے

$$v_0 = 6\left(\frac{\frac{8}{5}\,\mathrm{k\Omega}}{\frac{8}{5}\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}}\right) = \frac{8}{3}\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بیرونی برقی سروں پر اصل دور اور تھونن مساوی دور بالکل یکساں دکھائی دیتے ہیں۔آپ نے یہ بھی دیکھ لیا ہو گا کہ تھونن دور استعمال کرتے ہوئے جوابات نہایت آسانی سے حاصل ہوتے ہیں۔

5.7 تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار

ان ادوار میں $v_{\text{کھلا}}$ اور $i_{\text{قصر}}$ حاصل کرتے ہوئے $R_{\text{تھونن}}$ حاصل کیا جاتا ہے۔یاد رہے کہ دور کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے تابع منبع اور اس کا قابو متغیر علیحدہ نہیں کئے جا سکتے ہیں۔

آئیں چند مثال دیکھیں۔

مثال 5.15: شکل 5.35 میں V_0 کو مسئلہ تھونن سے حاصل کریں۔

حل: دور کے ٹکڑے کرتے ہوئے تھونن مساوی دور حاصل کرتے ہیں۔یاد رہے کہ تابع منبع اور اس کا قابو متغیر کو علیحدہ نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا قابو منبع رو اور $8\,\text{k}\Omega$ مزاحمت کو علیحدہ نہیں کیا جا سکتا ہے۔یوں دور کو ٹکڑے کرتے ہوئے، برقی سروں سے دور ترین نقطے سے شروع کرتے ہوئے کم از کم اتنے اجزاء شامل کئے جائیں گے کہ قابو منبع سے لے کر تابع متغیر تک تمام اس میں موجود ہوں۔شکل 5.35-ب میں ایسا ٹکڑا دکھایا گیا ہے جہاں قابو متغیر کو I'_x کہا گیا ہے۔بالائی مخلوط جوڑ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

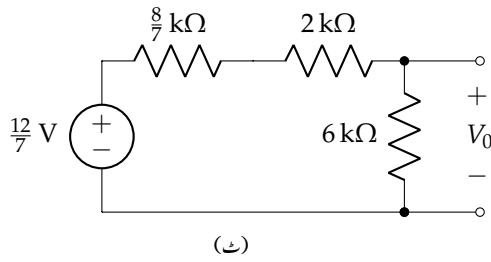
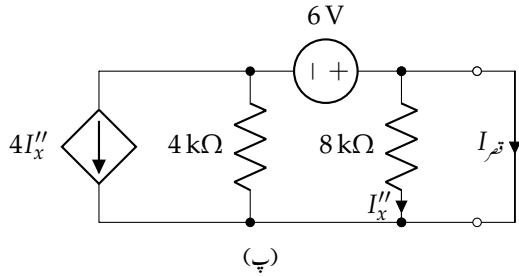
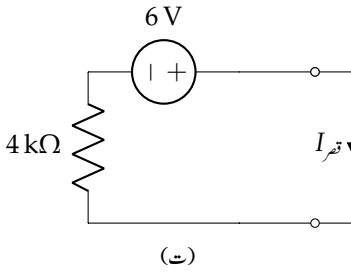
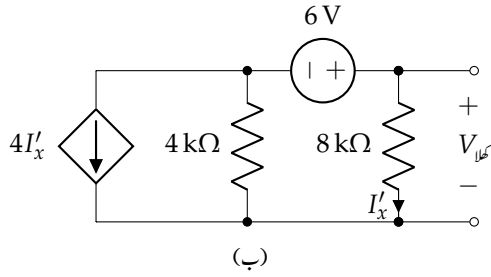
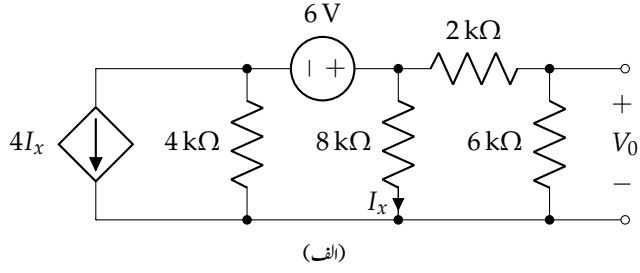
$$4I'_x + \frac{V_{\text{کھلا}} - 6}{4000} + \frac{V_{\text{کھلا}}}{8000} = 0$$

جس میں $I'_x = \frac{V_{\text{کھلا}}}{8000}$ پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$V_{\text{کھلا}} = \frac{12}{7}\,\text{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔

شکل 5.35-ب میں قصر دور رو حاصل کرنے کی خاطر اس کے برقی سروں کو قصر دور کرتے ہوئے شکل-پ حاصل کیا جاتا ہے جس میں $I''_x = 0$ کی بنا پر قابو منبع کی رو بھی صفر ہو گی۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل 5.35-ت حاصل ہوتا ہے جسے دیکھ کر

$$I_{\text{قصر}} = \frac{6}{4000} = \frac{3}{2}\,\text{mA}$$

شکل 5.35: مثال 5.15 کا دور۔

لکھا جا سکتا ہے۔ تھونن دباو اور نارٹن رو استعمال کرتے ہوئے تھونن مزاحمت درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$R_{\text{تھونن}} = \frac{V_{\text{کھلا}}}{I_{\text{قصر}}} = \frac{\frac{12}{7}\,\text{V}}{\frac{3}{2}\,\text{mA}} = \frac{8}{7}\,\text{k}\Omega$$

شکل 5.35-ب کی جگہ تھونن مساوی دور نسب کرتے ہوئے شکل-الف سے شکل-ٹ حاصل ہوتا ہے جس سے تقسیم دباو کے کلیے سے

$$V_0 = \frac{\frac{12}{7}\,\text{V}}{\frac{8}{7}\,\text{k}\Omega + 2\,\text{k}\Omega + 6\,\text{k}\Omega} = \frac{3}{16}\,\text{V}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 5.16: شکل 5.36 میں مسئلہ تھونن کی مدد سے V_0 حاصل کریں۔

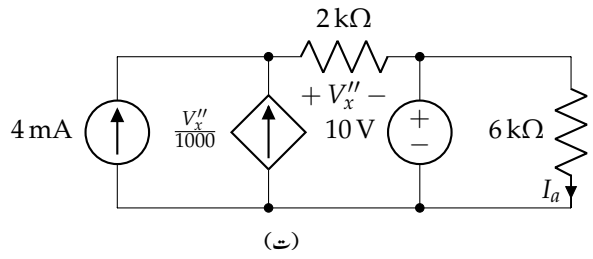
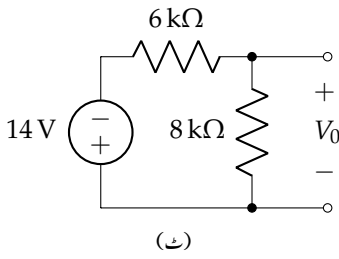
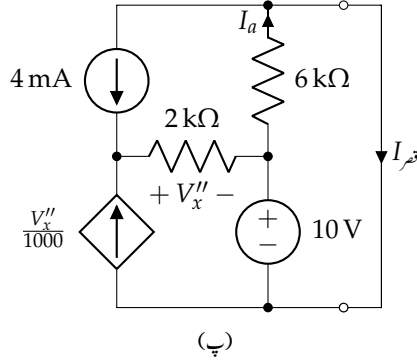
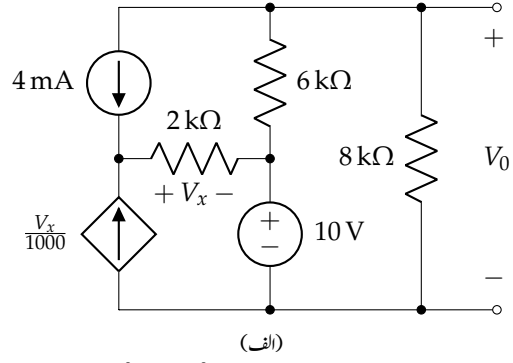
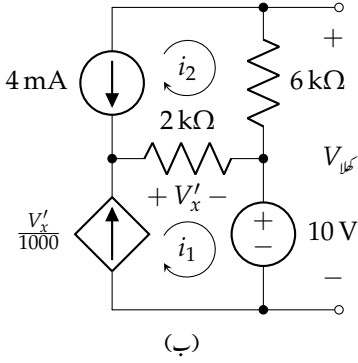
حل: خارجی $8\,\text{k}\Omega$ مزاحمت کو بوجھ تصور کرتے ہوئے بقایا دور جسے شکل 5.36-ب میں دکھایا گیا ہے کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔ بالائی خانے کو دیکھ کر

$$i_2 = -0.004$$

لہٰذا

$$V_{\text{کھلا}} = 6000 i_2 + 10 = 6000(-0.004) + 10 = -14\,\text{V}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تابع منبع کی موجودگی کی بنا پر تھونن مزاحمت حاصل کرنے کی خاطر قصر دور رو درکار ہو گی۔ شکل 5.36-ب کے برقی سر قصر دور کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتا ہے جسے شکل-ت کی طرز پر بنایا جا سکتا ہے۔ شکل-ت میں $I_{\text{قصر}}$ کی نشاندہی کرنا قدر مشکل کام ہے البتہ اس سے I_a نہایت آسانی سے

$$I_a = \frac{10\,\text{V}}{6\,\text{k}\Omega} = \frac{5}{3}\,\text{mA}$$

شکل 5.36: مثال 5.16 کا دور۔

حاصل ہوتی ہے۔ شکل 5.36-پ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$I_{\text{قصر}} = I_a - 4\,\text{mA} = \frac{5}{3}\,\text{mA} - 4\,\text{mA} = -\frac{7}{3}\,\text{mA}$$

ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے

$$R_{\text{تھونن}} = \frac{V_{\text{کھلا}}}{I_{\text{قصر}}} = \frac{-14\,\text{V}}{-\frac{7}{3}\,\text{mA}} = 6\,\text{k}\Omega$$

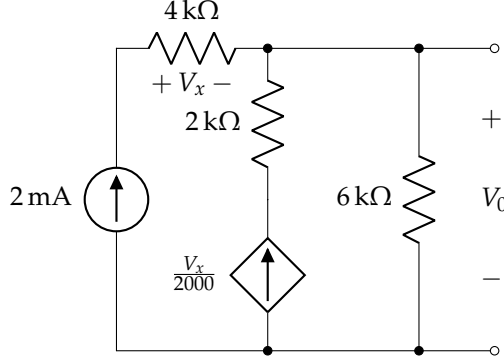
حاصل ہوتا ہے جن کی مدد سے شکل-ب کا تھونن مساوی دور حاصل کیا جا سکتا ہے جسے شکل-الف میں پُر کرنے سے شکل-ٹ حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ٹ سے تقسیم دباو کے کلیے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$V_0 = -14\left(\frac{8\,\text{k}\Omega}{8\,\text{k}\Omega + 6\,\text{k}\Omega}\right) = -8\,\text{V}$$

تھونن ادوار حل کرنے کا قدم با قدم طریقہ

برقی بوجھ کو ہٹا کر کھلے سروں کے مابین دباو $V_{\text{کھلا}}$ حاصل کریں۔ تھونن دباو حاصل کرتے وقت ادوار حل کرنے کے تمام طریقے بروئے کار لائے جا سکتے ہیں۔

کھلے سروں کے مابین تھونن مزاحمت حاصل کریں۔ یہ مزاحمت حاصل کرتے وقت تین اقسام کے ادوار کا سامنا کرنا پڑ سکتا ہے۔ پہلی قسم کے ادوار میں صرف غیر تابع منبع استعمال کیا جاتا ہے۔ ان ادوار میں منبع دباو کو قصر دور اور منبع رو کو کھلے دور کرتے ہوئے تھونن مزاحمت حاصل کی جاتی ہے۔ دوسری قسم کے ادوار میں صرف تابع منبع پائے جاتے ہیں۔ ان ادوار کے برقی سروں پر پیمائشی منبع دباو یا پیمائشی منبع رو نسب کرتے ہوئے برقی سروں پر دباو اور رو حاصل کی جاتی ہے۔ برقی سروں کا دباو تقسیم رو سے تھونن مزاحمت حاصل ہوتی ہے۔ تیسری قسم کے ادوار میں تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں پائے جاتے ہیں۔ ان اقسام کے ادوار میں برقی سروں کو آپس میں قصر دور کرتے ہوئے قصر دور رو حاصل کی جاتی ہے۔ کھلے دور دباو تقسیم قصر دور رو کی شرح تھونن مزاحمت دیتی ہے۔

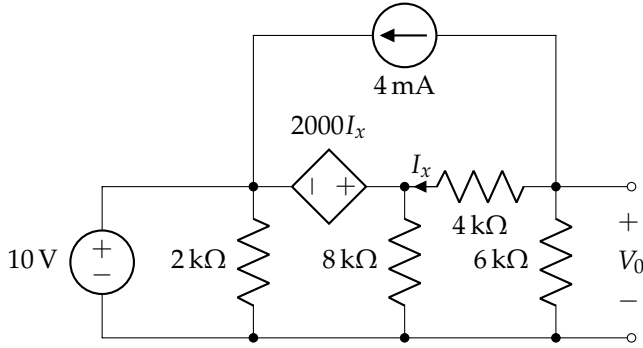
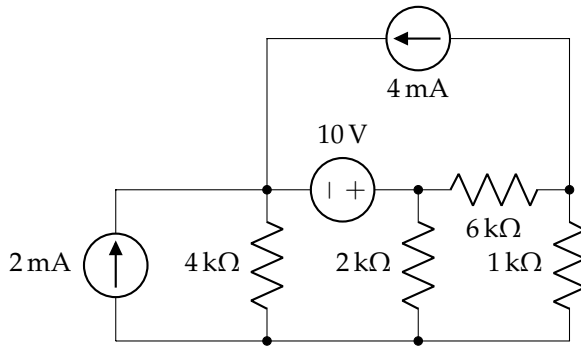
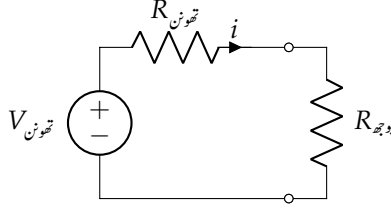
سلسلہ وار جڑے کھلے دور دباو $V_{\text{کھلا}}$ اور تھونن مزاحمت $R_{\text{تھونن}}$ کے ساتھ بوجھ جوڑتے ہوئے بوجھ پر دباو اور اس کی رو حاصل کی جاتی ہے۔

شکل 5.37: مشق 5.10 کا دور۔

مسئلہ نارٹن کے استعمال میں بالکل اسی طرح چلتے ہوئے آخری قدم پر متوازی جڑے قصر دور رو $I_{\text{قصر}}$ اور تھونن مزاحمت $R_{\text{تھونن}}$ کے ساتھ بوجھ جوڑتے ہوئے بوجھ کا دباو اور رو حاصل کی جاتی ہیں۔

مشق 5.10: شکل 5.37 میں مسئلہ تھونن کی مدد سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: 36 V

مشق 5.11: شکل 5.38 میں مسئلہ تھونن کی مدد سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = -\frac{52}{5}\,\text{V}$

شکل 5.38: مشق 5.11 کا دور۔

شکل 5.39: مشق 5.12 کا دور۔

شکل 5.40: بوجھ کو طاقت کی منتقلی۔

مشق 5.12: شکل 5.39 میں مسئلہ تھونن کی مدد سے منبع دباو کی فراہم کردہ طاقت حاصل کریں۔

جواب: $59.6\,\mathrm{mW}$

5.8 زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ

کسی بھی دور کے برقی سروں پر بوجھ لادنے سے بوجھ میں طاقت منتقل ہوتی ہے۔آپ جانتے ہیں کہ ہر ممکنہ دور کا تھونن مساوی دور حاصل کیا جا سکتا ہے لہٰذا اس مسئلے کو شکل 5.40 سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اس شکل میں بوجھ کو

$$P_{\text{بوجھ}} = i^2 R_{\text{بوجھ}} = \left(\frac{V_{\text{تھونن}}}{R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}} \right)^2 R_{\text{بوجھ}}$$

طاقت منتقل ہو گی۔آئیں جانتے ہیں کہ کس قیمت کے $R_{\text{بوجھ}}$ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گی۔یہ جاننے کے لئے درج بالا مساوات کے تفرق کو صفر کے برابر پُر کرتے ہوئے $R_{\text{بوجھ}}$ کی درکار قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}P_{\text{بوجھ}}}{\mathrm{d}R_{\text{بوجھ}}} = \frac{V_{\text{تھونن}}^2 \left(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}\right)^2 - 2V_{\text{تھونن}}^2 R_{\text{بوجھ}} \left(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}\right)}{\left(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}\right)^4} = 0$$

اس سے

$$R_{\text{بوجھ}} = R_{\text{تھونن}} \qquad \text{بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کا شرط} \tag{5.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس نتیجے کے تحت بوجھ کو اس صورت زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گی جب بوجھ کی مزاحمت دور کے تھونن مزاحمت کے برابر ہو۔

مثال 5.17: شکل 5.41 میں مزاحمت بوجھ کی وہ قیمت دریافت کریں جس میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گی۔اس طاقت کا تخمینہ لگائیں۔مزاحمت بوجھ کی قیمت 10 % کم اور زیادہ ہونے کی صورت میں اسے کتنی طاقت منتقل ہوتی ہے۔

حل:بوجھ کے علاوہ بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔تھونن دباو کی خاطر بوجھ کو ہٹاتے ہوئے شکل 5.41-ب سے $V_{\text{کھلا}}$ حاصل کرتے ہیں۔شکل-ب سے

$$-10 + 2000(i_1 - i_2) + 8000 i_1 = 0$$
$$i_2 = 0.002$$

لکھے جا سکتے ہیں جنہیں حل کرنے سے

$$i_1 = \frac{7}{5}\,\text{mA}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں تھونن دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$V_{\text{کھلا}} = 8000 i_1 + 6000 i_2 = 23.2\,\text{V}$$

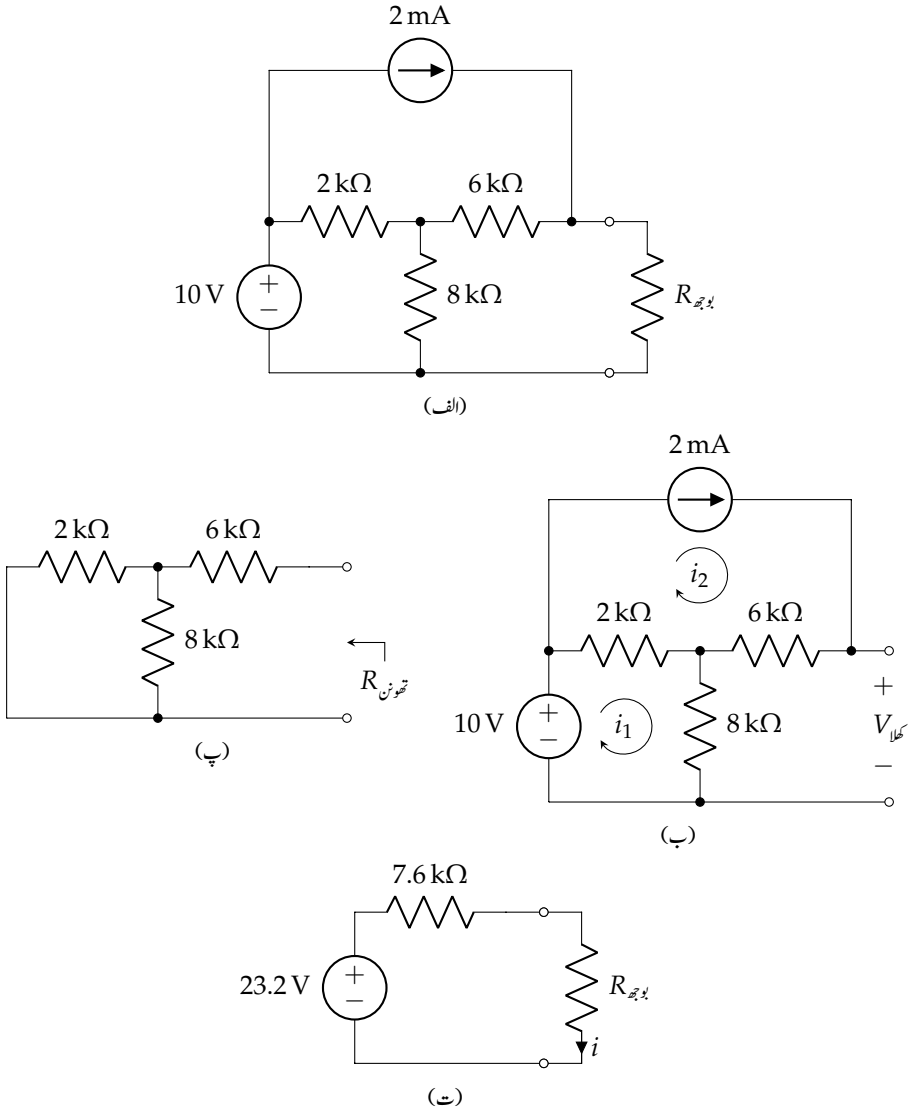
تھونن مزاحمت حاصل کرنے کی خاطر منبع دباو کو قصر دور اور منبع رو کو کھلا دور کرتے ہوئے شکل-پ حاصل کیا گیا جہاں سے

$$R_{\text{تھونن}} = 2\,\text{k}\Omega \parallel 8\,\text{k}\Omega + 6\,\text{k}\Omega = 7.6\,\text{k}\Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی اس صورت ہو گی جب

$$R_{\text{بوجھ}} = 7.6\,\text{k}\Omega$$

ہو۔تھونن مزاحمت اور تھونن دباو کو استعمال کرتے ہوئے تھونن مساوی دور حاصل ہوتا ہے جس کے ساتھ بوجھ جوڑ کر شکل-ت حاصل ہوتا ہے۔بوجھ کے مزاحمت کو تھونن مزاحمت کے برابر لیتے ہوئے

$$i = \frac{23.2}{7600 + 7600} = 1.5263\,\text{mA}$$

شکل 5.41: مثال 5.17 کا دور۔

اور

$$P_{\text{بوجھ}} = i^2 R_{\text{تھونن}} = \left(1.5263 \times 10^{-3}\right)^2 \times 7600 = 17.7\,\text{mW}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آئیں بوجھ کی مزاحمت کم اور زیادہ کرتے ہوئے منتقل طاقت حاصل کریں۔بوجھ کی مزاحمت دس فی صد کم کرنے سے

$$R'_{\text{بوجھ}} = 6.84\,\text{k}\Omega$$

ہو گا جس سے

$$i = \frac{23.2}{7600 + 6840} = 1.606\,65\,\text{mA}$$

اور

$$P'_{\text{بوجھ}} = i^2 R'_{\text{بوجھ}} = \left(1.60665 \times 10^{-3}\right)^2 \times 6840 = 17.65\,\text{mW}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح بوجھ کی مزاحمت دس فی صد بڑھانے سے

$$R''_{\text{بوجھ}} = 8.36\,\text{k}\Omega$$

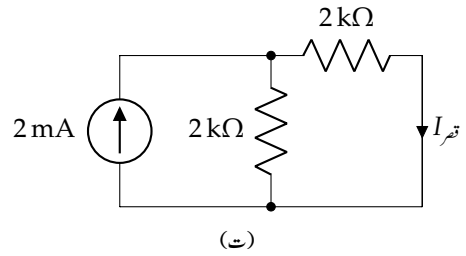
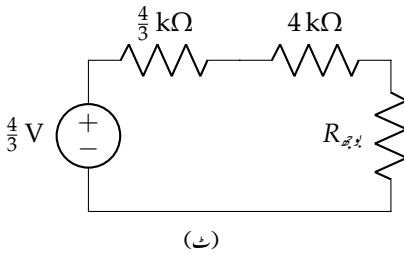
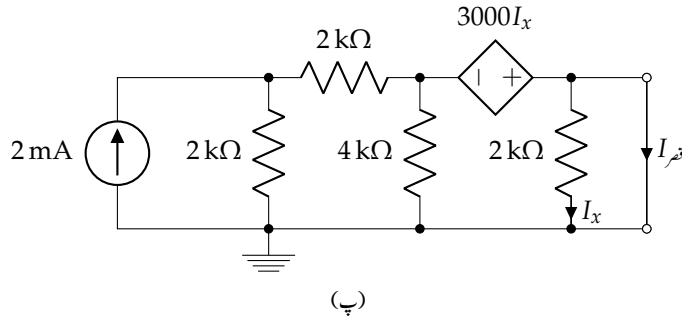
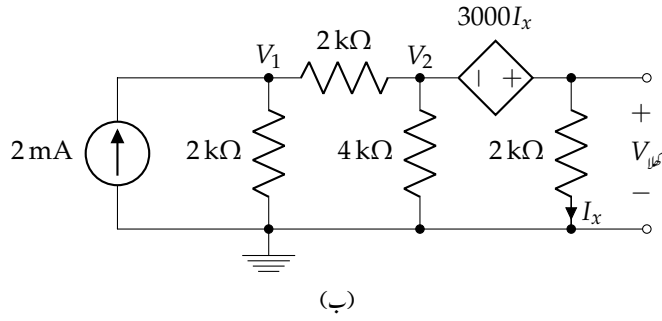
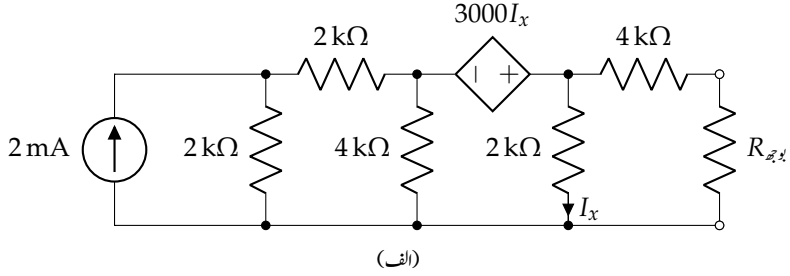
ہو گا جس سے

$$i = \frac{23.2}{7600 + 8360} = 1.4536\,\text{mA}$$

اور

$$P''_{\text{بوجھ}} = i^2 R''_{\text{بوجھ}} = \left(1.4536 \times 10^{-3}\right)^2 \times 8360 = 17.67\,\text{mW}$$

حاصل ہوتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بوجھ کی مزاحمت کو $R_{\text{تھونن}}$ سے کم یا زیادہ کرنے سے بوجھ کو منتقل طاقت کم ہو جاتا ہے۔

شکل 5.42: مثال 5.18 کا دور۔

مثال 5.18: شکل 5.42 میں مزاحمتی بوجھ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گی۔

حل:اس دور پر غور کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر $1\,\mathrm{k\Omega}$ کے بالکل دائیں سے دور کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جائے تب قصر دور رو نہایت آسانی سے حاصل ہوتی ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے جس سے $V_{کھلا}$ حاصل کرتے ہیں۔نچلی جوڑ کو زمین تصور کرتے ہوئے بالائی سادہ جوڑ اور مخلوط جوڑ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
-0.002+\frac{V_1}{2000}+\frac{V_1-V_2}{2000}&=0\\
\frac{V_2-V_1}{2000}+\frac{V_2}{4000}+\frac{V_2+3000I_x}{2000}&=0
\end{aligned}
$$

ان میں

$$
I_x=\frac{V_2+3000I_x}{2000}
$$

یعنی

$$
I_x=-\frac{V_2}{1000}
$$

پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$
\begin{aligned}
V_1&=\frac{5}{3}\,\mathrm{V}\\
V_2&=2\frac{2}{3}\,\mathrm{V}\\
I_x&=\frac{2}{3}\,\mathrm{mV}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں

$$
V_{کھلا}=2000I_x=\frac{4}{3}\,\mathrm{V}
$$

ہو گا۔

قصر دور رو حاصل کرنے کی خاطر شکل-ب کے برقی سروں کو آپس میں قصر دور کرتے ہیں۔ایسا کرنے سے شکل-پ حاصل ہوتا ہے۔اس شکل میں دائیں جانب $2\,\mathrm{k\Omega}$ کے متوازی قصر پایا جاتا ہے لہٰذا اس مزاحمت میں صفر رو پائی

جائے گی یعنی $I_x = 0$ ہو گا۔اس طرح تابع منبع دباو صفر وولٹ دباو پیدا کرے گا لہٰذا اسے بھی قصر دور تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں $4\,\mathrm{k\Omega}$ کے بھی متوازی قصر پایا جائے گا لہٰذا اس میں بھی صفر رو پائی جائے گی۔ان تمام حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے شکل حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم رو کے کلیے کو استعمال کرتے ہوئے شکل-ت سے

$$I_{\text{قصر}} = 0.002\left(\frac{2000}{2000+2000}\right) = 1\,\mathrm{mA}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں تھونن مزاحمت درج ذیل ہو گا۔

$$R_{\text{تھونن}} = \frac{V_{\text{کھلا}}}{I_{\text{قصر}}} = \frac{\frac{4}{3}\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{mA}} = \frac{4}{3}\,\mathrm{k\Omega}$$

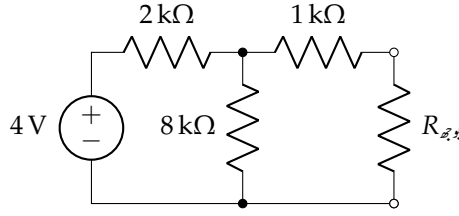
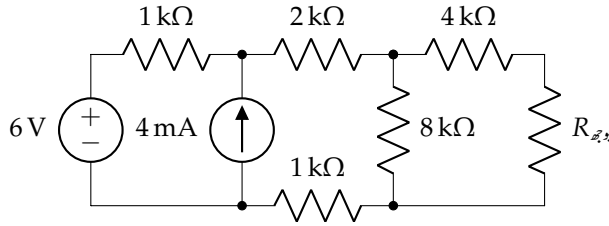
تھونن مزاحمت اور دباو سے تھونن مساوی دور کے ساتھ بقایا پرزے جوڑنے سے شکل-ٹ حاصل ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ بوجھ کی مزاحمت بقایا تمام دور کے تھونن مزاحمت کے برابر ہو۔شکل 5.42-ٹ کو دیکھتے ہوئے یوں زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے درکار مزاحمت

$$R_{\text{بوجھ}} = \frac{4}{3}\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} = \frac{16}{3}\,\mathrm{k\Omega}$$

حاصل ہوتا ہے۔

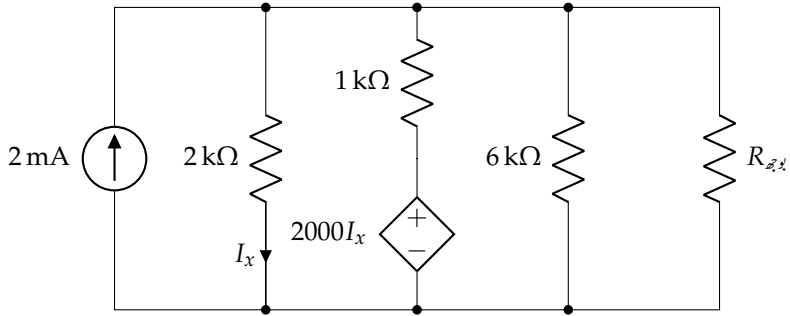
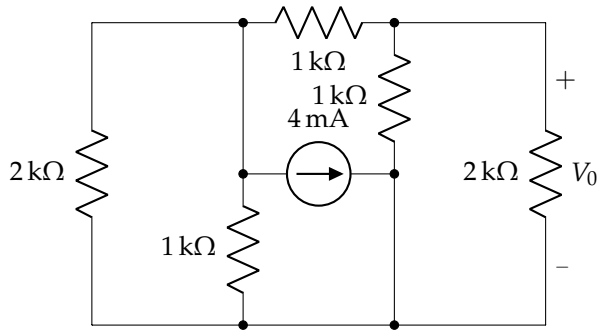
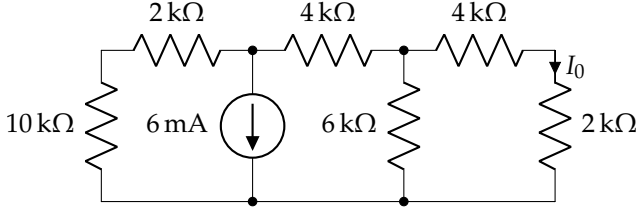
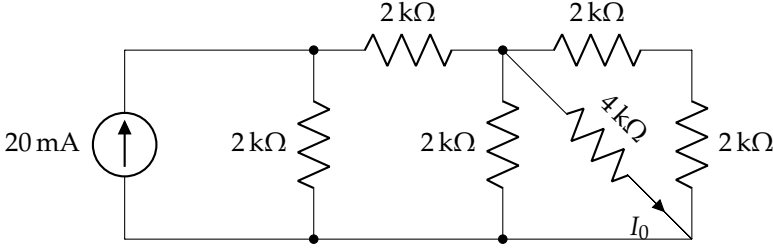
مشق 5.13: شکل 5.43 میں زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے درکار مزاحمت بوجھ دریافت کریں۔

جواب: $R_{\text{بوجھ}} = 2.6\,\mathrm{k\Omega}$

مشق 5.14: شکل 5.44 میں زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے درکار مزاحمت بوجھ دریافت کریں۔زیادہ سے زیادہ منتقل ہونے والی طاقت کی قیمت بھی حاصل کریں۔

شکل 5.43: مشق 5.13 کا دور۔

شکل 5.44: مشق 5.14 کا دور۔

جوابات: $\frac{20}{3}\,\mathrm{k\Omega}$ ، $\frac{5}{3}\,\mathrm{mW}$

مشق 5.15: شکل 5.45 میں زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے درکار مزاحمت بوجھ دریافت کریں۔

جواب: $R_{\text{بوجھ}} = 1.5\,\mathrm{k\Omega}$

شکل 5.45: مشق 5.15 کا دور۔

شکل 5.46: سوال 5.1 کا دور۔

شکل 5.47: سوال 5.2 کا دور۔

شکل 5.48: سوال 5.3 کا دور۔

سوالات

سوال 5.1: شکل 5.46 میں $V_0 = 2\,\text{V}$ فرض کرتے ہوئے مسئلہ خطیت کے استعمال سے اصل V_0 دریافت کریں۔

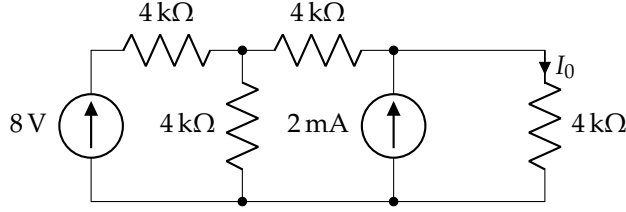
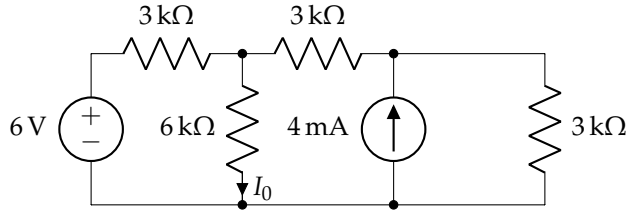
جواب: $V_0 = -\frac{16}{21}\,\text{V}$

سوال 5.2: شکل 5.47 میں $I_0 = 1\,\text{mA}$ فرض کرتے ہوئے مسئلہ خطیت کے استعمال سے اصل I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = -1.895\,\text{mA}$

سوال 5.3: شکل 5.48 میں $I_0 = 1\,\text{mA}$ فرض کرتے ہوئے مسئلہ خطیت کے استعمال سے اصل I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = 2\,\text{mA}$

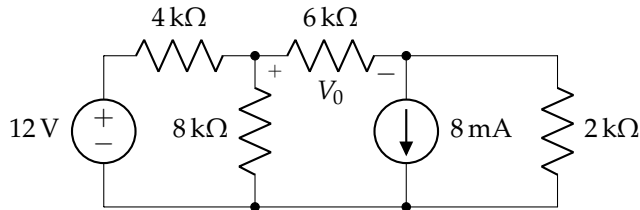
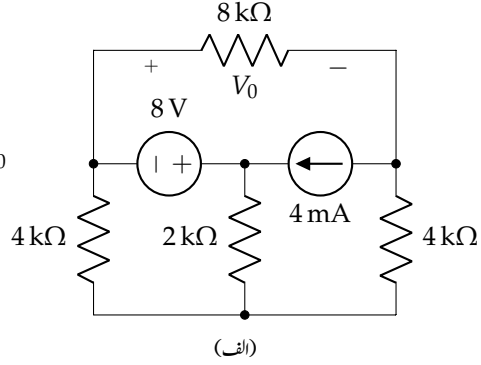
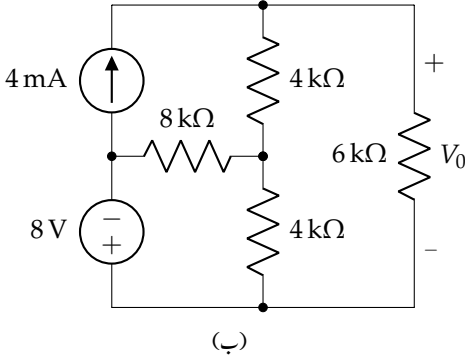
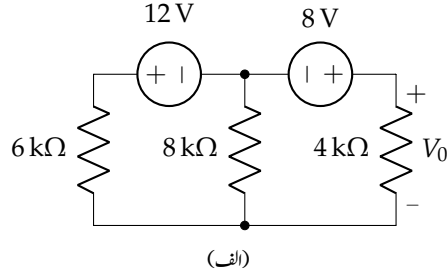
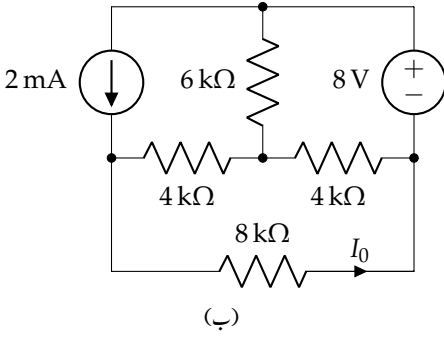
سوال 5.4: شکل 5.49 میں مسئلہ خطی میل کے استعمال سے I_0 دریافت کریں۔

شکل 5.49: سوال 5.4 کا دور۔

شکل 5.50: سوال 5.5 کا دور۔

جواب: $I_0 = \frac{8}{5}\,\text{mA}$

سوال 5.5: شکل 5.50 میں مسئلہ خطی میل کے استعمال سے I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = 1\,\text{mA}$

سوال 5.6: شکل 5.51 میں مسئلہ خطی میل کے استعمال سے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = 13.5\,\text{V}$

شکل 5.51: سوال 5.6 کا دور۔

شکل 5.52: سوال 5.7 اور سوال 5.8 کے ادوار۔

شکل 5.53: سوال 5.9 اور سوال 5.10 کے ادوار۔

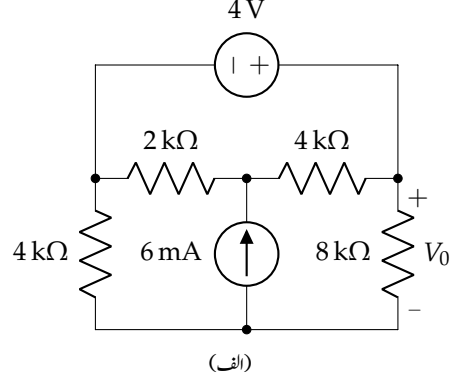
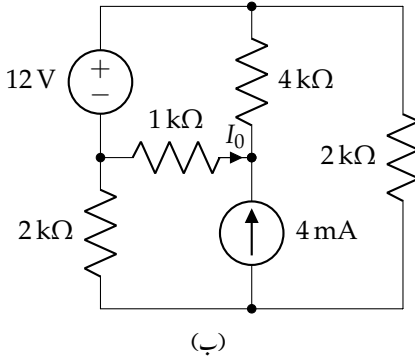
سوال 5.7: شکل 5.52-الف میں مسئلہ خطی میل کے استعمال سے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = 9.6\,\mathrm{V}$

سوال 5.8: شکل 5.52-ب میں مسئلہ خطی میل کے استعمال سے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = \frac{56}{19}\,\mathrm{V}$

سوال 5.9: شکل 5.53-الف میں مسئلہ تھونن کی مدد سے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = \frac{8}{13}\,\mathrm{V}$

شکل 5.54: سوال 5.11 اور سوال 5.12 کے ادوار۔

سوال 5.10: شکل 5.53-ب میں مسئلہ تھونن کی مدد سے I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = \frac{26}{27}\,\mathrm{mA}$

سوال 5.11: شکل 5.54-الف میں مسئلہ تھونن کی مدد سے V_0 دریافت کریں۔

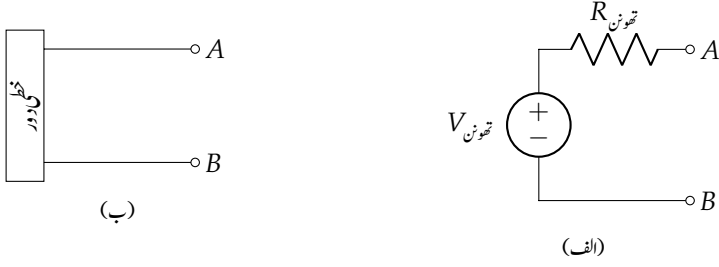
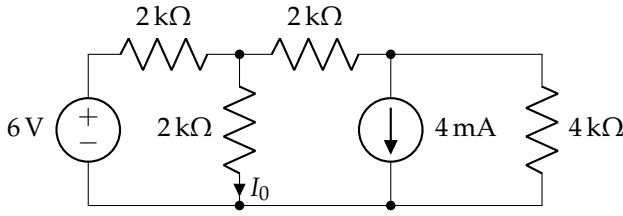
جواب: $V_0 = \frac{56}{3}\,\mathrm{V}$

سوال 5.12: شکل 5.54-ب میں مسئلہ تھونن کی مدد سے I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = -\frac{28}{5}\,\mathrm{mA}$

سوال 5.13: شکل 5.55-الف میں AB سروں پر $2\,\mathrm{k\Omega}$ نسب کرنے سے مزاحمت میں $\frac{5}{2}\,\mathrm{mA}$ پیدا ہوتی ہے جبکہ ان سروں پر $6\,\mathrm{k\Omega}$ نسب کرنے سے مزاحمت میں $\frac{5}{4}\,\mathrm{mA}$ پیدا ہوتی ہے۔ دور کے متغیرات $V_{\text{تھونن}}$ اور $R_{\text{تھونن}}$ دریافت کریں۔

جواب: $10\,\mathrm{V}$ ، $2\,\mathrm{k\Omega}$

سوال 5.14: شکل 5.55-ب میں AB سروں پر $6\,\mathrm{k\Omega}$ نسب کرنے سے $V_{AB} = 6\,\mathrm{V}$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $3\,\mathrm{k\Omega}$ نسب کرنے سے $V_{AB} = 4\,\mathrm{V}$ حاصل ہوتا ہے۔ خطی دور کے تھونن متغیرات $V_{\text{تھونن}}$ اور $R_{\text{تھونن}}$ دریافت کریں۔

شکل 5.55: سوال 5.13 اور سوال 5.14 کے ادوار۔

شکل 5.56: سوال 5.15 کا دور۔

جواب: $12\,\text{V}$ ، $6\,\text{k}\Omega$

سوال 5.15: شکل 5.56 میں مسئلہ نارٹن استعمال کرتے ہوئے I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = \frac{1}{7}\,\text{mA}$

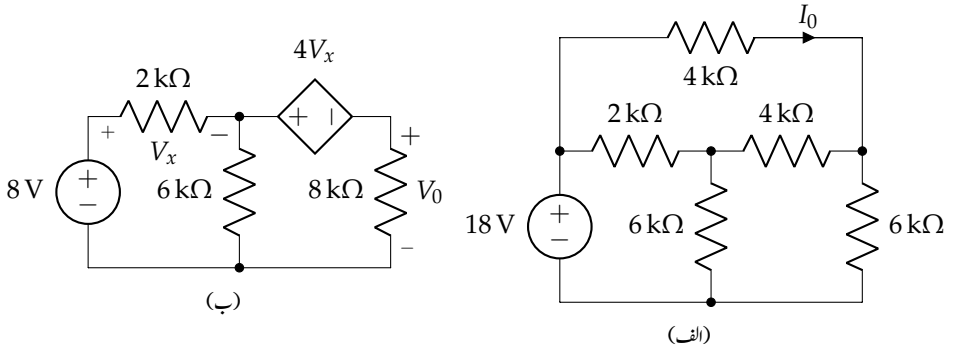
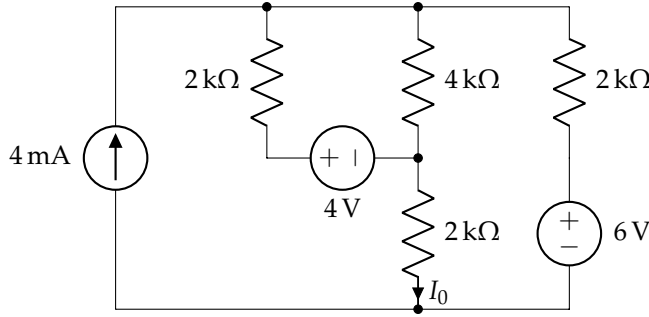
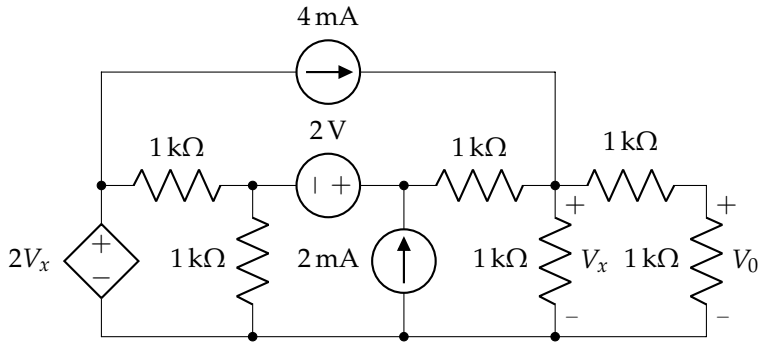
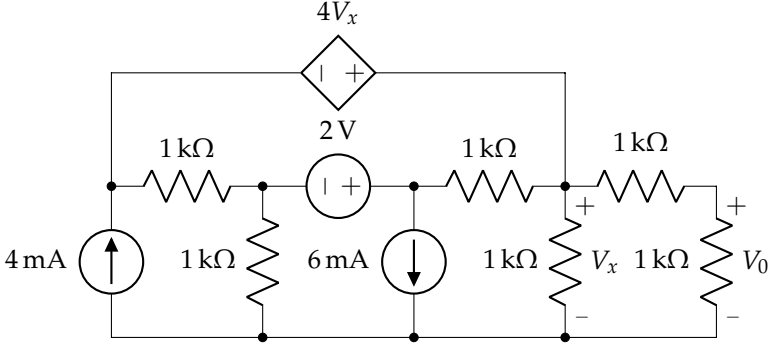
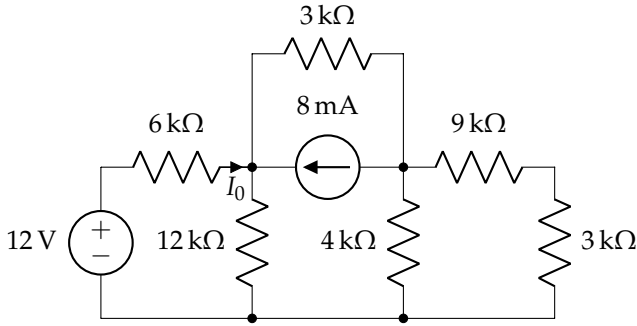
سوال 5.16: شکل 5.57-الف میں مسئلہ نارٹن استعمال کرتے ہوئے I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = \frac{90}{47}\,\text{mA}$

سوال 5.17: شکل 5.57-ب میں مسئلہ نارٹن استعمال کرتے ہوئے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = -\frac{32}{31}\,\text{V}$

سوال 5.18: شکل 5.58 میں مسئلہ نارٹن استعمال کرتے ہوئے I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = \frac{17}{8}\,\text{mA}$

شکل 5.57: سوال 5.16 اور سوال 5.17 کے ادوار۔

شکل 5.58: سوال 5.18 کا دور۔

شکل 5.59: سوال 5.19 کا دور۔

شکل 5.60: سوال 5.20 کا دور۔

شکل 5.61: سوال 5.21 کا دور۔

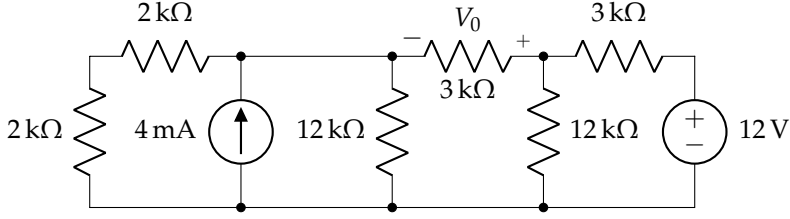
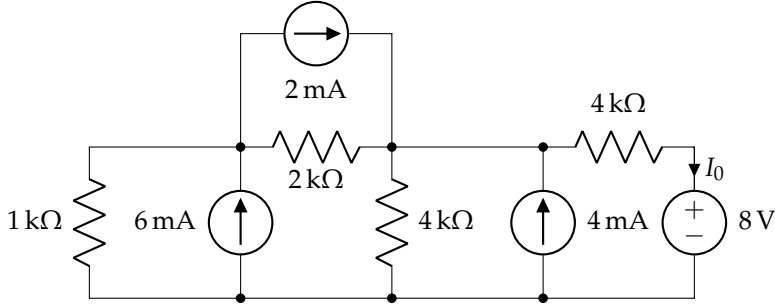
سوال 5.19: شکل 5.59 میں مسئلہ تھونن استعمال کرتے ہوئے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = \frac{2}{3}\,\text{V}$

سوال 5.20: شکل 5.60 میں مسئلہ نارٹن استعمال کرتے ہوئے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = -2\,\text{V}$

سوال 5.21: شکل 5.61 کو تبادلہ منبع سے حل کرتے ہوئے I_0 معلوم کریں۔

جواب: $I_0 = -\frac{2}{5}\,\text{mA}$

شکل 5.62: سوال 5.22 کا دور۔

شکل 5.63: سوال 5.23 کا دور۔

سوال 5.22: شکل 5.62 کو تبادلہ منبع سے حل کرتے ہوئے V_0 معلوم کریں۔

جواب: $V_0 = -\frac{6}{7}\,\mathrm{V}$

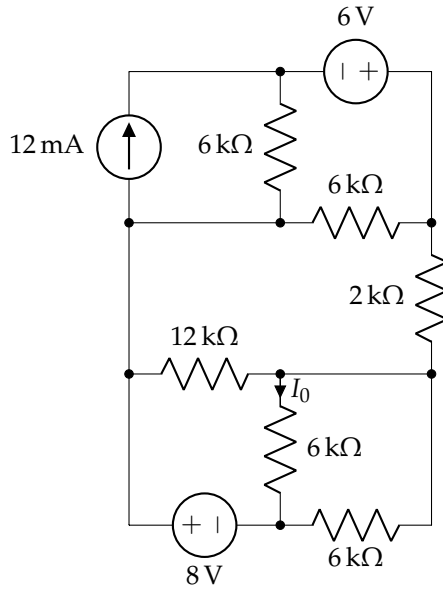
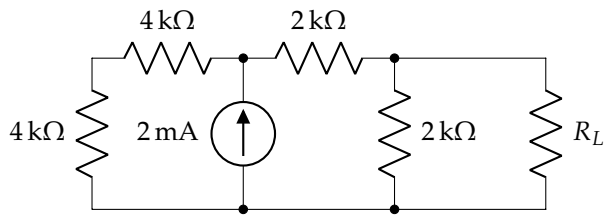
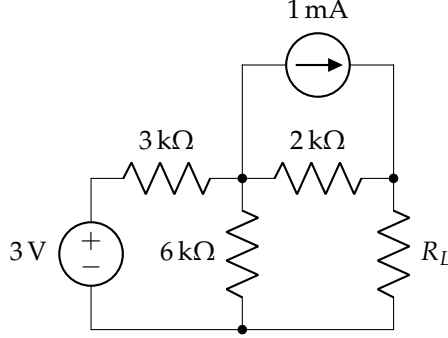
سوال 5.23: شکل 5.63 کو تبادلہ منبع سے حل کرتے ہوئے I_0 معلوم کریں۔

جواب: $I_0 = 2\,\mathrm{mA}$

سوال 5.24: شکل 5.64 کو تبادلہ منبع سے حل کرتے ہوئے I_0 معلوم کریں۔

جواب: $I_0 = \frac{302}{111}\,\mathrm{mA}$

سوال 5.25: شکل 5.65 میں بوجھ R_L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر اس کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کا تخمینہ لگائیں۔

جوابات: $R_L = \frac{8}{3}\,\mathrm{k\Omega}$ ، $p = \frac{512}{507}\,\mathrm{mW}$

شکل 5.64: سوال 5.24 کا دور۔

شکل 5.65: سوال 5.25 کا دور۔

شکل 5.66: سوال 5.26 کا دور۔

سوال 5.26: شکل 5.66 میں بوجھ R_L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر اس کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کا تخمینہ لگائیں۔

جوابات: $R_L = 4\,\mathrm{k\Omega}$ ، $p = 1\,\mathrm{mW}$

سوال 5.27: شکل 5.67-الف میں بوجھ R_L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر اس کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کا تخمینہ لگائیں۔ $\frac{R_L}{2}$ اور $2R_L$ بوجھ کی صورت میں بوجھ کو منتقل طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $R_L = \frac{14}{3}\,\mathrm{k\Omega}$ ، $p = \frac{24}{7}\,\mathrm{mW}$ ، $\frac{64}{21}\,\mathrm{mW}$ ، $\frac{64}{21}\,\mathrm{mW}$

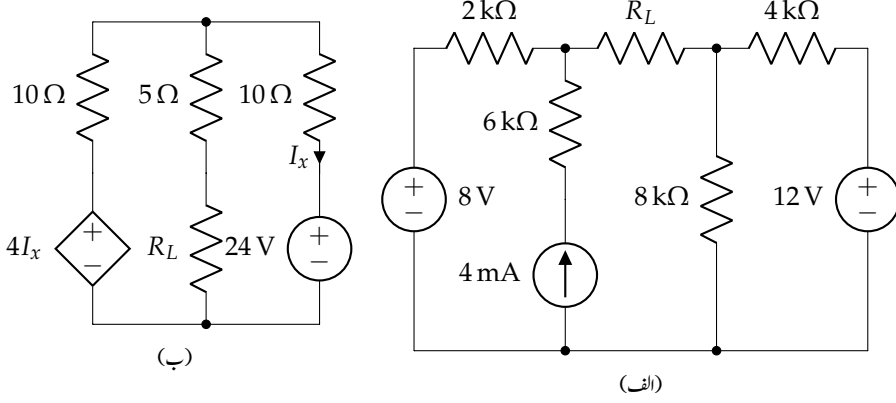
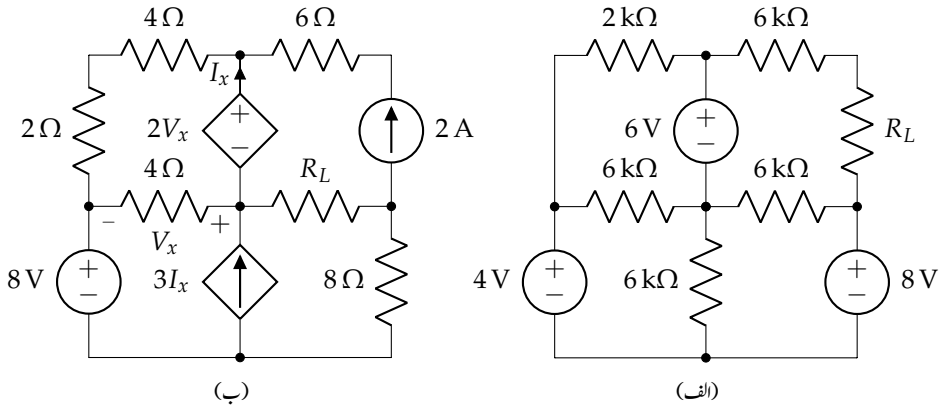
سوال 5.28: شکل 5.67-ب میں بوجھ R_L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر اس کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کا تخمینہ لگائیں۔

جوابات: $R_L = \frac{45}{4}\,\Omega$ ، $p = \frac{9}{5}\,\mathrm{W}$

سوال 5.29: شکل 5.68-الف میں بوجھ R_L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر اس کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کا تخمینہ لگائیں۔

جوابات: $R_L = 7\,\mathrm{k\Omega}$ ، $p = \frac{1}{28}\,\mathrm{mW}$

سوال 5.30: شکل 5.68-ب میں بوجھ R_L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر اس کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کا تخمینہ لگائیں۔

جوابات: $R_L = \frac{20}{3}\,\Omega$ ، $p = \frac{484}{15}\,\mathrm{W}$

شکل 5.67: سوال 5.27 اور سوال 5.28 کے ادوار۔

شکل 5.68: سوال 5.29 اور سوال 5.30 کے ادوار۔

باب 6

برق گیر اور امالہ گیر

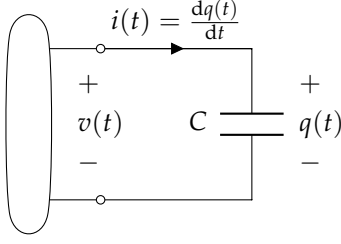
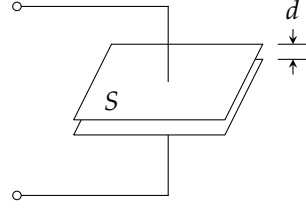
6.1 برق گیر

متوازی چادر برق گیر[1] جسے شکل 6.1-الف میں دکھایا گیا ہے کے بارے میں آپ نے چھوٹی جماعتوں میں پڑھا ہو گا۔خالی خلاء میں دو عدد یکساں، سیدھے متوازی موصل چادر جن کے مابین فاصلہ d ہو اور ایک چادر کا رقبہ S ہو کی برقی گنجائش[2] C درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \tag{6.1}$$

جہاں ϵ_0 خالی خلاء کا برقی مستقل[3] ہے جس کی قیمت $8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ ہے۔برقی گنجائش کو کولمب فی وولٹ $\mathrm{C\,V^{-1}}$ یا فیراڈ F میں ناپا جاتا ہے۔فیراڈ[4] کی اکائی انتہائی بڑی مقدار ہے لہٰذا برقی گنجائش کو عموماً مائیکرو فیراڈ $\mathrm{\mu F}$ اور نینو فیراڈ nF میں ناپا جاتا ہے۔

---

[1] capacitor
[2] capacitance
[3] permitivity, electric constant
[4] فیراڈ کی اکائی انگلستان کے مشہور ماہر طبیعیات مائکل فیراڈے کے نام سے منسوب ہے۔

شکل 6.1: متوازی چادر برق گیر۔

مثال 6.1: متوازی چادر برق گیر میں چادروں کے مابین فاصلہ $0.1\,\mathrm{mm}$ ہے جبکہ اس کی برقی گنجائش $0.1\,\mu\mathrm{F}$ ہے۔ایک چادر کا رقبہ دریافت کریں۔

حل: مساوات 6.1 استعمال کرتے ہوئے

$$S = \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{0.1 \times 10^{-6} \times 0.1 \times 10^{-3}}{8.854 \times 10^{-12}} = 1.129\,\mathrm{m}^2$$

حاصل ہوتا ہے۔

شکل 6.1-ب میں برقی گیر کو $v(t)$ منبع دباو کے ساتھ جوڑا گیا ہے جس کی وجہ سے برق گیر کے ایک چادر پر مثبت برقی بار $+q(t)$ اور دوسرے چادر پر منفی برقی بار $-q(t)$ جمع ہوتا ہے جبکہ دونوں چادروں کے مابین دباو $v(t)$ پایا جاتا ہے۔برق گیر کے چادروں پر بار اور ان کے مابین دباو خطی تعلق

$$q(t) = Cv(t) \tag{6.2}$$

رکھتے ہیں جہاں خطی تعلق کے مستقل کو C سے ظاہر اور برقی گنجائش[5] کہتے ہیں۔ برقی گنجائش کے نام کو چھوٹا کرتے ہوئے عموماً گنجائش کہا جاتا ہے۔وقت کے ساتھ بدلتا بار کو برقی رو کہا جاتا ہے۔یوں برق گیر کے چادروں پر بار کی تبدیلی رو کو جنم دیتی ہے جسے

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{6.3}$$

---

[5] capacitance

لکھا جا سکتا ہے جسے شکل 6.1-ب میں دکھایا گیا ہے۔برق گیر کے مثبت برقی سر پر مثبت رو داخل ہوتی ہے۔یوں مزاحمت کی طرح برق گیر پر بھی دباو اور رو غیر فعال رائج سمت کے تحت ہیں۔ مساوات 6.2 کو استعمال کرتے ہوئے

$$i = \frac{\mathrm{d}(Cv)}{\mathrm{d}t} \tag{6.4}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مستقل برقی گنجائش کی صورت میں اسے

$$i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{6.5}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 6.5 کو

$$\mathrm{d}v = \frac{1}{C} i \,\mathrm{d}t$$

لکھ کر تکمل لینے سے

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i \,\mathrm{d}t \tag{6.6}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $t = -\infty$ پر برق گیر کا دباو $v(-\infty) = 0$ لیا گیا ہے۔مندرجہ بالا مساوات میں $v(t)$ لکھ کر وقت کو آزاد متغیر[6] اور دباو کو تابع متغیر[7] کے طور پر لکھا گیا ہے۔اس مساوات کو دو ٹکڑوں میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i \,\mathrm{d}t + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i \,\mathrm{d}t \\ &= v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i \,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{6.7}$$

جہاں وقت $t = -\infty$ تا $t = t_0$ کے دوران برق گیر پر جمع ہونے والے بار کی وجہ سے برق گیر پر وقت $t = t_0$ پر دباو $v(t_0)$ پایا جاتا ہے۔

برق گیر میں ذخیرہ توانائی $w_C(t)$ کو طاقت کے تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔برق گیر کو منتقل طاقت $p(t)$ کو

$$p(t) = v(t)i(t) = v(t)C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.8}$$

---

[6] independent variable
[7] dependent variable

لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $p=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ کے برابر ہے لہٰذا برق گیر میں ذخیرہ توانائی کو

$$
\begin{aligned}
w_C(t) &= \int_{-\infty}^{t} Cv(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\
&= C\int_{v(-\infty)}^{v(t)} v(t)\,\mathrm{d}v(t) \\
&= C\frac{v^2(t)}{2}\bigg|_{v(-\infty)}^{v(t)}
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
w_C(t)=\frac{Cv^2(t)}{2} \tag{6.9}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $v(-\infty)=0$ لیا گیا ہے۔مساوات 6.2 کی مدد سے اس مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
w_C(t)=\frac{q^2(t)}{2C} \tag{6.10}
$$

مساوات 6.9 اور مساوات 6.10 برقی گیر میں ذخیرہ مخفی توانائی[8] دیتے ہیں۔یہ وہی توانائی ہے جو برق گیر میں بار بھرتے ہوئے خرچ کی جاتی ہے۔

مساوات 6.5 کے تحت برقی گیر پر دباو کے تبدیلی کی شرح اور رو کا راست تناسب تعلق ہے۔چونکہ یک سمت دباو تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا برق گیر پر یک سمت دباو کی صورت میں اس میں کوئی رو نہیں گزرے گی۔یوں یک سمت دباو کی نقطہ نظر سے برق گیر کھلا دور ہے لہٰذا ادوار کے یک سمت حل کے دوران تمام برق گیروں کو کھلے دور تصور کیا جاتا ہے۔

مساوات 6.8 کے تحت برق گیر کو منتقل طاقت، دباو کی شرح تبدیلی کے راست تناسب ہے۔یوں برق گیر کا دباو فوراً $(\mathrm{d}t\to 0)$ تبدیل کرنے کے لئے لامحدود طاقت درکار ہو گی۔کائنات میں لامحدود طاقت کا منبع نہیں پایا جاتا لہٰذا برق گیر کا دباو فوراً کسی صورت تبدیل نہیں کیا جا سکتا۔اسی حقیقت کی وضاحت مساوات 6.5 کے استعمال سے مثال 6.2 میں کی گئی ہے۔ مساوات 6.5 کے تحت برق گیر کا دباو فوراً تبدیل کرنے کے لئے لا محدود رو درکار ہو گی۔چونکہ لا محدود رو کائنات میں کہیں نہیں پائی جاتی لہٰذا ایسا ممکن نہیں ہے۔ یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت

[8] potential energy

دور میں سوئچ کو چالو سے غیر چالو (یا غیر چالو سے چالو) کرنے کے فوراً بعد دور میں موجود برق گیر کے دباو کی قیمت وہی ہو گی جو سوئچ چالو (یا غیر چالو) کرنے سے پہلے تھی۔اس حقیقت کی مساواتی شکل درج ذیل ہے۔

$$v_C(t_+) = v_C(t_-) \tag{6.11}$$

مساوات 6.11 کے تحت برق گیر کا دباو کسی بھی لمحے t کے فوراً بعد t_+ اور اس لمحے کے فوراً پہلے t_- برابر ہوں گے۔ یوں برق گیر کا دباو بلا جوڑ تفاعل[9] ہے جس میں سیڑھی نما[10] یکدم تبدیلی ممکن نہیں ہے۔

مساوات 6.2 برق گیر کی عمومی مساوات ہے۔کسی بھی دو موصل جن کے درمیان دباو v اور جن میں مثبت موصل پر $+q$ اور منفی موصل پر $-q$ بار پایا جاتا ہو کی گنجائش مساوات 6.2 دیتی ہے۔یوں دور کے مختلف موصل حصوں مثلاً مزاحمت، باقی تار، برق گیر وغیرہ کے مابین غیر مطلوب[11] برقی گنجائش پائی جائے گی۔بعض ادوار میں غیر مطلوب برقی گنجائش کو کم سے کم رکھنا ضروری ہوتا ہے جبکہ یک سمت ادوار میں ان کے کردار کو رد کیا جاتا ہے

مثال 6.2: برق گیر کی دباو $20\,\text{V}$ سے $20.1\,\text{V}$ کرنے کی خاطر منبع رو استعمال کیا جاتا ہے۔برق گیر کی گنجائش $1\,\mu\text{F}$ ہے۔تبدیلی کا دورانیہ ایک سیکنڈ، ایک نینو سیکنڈ، ایک فیمٹو سیکنڈ اور صفر سیکنڈ تصور کرتے ہوئے درکار رو کی قیمت حاصل کریں۔دباو کے تبدیلی کے دوران رو کی قیمت مستقل تصور کریں۔

حل:دورانیہ ایک سیکنڈ تصور کرتے ہوئے مساوات 6.5 کے تحت

$$i = 10^{-6} \times \left(\frac{20.1 - 20}{1}\right) = 0.1\,\mu\text{A}$$

درکار ہو گی۔اسی طرح بالترتیب بقایا دورانیوں کے لئے درج ذیل رو حاصل ہوتی ہیں۔

$$i = 10^{-6} \times \left(\frac{20.1 - 20}{10^{-9}}\right) = 100\,\text{A}$$
$$i = 10^{-6} \times \left(\frac{20.1 - 20}{10^{-15}}\right) = 10^{8}\,\text{A}$$
$$i = 10^{-6} \times \left(\frac{20.1 - 20}{0}\right) = \infty\,\text{A}$$

دباو میں فوراً تبدیلی کے لئے لامحدود رو درکار ہے

---

[9] continuous function
[10] step
[11] stray

مثال 6.3: دو قریبی موصل تاروں پر $300\,\text{nC}$ بار ذخیرہ کرنے سے ان کے مابین $15\,\text{V}$ دباو پیدا ہوتا ہے۔ان جوڑی موصل کی برقی گنجائش دریافت کریں۔

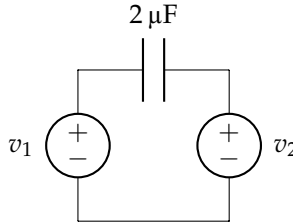
حل: مساوات 6.2 کے تحت

$$C=\frac{q}{v}=\frac{300\times10^{-9}}{15}=20\,\text{nF}$$

ہو گا۔

مثال 6.4: شکل 6.2 میں $v_1=17\,\text{V}$ اور $v_2=3\,\text{V}$ کی صورت میں برق گیر پر دباو اور بار دریافت کریں۔

حل: برق گیر پر دباو سے مراد اس کے دو برقی سروں کے مابین دباو ہے۔برق گیر کے دائیں سر کو برقی زمین تصور کرتے ہوئے برق گیر کا دباو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_C=17\,\text{V}-3\,\text{V}=14\,\text{V}$$

شکل 6.2: مثال 6.4 اور مثال 6.5 کا دور۔

یوں مساوات 6.2 کے تحت

$$q = (2\,\mu\text{F})\,(14\,\text{V}) = 28\,\mu\text{C}$$

ہو گا۔اس طرح برق گیر کے بائیں طرف پر $28\,\mu\text{C}$ جبکہ اس کے دائیں طرف پر $-28\,\text{C}$ بار ہو گا۔

مثال 6.5: شکل 6.2 میں $v_1 = 20\,\text{V}$ اور $v_2 = 0.1 \sin 100t\,\text{V}$ ہے۔برقی رو دریافت کریں۔

حل: برق گیر کے بائیں سر کو زمین تصور کرتے ہیں۔یوں برق گیر پر دباو v_C درج ذیل ہو گا

$$v_C = 0.1 \sin 100t - 20$$

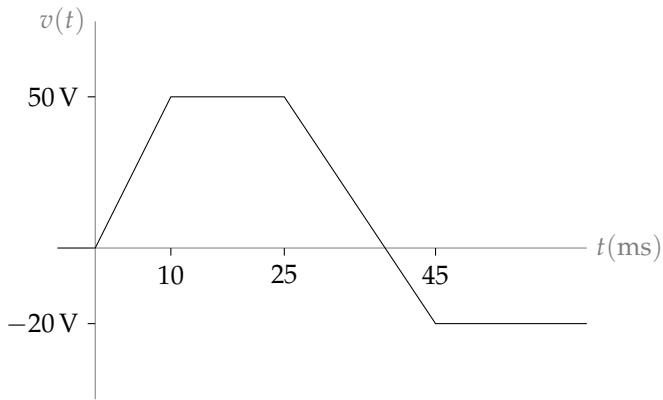
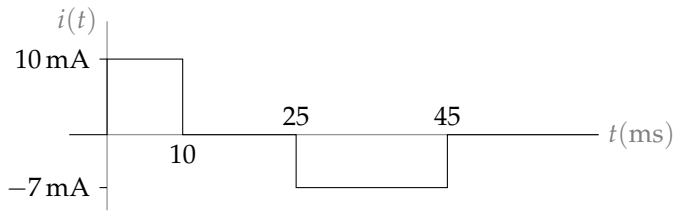
جبکہ اس میں رو کی مثبت سمت دائیں سے بائیں جانب ہو گی۔رو کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} i_C &= C \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} \\ &= (2\,\mu\text{F})\,(0.1 \times 100 \cos 100t) \\ &= 20 \cos 100t\,\mu\text{A} \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رو کی قیمت، وقت کے ساتھ بدلتے دباو پر منحصر ہے۔بیس وولٹ کا یک سمت دباو برق گیر میں رو نہیں پیدا کرتا۔

مثال 6.6: شکل 6.3 میں $2\,\mu\text{F}$ برق گیر پر دباو دکھایا گیا ہے۔برق گیر کی رو دریافت کریں۔

حل: دورانیہ $0\,\text{s}$ تا $10\,\text{ms}$ میں دباو مسلسل مستقل شرح

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50\,\text{V} - 0\,\text{V}}{10\,\text{ms} - 0\,\text{s}} = 5000\,\text{V}\,\text{s}^{-1}$$

شکل 6.3: مثال 6.6 کے خط۔

سے بڑھتا ہے لٰہذا اس دوران دباو بالمقابل وقت کی مساوات

$$v(t) = 5000t \qquad (0 \le t \le 10\,\mathrm{ms})$$

لکھی جا سکتی ہے۔وقت $10\,\mathrm{ms}$ تا $25\,\mathrm{ms}$ دباو بغیر تبدیل ہوئے مستقل $50\,\mathrm{V}$ پر برقرار رہتا ہے لٰہذا اس دوران دباو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$v(t) = 50 \qquad (10\,\mathrm{ms} \le t \le 25\,\mathrm{ms})$$

اس کے بعد $25\,\mathrm{ms}$ تا $45\,\mathrm{ms}$ کے دوران دباو مستقل شرح

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-20\,\mathrm{V} - 50\,\mathrm{V}}{45\,\mathrm{ms} - 25\,\mathrm{ms}} = -3500\,\mathrm{V\,s^{-1}}$$

سے گھٹتا ہے لٰہذا اس دوران دباو کی مساوات

$$v(t) = -3500t + 137.5 \qquad (25\,\mathrm{ms} \le t \le 45\,\mathrm{ms})$$

ہو گی۔اس کے بعد دباو برقرار $-20\,\mathrm{V}$ پر رہتا ہے لٰہذا اس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$v(t) = -20 \qquad (45\,\mathrm{ms} \le t)$$

مساوات 6.5 استعمال کرتے ہوئے ان دورانیوں میں رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
i &= 2 \times 10^{-6} \times 5000 = 10\,\mathrm{mA} && (0 \le t \le 10\,\mathrm{ms})\\
i &= 2 \times 10^{-6} \times 0 = 0\,\mathrm{mA} && (10\,\mathrm{ms} \le t \le 25\,\mathrm{ms})\\
i &= 2 \times 10^{-6} \times (-3500) = -7\,\mathrm{mA} && (25\,\mathrm{ms} \le t \le 45\,\mathrm{ms})\\
i &= 2 \times 10^{-6} \times 0 = 0\,\mathrm{mA} && (45\,\mathrm{ms} \le t)
\end{aligned}$$

رو بالمقابل وقت کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 6.7: گزشتہ مثال میں لمحہ $t = 10\,\mathrm{ms}$ ، $t = 20\,\mathrm{ms}$ اور $t = 50\,\mathrm{ms}$ پر برق گیر میں ذخیرہ مخفی توانائی دریافت کریں۔

حل: مساوات 6.9 کے تحت جوابات درج ذیل ہیں۔

$$w_C(10\,\mathrm{ms}) = \frac{2\times10^{-6}\times50^2}{2} = 2.5\,\mathrm{mJ}$$
$$w_C(20\,\mathrm{ms}) = \frac{2\times10^{-6}\times50^2}{2} = 2.5\,\mathrm{mJ}$$
$$w_C(50\,\mathrm{ms}) = \frac{2\times10^{-6}\times(-20)^2}{2} = 0.4\,\mathrm{mJ}$$

مشق 6.1: برق گیر پر ذخیرہ بار کی قیمت $5\,\mathrm{nC}$ ہے جبکہ اس پر دباو $100\,\mathrm{V}$ ہیں۔ برقی گنجائش دریافت کریں۔

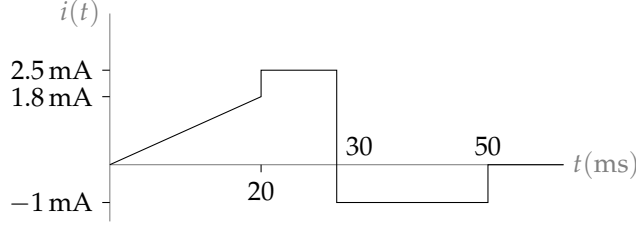
جواب: $50\,\mathrm{pF}$

مثال 6.8: ابتدائی طور پر بے بار $22\,\mathrm{\mu F}$ کے برق گیر کی رو کو شکل 6.4 میں دکھایا گیا ہے۔ برق گیر کے دباو، طاقت اور ذخیرہ توانائی کے مساوات حاصل کرتے ہوئے خط کھینچیں۔

حل: دورانیہ $t = 0\,\mathrm{s}$ تا $t = 20\,\mathrm{ms}$ میں شرح رو

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{18\,\mathrm{mA} - 0\,\mathrm{mA}}{20\,\mathrm{ms} - 0\,\mathrm{ms}} = 0.9\,\mathrm{A\,s^{-1}}$$

ہے جسے

$$\mathrm{d}i = 0.9\,\mathrm{d}t$$

شکل 6.4: (الف)

لکھ کر تکمل لیتے ہوئے رو کی مساوات

$$i = \int_0^t 0.9 \, \mathrm{d}t = 0.9t\big|_0^t = 0.9t$$

حاصل ہوتی ہے۔ برق گیر پر ذخیرہ بار دریافت کرنے کی خاطر رو کی مساوات کو

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0.9t$$

لکھتے ہوئے تکمل لیتے ہیں۔

$$q = \int_0^t 0.9t \, \mathrm{d}t = 0.45t^2\Big|_0^t = 0.45t^2$$

مساوات 6.2 سے

$$v(t) = \frac{q}{C} = \frac{0.45t^2}{22 \times 10^{-6}} = 20455t^2$$

لکھا جائے گا اور یوں طاقت کی مساوات

$$p = vi = 20455t^2 \times 0.9t = 18410t^3$$

اور ذخیرہ توانائی کی مساوات

$$w_C = \int_0^t p \, \mathrm{d}t = 4603t^4$$

ہو گی۔ ان مساوات سے لمحہ $t = 20\,\mathrm{ms}$ پر

$$\begin{aligned} q(0.02) &= 0.45t^2 = 0.45 \times 0.02^2 = 180\,\mu\mathrm{C} \\ v(0.02) &= 20455t^2 = 20455 \times 0.02^2 = 8.182\,\mathrm{V} \\ w_C(0.02) &= 4603t^4 = 4603 \times 0.02^4 = 737\,\mu\mathrm{J} \end{aligned} \tag{6.12}$$

ہوں گے۔

اسی طرح $20\,\text{ms}$ تا $30\,\text{ms}$ دورانیے کے لئے مساوات 6.12 میں حاصل کی گئی مقداریں ابتدائی مقداریں تصور کی جائیں گی۔اس دورانیے میں

$$i = 2.5\,\text{mA}$$

ہے لہٰذا مساوات 6.7 کے تحت

$$\begin{aligned} v &= v(0.02) + \frac{1}{C}\int_{0.02}^{t} i\,\text{d}t \\ &= 8.182 + \frac{1}{22\times10^{-6}}\int_{0.02}^{t} 2.5\times10^{-3}\,\text{d}t \\ &= 33.182 + 113.636t \end{aligned}$$

اور

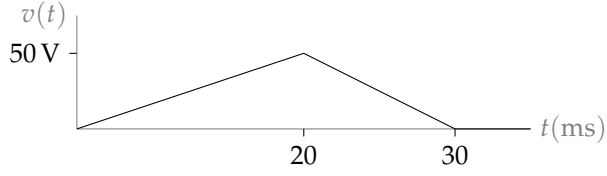
$$\begin{aligned} p &= iv = 0.0025(33.182 + 113.636t) = 0.083 + 0.284t \\ w_C &= \frac{Cv^2}{2} = \frac{22\times10^{-6}}{2}(33.182 + 113.636t)^2 \end{aligned}$$

ہوں گے جن سے اس دورانیے کے آخری لمحے پر

$$\begin{aligned} v(0.03) &= 33.182 + 113.636\times0.03 = 36.591\,\text{V} \\ w_C(0.03) &= \frac{Cv^2}{2} = \frac{22\times10^{-6}\times36.591^2}{2} = 14.73\,\text{mJ} \end{aligned} \tag{6.13}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

شکل 6.4 میں $t = 30\,\text{ms}$ تا $t = 50\,\text{ms}$ کے متغیرات حاصل کرتے ہوئے مساوات 6.13 کی قیمتیں ابتدائی قیمتیں تصور کی جائیں گی۔پہلے دباو کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v &= v(0.03) + \frac{1}{C}\int_{0.03}^{t} -10^{-3}\,\text{d}t \\ &= 36.591 - \frac{10^{-3}}{22\times10^{-6}}t\bigg|_{0.03}^{t} \\ &= 37.955 - 45.455t \end{aligned}$$

شکل 6.5: دباو کا خط۔

طاقت کی مساوات درج ذیل ہے

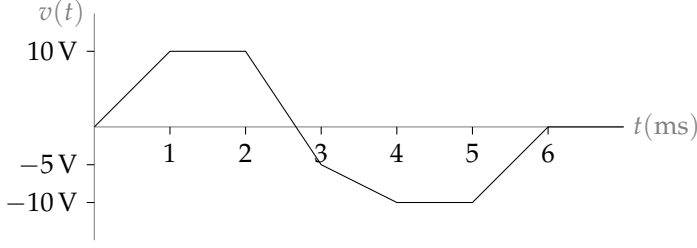
$$\begin{aligned}p &= iv\\ &= -0.001(37.955-45.455t)\\ &= -0.038+0.0455t\end{aligned}$$

جبکہ ذخیرہ توانائی

$$\begin{aligned}w_C &= \frac{Cv^2}{2}\\ &= \frac{22\times10^{-6}(37.955-45.455t)^2}{2}\end{aligned}$$

ہے۔ لمحہ 50 ms کے بعد رو صفر کے برابر ہے لہٰذا نہ تو برق گیر کا دباو تبدیل ہو گا اور نہ ہی اس میں ذخیرہ توانائی کی قیمت تبدیل ہو گی۔

مشق 6.2: شکل 6.5 میں 68 µF کے برق گیر کا دباو دیا گیا ہے۔ رو کی شکل کھینچیں۔

جواب: پہلی 20 ms کے لئے 0.17 A اور اگلے 10 ms کے لئے −0.34 A جبکہ بقایا وقت رو صفر ہے۔

شکل 6.6: دباو کا خط۔

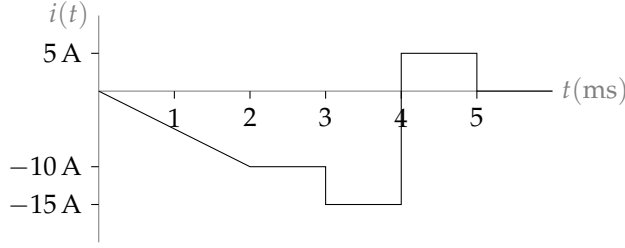
مشق 6.3: گزشتہ مثال میں لمحہ $t = 20\,\mathrm{ms}$ پر برق گیر میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

جواب: $85\,\mathrm{mJ}$

مشق 6.4: شکل 6.6 میں $2.2\,\mathrm{\mu F}$ کے برق گیر کا دباو دیا گیا ہے۔رو کی شکل کھینچیں۔لمحہ $t = 4\,\mathrm{ms}$ پر ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔لمحہ $t = 1.5\,\mathrm{ms}$ اور $5.5\,\mathrm{ms}$ پر رو دریافت کریں۔

جواب: $110\,\mathrm{\mu J}$ ، $0\,\mathrm{A}$ ، $-22\,\mathrm{mA}$

مشق 6.5: شکل 6.7 میں $100\,\mathrm{\mu F}$ کے برق گیر کی رو دی گئی ہے۔دباو کا خط کھینچیں۔لمحہ $t = 3\,\mathrm{ms}$ پر ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

جواب: $2\,\mathrm{J}$

شکل 6.7: رو کا خط۔

6.2 امالہ گیر

امالہ گیر[12] عموماً موصل تار کے لچھے[13] کی صورت کا ہوتا ہے۔ایسا لچھا کسی مقناطیسی قالب[14] یا غیر مقناطیسی قالب[15] پر لپیٹا ہو سکتا ہے۔ مقناطیسی قالب کے لچھے ٹرانسفارمر[16] اور فلٹر[17] میں استعمال کئے جاتے ہیں جبکہ غیر مقناطیسی قالب کے لچھے مواصلاتی نظام میں اہم کردار ادا کرتے ہیں۔

تاریخی طور پر پہلے یہ معلوم ہوا کہ رو گزارتی تار کے گرد مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے۔ایسی مقناطیسی میدان اور میدان پیدا کرنے والی رو کے مابین راست تناسبی تعلق پایا جاتا ہے۔اس کے بعد معلوم ہوا کہ بدلتا مقناطیسی میدان برقی دباو پیدا کرتا ہے جہاں دباو اور مقناطیسی میدان پیدا کرنے والی رو کی شرح کے مابین راست تناسبی تعلق پایا جاتا ہے۔اسی تعلق کو درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{6.14}$$

جہاں تناسبی مستقل کو L لکھا اور امالہ[18] پکارا جاتا ہے۔امالہ کی اکائی[19] کو ہینری[20] پکارا اور H سے ظاہر کیا جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک وولٹ سیکنڈ فی ایمپیئر $\mathrm{V\,s\,A^{-1}}$ کو ہینری کہا گیا ہے۔

---

[12] inductor
[13] coil
[14] magnetic core
[15] non-magnetic core
[16] transformer
[17] filter
[18] inductance
[19] امالہ کی اکائی امریکی تخلیق کار یوسف ہینری کے نام سے منسوب ہے۔
[20] Henry

اس مساوات کی تکمل صورت سے رو حاصل ہوتی ہے

$$i=\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{L}v\,\mathrm{d}t \tag{6.15}$$

جہاں ازل $-\infty$ سے لمحہ t تک تکمل لیا گیا ہے۔ مستقل قیمت کی امالہ کی صورت میں L کو تکمل کے باہر نکالا جا سکتا ہے۔

$$i=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}v\,\mathrm{d}t \tag{6.16}$$

اس تکمل کو دو ٹکڑوں میں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}i&=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0}v\,\mathrm{d}t+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v\,\mathrm{d}t\\&=i(t_0)+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6.17}$$

جہاں پہلا ٹکڑا ازل سے t_0 تک اور دوسرا ٹکڑا t_0 سے t حاصل کیا گیا ہے۔ مندرجہ بالا مساوات میں لمحہ t_0 پر امالہ گیر کی رو کو $i(t_0)$ کہا گیا ہے۔

امالہ کو فراہم طاقت سے امالہ کو منتقل توانائی w_L دریافت کی جا سکتی ہے۔

$$p=vi \tag{6.18}$$

سے

$$p=\frac{\mathrm{d}w_L}{\mathrm{d}t}=\left[L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right]i \tag{6.19}$$

لکھتے ہوئے اور تکمل لینے سے

$$\begin{aligned}w_L&=\int_{-\infty}^{t}\left[L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right]i\,\mathrm{d}t\\&=L\int_{0}^{i}i\,\mathrm{d}i\end{aligned}$$

$$w_L=\frac{Li^2}{2} \tag{6.20}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں وقت کی ابتدا $t = -\infty$ پر $i = 0$ تصور کی گئی ہے۔

تصور کریں کہ ایک دور میں یک سمت رو پائی جاتی ہو۔اب یک سمت رو وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا مساوات 6.14 کے تحت اس دور میں موجود امالہ پر دباو صفر کے برابر ہو گا۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ یک سمت رو کی نقطہ نظر سے امالہ بطور قصر دور کردار ادا کرتی ہے۔یوں کسی بھی دور کا یک سمت تجزیہ کرتے ہوئے دور میں موجود تمام امالہ کو قصر دور تصور کیا جاتا ہے۔

امالہ میں فوراً رو تبدیل کرنے کے لئے مساوات 6.19 کے تحت لامحدود طاقت درکار ہو گی۔کائنات میں لامحدود طاقت کا منبع کہیں نہیں پایا جاتا لہٰذا امالہ کی رو کو فوراً تبدیل کرنا ناممکن ہے۔اس حقیقت کی مساواتی صورت درج ذیل ہے۔

$$i_L(t_+) = i_L(t_-) \tag{6.21}$$

مساوات 6.21 کے تحت امالہ گیر کی رو کسی بھی لمحے t کے فوراً بعد t_+ اور اس لمحے کے فوراً پہلے t_- برابر ہوں گے۔یوں امالہ گیر کی رو بلا جوڑ تفاعل[21] ہے جس میں سیڑھی نما یکدم تبدیلی ممکن نہیں ہے۔یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت دور میں سوئچ کو چالو سے غیر چالو (یا غیر چالو سے چالو) کرنے کے فوراً بعد امالہ میں رو کی قیمت وہی ہو گی جو سوئچ چالو (یا غیر چالو) کرنے سے پہلے تھی۔

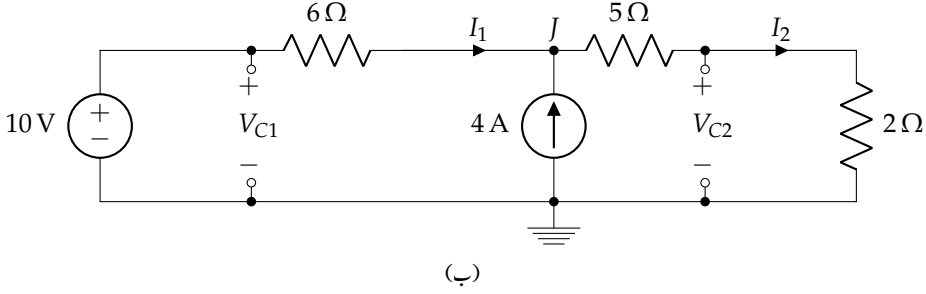
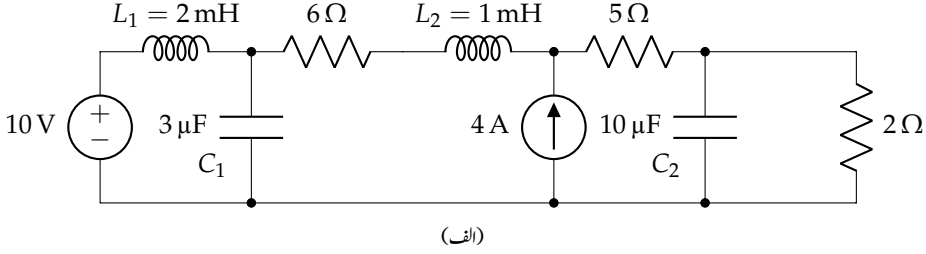
مثال 6.9: شکل 6.8 میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

حل:اس دور میں صرف یک سمت منبع پائے جاتے ہیں۔ہم اس حقیقت پر بحث کر چکے ہیں کہ یک سمت ادوار میں امالہ کو قصر دور اور برق گیر کو کھلا دور تصور کیا جاتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے جسے آپ اپنی پسندیدہ ترکیب سے حل کر سکتے ہیں۔نچلی جوڑ کو زمین لیتے ہوئے جوڑ J پر کرخوف مساوات رو

$$I_1 + 4 = I_2$$

جبکہ بیرونی دائرے پر کرخوف مساوات دباو

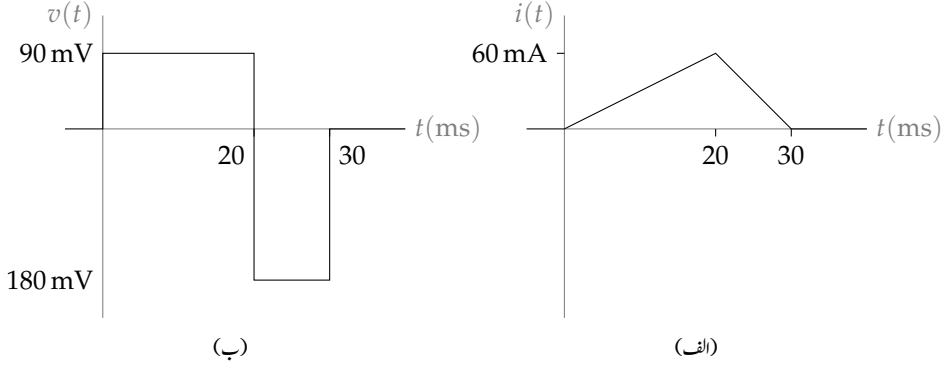
$$10 = 6I_1 + (5+2)I_2$$

[21] continuous function

شکل 6.8: مثال 6.9 کا دور۔

لکھتے ہیں۔انہیں حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$I_1 = -\frac{18}{13}\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = \frac{34}{13}\,\mathrm{A}$$

برق گیر C_1 پر دباو شکل کو دیکھ کر لکھی جا سکتی ہے جبکہ C_2 پر دباو کو اوہم کے قانون کی مدد سے لکھا جا سکتا ہے۔

$$V_{C1} = 10\,\mathrm{V}$$
$$V_{C2} = 2 \times \frac{34}{13} = \frac{68}{13}\,\mathrm{V}$$

شکل 6.9: مثال 6.10 کا دور۔

ان حقائق کو استعمال کرتے ہوئے برق گیر اور امالہ میں ذخیرہ توانائی دریافت کر سکتے ہیں۔

$$w_{C1} = \frac{3\times10^{-6}\times10^{2}}{2} = 0.15\,\text{mJ}$$

$$w_{C2} = \frac{10\times10^{-6}\left(\frac{68}{13}\right)^{2}}{2} = 0.14\,\text{mJ}$$

$$w_{L1} = \frac{0.002\times\left(\frac{18}{13}\right)^{2}}{2} = 1.92\,\text{mJ}$$

$$w_{L2} = \frac{0.001\times\left(\frac{18}{13}\right)^{2}}{2} = 0.96\,\text{mJ}$$

مثال 6.10: امالہ کی رو کے خط کو شکل 6.9-الف میں دکھایا گیا ہے۔اس کے دباو کا خط کھینچیں۔امالہ کی قیمت $30\,\text{mH}$ ہے۔

حل: امالہ گیر کی رو سے امالہ گیر کا دباو مساوات 6.14 کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔وقت $t=-\infty$ تا $t=0$ رو صفر کے برابر ہے لہٰذا

$$v = 30\times10^{-3}\left(\frac{0}{-\infty-0}\right) = 0\,\text{V}$$

ہو گا۔اگلا دورانیہ $t = 0$ تا $t = 20\,\mathrm{ms}$ ہے جس میں رو کی قیمت یکساں شرح سے مسلسل بڑھتے ہوئے $i = 0$ سے $i = 60\,\mathrm{mA}$ ہو جاتی ہے لہٰذا اس دوران

$$v = 30 \times 10^{-3} \left(\frac{0.06 - 0}{0.02 - 0} \right) = 90\,\mathrm{mV}$$

ہو گا۔دورانیہ $20\,\mathrm{ms}$ تا $30\,\mathrm{ms}$ میں دباو درج ذیل ہو گا۔

$$v = 30 \times 10^{-3} \left(\frac{0 - 0.06}{0.03 - 0.02} \right) = -180\,\mathrm{mV}$$

$30\,\mathrm{ms}$ کے بعد رو صفر رہتی ہے لہٰذا

$$v = 30 \times 10^{-3} \left(\frac{0}{\infty - 0.03} \right) = 0\,\mathrm{V}$$

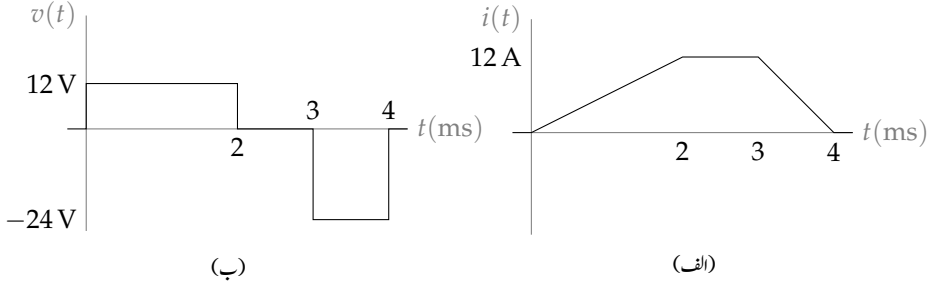
ہو گا۔ان نتائج کو شکل 6.9-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 6.11: امالہ گیر کی رو $i(t) = 5\cos 377t$ جبکہ اس کی امالہ $100\,\mathrm{mH}$ ہے۔امالہ گیر کا دباو اور اس میں ذخیرہ توانائی کی مساوات حاصل کریں۔

حل: مساوات 6.14 سے دباو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} v &= L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ &= 0.1 \times (-5 \times 377 \sin 377t) \\ &= -188.5 \sin 377t \quad \mathrm{V} \end{aligned}$$

ذخیرہ توانائی کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

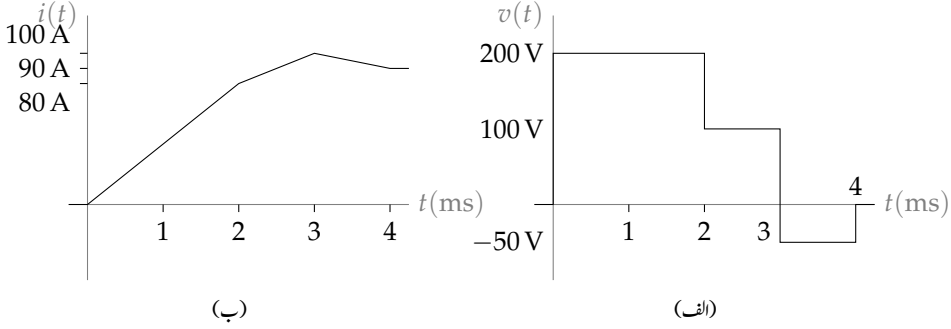
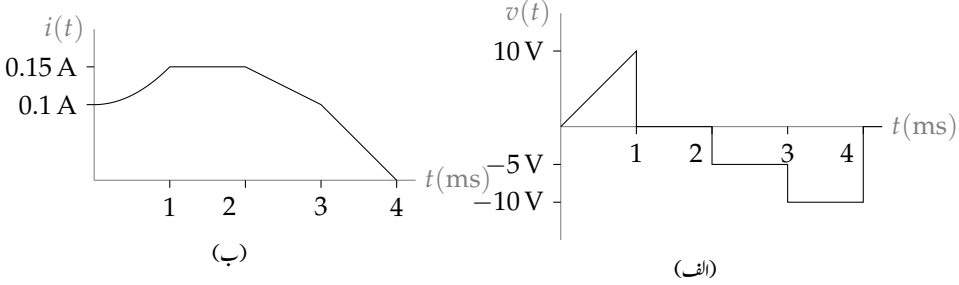
$$\begin{aligned} w_L(t) &= \frac{Li^2}{2} \\ &= \frac{0.1 \times (5\cos 377t)^2}{2} \\ &= 1.25\cos^2 377t\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

شکل 6.10: مشق 6.6 کا دور۔

مشق 6.6: رو کا خط شکل 6.10 میں دکھایا گیا ہے۔ دباو کا خط کھینچیں۔ امالہ کی قیمت $2\,\mathrm{H}$ ہے۔

جواب: شکل 6.10-ب میں دباو کا خط دکھایا گیا ہے۔

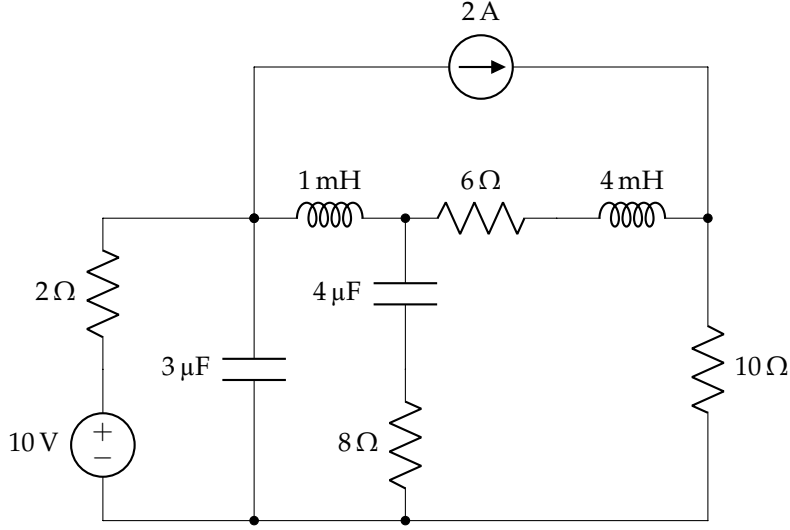
مشق 6.7: گزشتہ مشق میں لمحہ $t = 3.5\,\mathrm{ms}$ پر امالہ گیر میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

جواب: $36\,\mathrm{J}$

مشق 6.8: پانچ ہینری امالہ گیر کا دباو شکل 6.11-الف میں دکھایا گیا ہے۔ رو کا خط کھینچیں۔

شکل 6.11: مشق 6.8 کا دور۔

شکل 6.12: مشق 6.9 کا دور۔

جواب: رو کا خط شکل 6.11-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مشق 6.9: امالہ گیر کے دباو کا خط شکل 6.12 میں دکھایا گیا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر $i(0) = 0.1\,\mathrm{A}$ کی صورت میں رو کا خط حاصل کریں۔ امالہ $0.1\,\mathrm{H}$ کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 3\,\mathrm{ms}$ پر امالہ گیر میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

جواب: رو کا خط شکل 6.12 میں دکھایا گیا ہے۔ لمحہ $t = 3\,\mathrm{ms}$ پر $w_L(3\,\mathrm{ms}) = 0.5\,\mathrm{mJ}$ ہے۔

شکل 6.13: مشق 6.10 کا دور۔

مشق 6.10: شکل 6.13 میں 1 mH، 4 mH، 3 µF اور 4 µF میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

جوابات: 302 µJ، 0.907 µJ، 85.6 µJ، 114 µJ

6.3 برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات

برقی گنجائش، برقی گنجائش کی قیمت میں خلل اور دباو، برق گیر کے اہم خصوصیات ہیں۔ معیاری برق گیر چند pF سے تقریباً 50 mF تک کی قیمتوں میں عام دستیاب ہے۔ان سے کم اور زیادہ قیمتیں بھی دستیاب ہیں۔ یہ برق گیر عموماً 6.3 V تا 500 V تک کے مختلف دباو کے لئے دستیاب ہیں۔زیادہ دباو کے برق گیر بھی دستیاب ہیں۔ برق

جدول 6.1: معیاری برق گیر کے گنجائش کی قیمتیں۔

μF	μF	μF	μF	μF	μF	μF	pF	pF	pF	pF
10 000	1000	100	10	1.0	0.10	0.010	1000	100	10	1
12 000	1200	120	12	1.2	0.12	0.012	1200	120	12	
15 000	1500	150	15	1.5	0.15	0.015	1500	150	15	1.5
18 000	1800	180	18	1.8	0.18	0.018	1800	180	18	
20 000	2000	200	20	2.0	0.20	0.020	2000	200	20	2
22 000	2200	220	22	2.2	0.22	0.022	2200	220	22	
27 000	2700	270	27	2.7	0.27	0.027	2700	270	27	
33 000	3300	330	33	3.3	0.33	0.330	3300	330	33	3
39 000	3900	390	39	3.9	0.39	0.390	3900	390	39	4
47 000	4700	470	47	3.3	0.47	0.470	4700	470	47	5
51 000	5100	510	51	3.3	0.51	0.510	5100	510	51	6
56 000	5600	560	56	3.3	0.56	0.560	5600	560	56	7
68 000	6800	680	68	3.3	0.68	0.680	6800	680	68	8
82 000	8200	820	82	3.3	0.82	0.820	8200	820	82	9

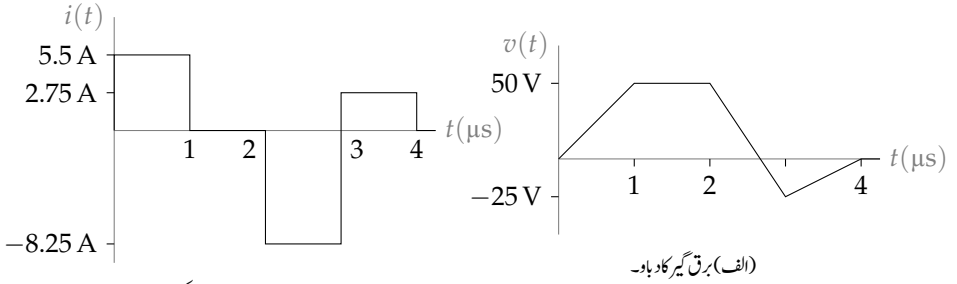
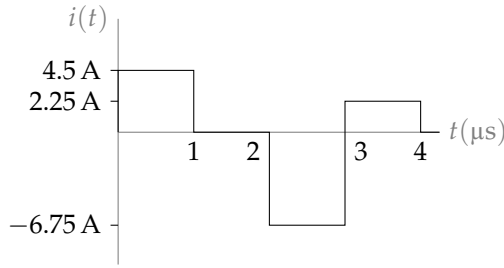
گیر کو اس کی معین دباو سے زیادہ دباو پر ہر گز استعمال نہ کریں چونکہ ایسا کرنے سے برق گیر تباہ ہو سکتا ہے۔ برقی گنجائش میں خلل کی عمومی قیمتیں $\mp 5\,\%$ ، $\mp 10\,\%$ اور $\mp 20\,\%$ ہیں۔ جدول 6.1 میں معیاری دستیاب برقی گیر کی گنجائش دی گئی ہے۔

امالہ گیر کو موصل تار سے بنایا جاتا ہے لٰہذا نہ چاہتے ہوئے بھی اس کی مزاحمت ہو گی۔ امالہ گیر کے اہم خصوصیات اس کی امالہ اور مزاحمت ہیں۔ امالہ گیر 1 nH تا 100 mH کی قیمتوں میں عام دستیاب ہے۔ اس سے کم یا زیادہ قیمتیں بھی دستیاب ہیں۔ امالہ کی قیمتیں $\mp 5\,\%$ اور $\mp 10\,\%$ کے خلل میں دستیاب ہیں۔ جدول 6.2 میں امالہ کی عمومی دستیاب قیمتیں دی گئی ہیں۔

مثال 6.12: شکل 6.14-الف میں 100 nF برق گیر کا دباو دکھایا گیا ہے۔ برقی گنجائش میں خلل $\mp 10\,\%$ ممکن ہے۔ کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ گنجائش کی صورت میں رو کے خط حاصل کریں۔ اس برقی گنجائش کو عموماً $100\,\text{nF} \mp 10\,\%$ لکھا جاتا ہے۔

جدول 6.2: امالہ کی عمومی دستیاب قیمتیں۔

mH	mH	mH	μH	μH	μH	nH	nH	nH
100	10	1.0	100	10	1.0	100	10	1
	12	1.2	120	12	1.2	120	12	1.2
	15	1.5	150	15	1.5	150	15	1.5
	18	1.8	180	18	1.8	180	18	1.8
	20	2.0	200	20	2.0	200	20	2
	22	2.2	220	22	2.2	220	22	2.2
	27	2.7	270	27	2.7	270	27	2.7
	33	3.3	330	33	3.3	330	33	3
	39	3.9	390	39	3.9	390	39	4
	47	4.7	470	47	4.7	470	47	5
	51	5.1	510	51	5.1	510	51	6
	56	5.6	560	56	5.6	560	56	7
	68	6.8	680	68	6.8	680	68	8
	82	8.2	820	82	8.2	820	82	9

(الف) برق گیر کا دباو۔

(ب) 110 nF کی رو۔

(پ) 90 nF کی رو۔

شکل 6.14: مثال 6.12 کا دور۔

حل: برق گیر کی زیادہ سے زیادہ قیمت دی گئی قیمت سے $10\,\%$ زیادہ ہو سکتی ہے۔یوں اس کی زیادہ سے زیادہ گنجائش $110\,\mathrm{nF}$ ممکن ہے۔اس قیمت کے گنجائش کی رو کو شکل 6.14-ب میں دکھایا گیا ہے جہاں پہلے ایک مائیکرو سیکنڈ میں دباو کی تبدیلی کی شرح

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{50-0}{1\,\mathrm{\mu s}-0\,\mathrm{\mu s}}=50\,\mathrm{MV\,s^{-1}}$$

ہونے کی بنا اس دورانیے کی رو

$$i=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=110\times10^{-9}\times50\times10^{6}=5.5\,\mathrm{A}$$

ہے۔اگلے ایک مائیکرو سیکنڈ میں دباو تبدیل نہیں ہوتا لہٰذا $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=0$ ہے اور یوں رو بھی صفر کے برابر ہے۔دورانیہ $t=2\,\mathrm{\mu s}$ تا $t=3\,\mathrm{\mu s}$ دباو کی شرح تبدیلی

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{-25-50}{3\,\mathrm{\mu s}-2\,\mathrm{\mu s}-0\,\mathrm{\mu s}}=-75\,\mathrm{MV\,s^{-1}}$$

ہے لہٰذا رو

$$i=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=110\times10^{-9}\times\left(-75\times10^{6}\right)=-8.25\,\mathrm{A}$$

ہو گی۔دورانیہ $t=3\,\mathrm{\mu s}$ تا $t=4\,\mathrm{\mu s}$ دباو کی شرح تبدیلی

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{0-(-25)}{4\,\mathrm{\mu s}-3\,\mathrm{\mu s}-0\,\mathrm{\mu s}}=25\,\mathrm{MV\,s^{-1}}$$

ہے لہٰذا رو

$$i=C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=110\times10^{-9}\times25\times10^{6}=2.75\,\mathrm{A}$$

ہو گی۔

خلل کی قیمت سے برق گیر کی کم سے کم ممکنہ گنجائش $90\,\mathrm{nF}$ حاصل ہوتی ہے۔دباو کی تبدیلی کی شرح استعمال کرتے ہوئے رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$i=\begin{cases}90\times10^{-9}\times50\times10^{6}=4.5\,\mathrm{A} & 0\,\mathrm{\mu s}\le t\le1\,\mathrm{\mu s}\\ 90\times10^{-9}\times0=0\,\mathrm{A} & 1\,\mathrm{\mu s}\le t\le2\,\mathrm{\mu s}\\ 90\times10^{-9}\times(-75)\times10^{6}=-6.75\,\mathrm{A} & 2\,\mathrm{\mu s}\le t\le3\,\mathrm{\mu s}\\ 90\times10^{-9}\times25\times10^{6}=2.25\,\mathrm{A} & 3\,\mathrm{\mu s}\le t\le4\,\mathrm{\mu s}\end{cases}$$

6.4 سلسلہ وار جڑے برق گیر

شکل 6.15 میں متعدد برق گیر سلسلہ وار جڑے دکھائے گئے ہیں۔تمام سلسلہ وار جڑے پرزوں میں رو کی قیمت یکساں ہوتی ہے۔کرخوف قانون دباو سے اس دور کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \cdots + v_N(t)$$

انفرادی برق گیر کے لئے

$$\begin{aligned}
v_1(t) &= v_1(t_0) + \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t\\
v_2(t) &= v_2(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t\\
v_3(t) &= v_3(t_0) + \frac{1}{C_3}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t\\
&\vdots\\
v_N(t) &= v_N(t_0) + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مندرجہ بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے

$$\begin{aligned}
v(t) = v_1(t_0) + \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t + v_2(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t + \cdots\\
+ v_N(t_0) + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

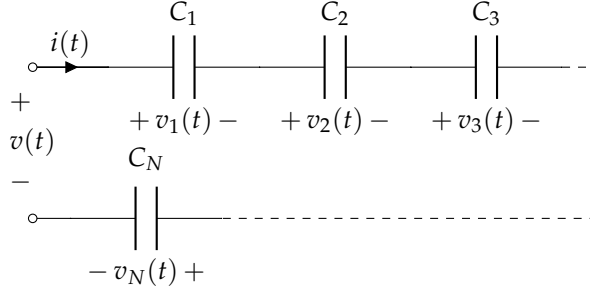
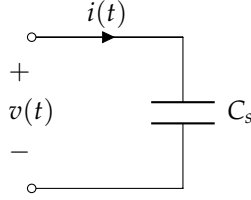
یعنی

$$v(t) \;=\; v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0) + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات میں

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N} \tag{6.22}$$

اور

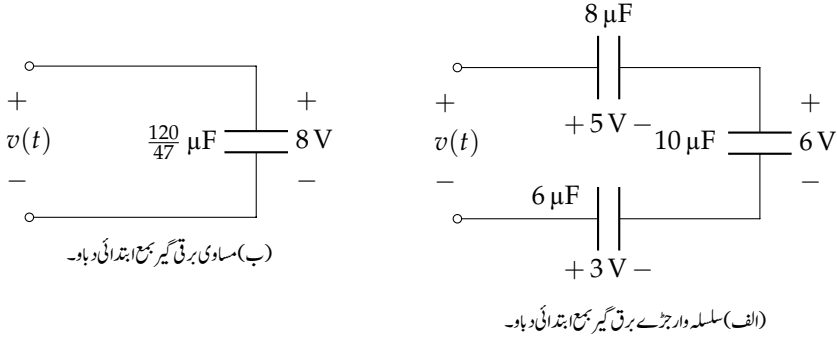
$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) + \cdots + v_N(t_0) \tag{6.23}$$

(الف) متعدد سلسلہ وار جڑے برق گیر۔

(ب) متعدد سلسلہ وار جڑے برق گیروں کا مساوی برق گیر۔

شکل 6.15: متعدد سلسلہ وار جڑے برق گیر کی مساوی برق گنجائش کا حصول۔

لکھتے ہوئے

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C_s}\int_{t_0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t \tag{6.24}$$

حاصل ہوتا ہے جو ایک عدد برقی گیر کی مساوات ہے جسے شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 6.22 متعدد سلسلہ وار جڑے برق گیروں کی مساوی برق گنجائش C_s دیتی ہے جبکہ مساوات 6.23 ان کا مساوی ابتدائی دباو دیتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سلسلہ وار جڑے برق گیروں کی مساوات متوازی جڑے مزاحمتوں کی مساوات کی طرح ہے۔

مثال 6.13: شکل 6.16-الف میں مساوی سلسلہ وار گنجائش اور ان کے انفرادی ابتدائی دباو دکھائے گئے ہیں۔ان کا مساوی گنجائش اور مساوی ابتدائی دباو حاصل کریں۔

شکل 6.16: مثال 6.13 کا دور۔

حل: مساوات 6.22 سے

$$\frac{1}{C_s}=\frac{1}{8\,\mu\text{F}}+\frac{1}{10\,\mu\text{F}}+\frac{1}{6\,\mu\text{F}}=\frac{47}{120}\,\mu\text{F}$$

لکھتے ہوئے

$$C_s=\frac{120}{47}\,\mu\text{F}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 6.23 سے ابتدائی دباو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$v(t_0)=5+6-3=8\,\text{V}$$

شکل 6.16-ب میں مساوی برق گنجائش اور ابتدائی دباو دکھائے گئے ہیں۔

مثال 6.14: ابتدائی طور پر بے بار، دو عدد برق گیر کو سلسلہ وار جوڑنے کے بعد ان میں 50 V منبع سے برقی بار بھرا جاتا ہے۔ ان میں ایک برق گیر 20 µF گنجائش کا ہے جبکہ دوسرے برق گیر کی گنجائش کے بارے میں ہمیں معلوم نہیں ہے۔ نا معلوم برق گیر پر 10 V جبکہ 20 µF برق گیر پر 40 V دباو پایا جاتا ہے۔ نا معلوم گنجائش دریافت کریں۔

حل: $20\,\mu\text{F}$ پر بار درج ذیل ہے۔

$$q = Cv = (20\,\mu\text{F})\,(40\,\text{V}) = 800\,\mu\text{C}$$

سلسلہ وار جڑے پرزوں میں یکساں رو پائی جاتی ہے لہٰذا دونوں برق گیر پر یکساں بار پایا جاتا ہے۔یوں نا معلوم گنجائش درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$C = \frac{q}{v} = \frac{800\,\mu\text{F}}{10\,\text{V}} = 80\,\mu\text{F}$$

6.5 متوازی جڑے برق گیر

متوازی جڑے برق گیروں کی مساوی گنجائش شکل 6.17-الف سے کرخوف قانون رو کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

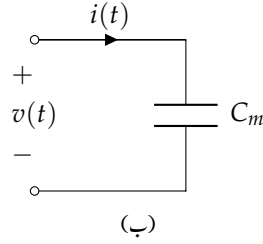
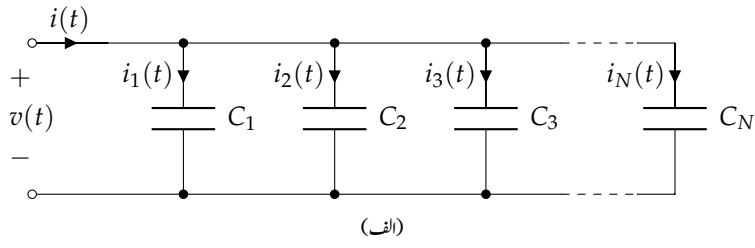
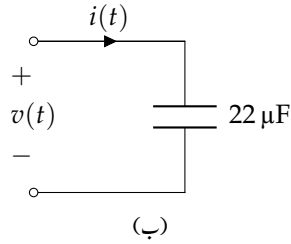
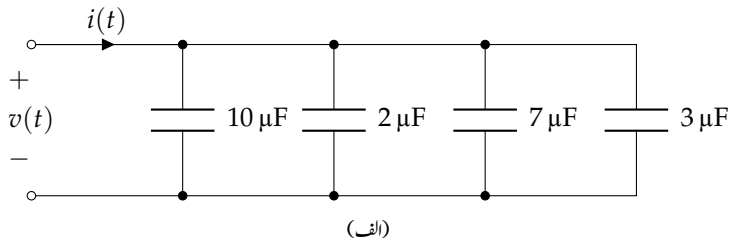
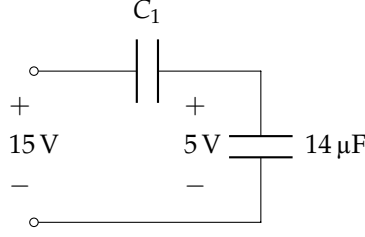
$$\begin{aligned} i(t) &= i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) + \cdots + i_N(t) \\ &= C_1\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + C_3\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \cdots + C_N\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= (C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N)\,\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

اس مساوات میں

$$C_m = \sum_{i=1}^{N} C_i = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N \tag{6.25}$$

لکھتے ہوئے

$$i(t) = C_m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{6.26}$$

حاصل ہوتا ہے جو ایک عدد برق گیر کی مساوات ہے۔مساوات 6.25 متعدد متوازی جڑے برق گیروں کی مساوی گنجائش دیتی ہے جو سلسلہ وار جڑے مزاحمتوں کی مساوت کی طرح ہے۔شکل 6.17-ب میں مساوی برق گیر دکھایا گیا ہے۔

شکل 6.17: متوازی جڑے برق گیروں کی مساوی گنجائش۔

شکل 6.18: مثال 6.15 کا دور۔

شکل 6.19: مشق 6.11 کا دور۔

مثال 6.15: شکل 6.18-الف میں چار عدد برق گیر متوازی جوڑے گئے ہیں۔ان کی مساوی گنجائش دریافت کریں۔

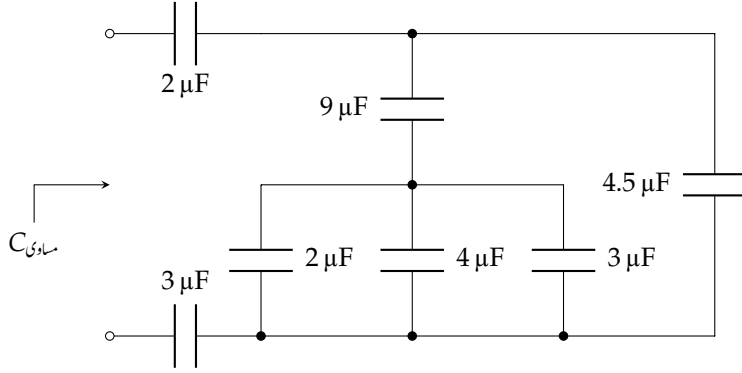
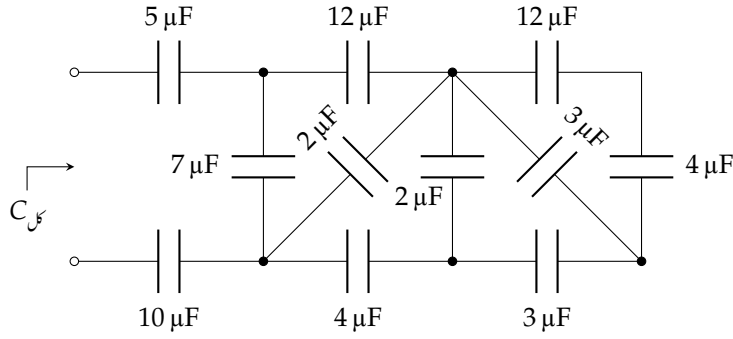
حل: مساوات 6.25 سے متوازی جڑے برق گیروں کی مساوی برقی گنجائش حاصل کرتے ہیں۔

$$C_m = 10\,\mu\text{F} + 2\,\mu\text{F} + 7\,\mu\text{F} + 3\,\mu\text{F} = 22\,\mu\text{F}$$

شکل 6.18-ب میں مساوی گنجائش دکھائی گئی ہے۔

مشق 6.11: ابتدائی طور پر بے بار، دو عدد برق گیر سلسلہ وار جوڑے جاتے ہیں۔لمحہ t پر صورت حال شکل 6.19 میں دکھائی گئی ہے۔نا معلوم گنجائش دریافت کریں۔

جواب: $7\,\mu\text{F}$

مشق 6.12: شکل 6.20 میں مساوی گنجائش دریافت کریں۔

شکل 6.20: مشق 6.12 کا دور۔

شکل 6.21: مشق 6.13 کا دور۔

جواب: $\frac{18}{17}\,\mu\text{F}$

مشق 6.13: شکل 6.21 میں کل گنجائش حاصل کریں۔

جواب: $\frac{5}{2}\,\mu\text{F}$

6.6 سلسلہ وار امالہ گیر

متعدد سلسلہ وار جڑے امالہ گیر کو شکل 6.22-الف میں دکھایا گیا ہے۔ کرخوف قانون دباو سے

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \cdots + v_N(t) \\ &= L_1 \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + L_3 \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \cdots + L_N \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= (L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N) \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

لکھ کر اس میں

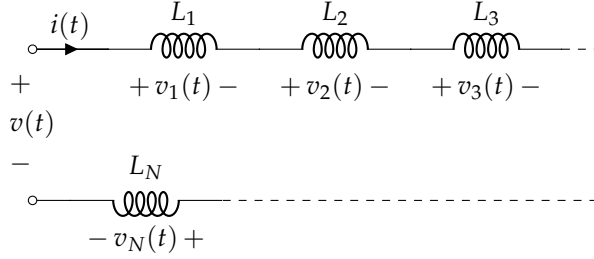
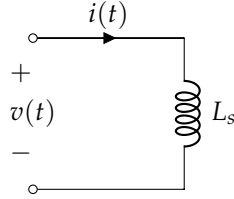
$$L_s = \sum_{i=1}^{N} L_i = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N \tag{6.27}$$

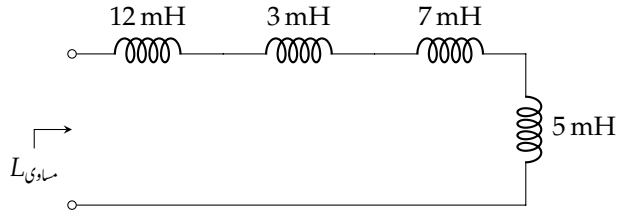
پُر کرنے سے

$$v(t) = L_s \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

حاصل ہوتا ہے جو ایک عدد امالہ گیر کی مساوات ہے جسے شکل 6.22-ب میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات 6.27 سلسلہ وار امالہ کی مساوی امالہ دیتی ہے۔ یہ سلسلہ وار مزاحمتوں کی مساوات کی طرح مساوات ہے۔

مثال 6.16: شکل 6.23 میں مساوی امالہ دریافت کریں۔

جواب: 27 mH

(الف) متعدد سلسلہ وار جڑے امالہ گیر۔

(ب) متعدد سلسلہ وار جڑے امالہ گیروں کی مساوی امالہ۔

شکل 6.22: متعدد سلسلہ وار جڑے امالہ گیر کی مساوی امالہ کا حصول۔

شکل 6.23: مثال 6.16 کا دور۔

6.7 متوازی امالہ گیر

متوازی جڑے امالہ گیروں کی مساوی امالہ شکل 6.24-الف کی مدد سے حاصل کرتے ہیں جسے دیکھتے ہوئے کرخوف مساوات رو

$$i(t) = i_1(t) + i - 2(t) + i_3(t) + \cdots + i_N(t) \tag{6.28}$$

لکھی جا سکتی ہے۔انفرادی امالہ گیر کے لئے درج ذیل مساوات لکھے جا سکتے ہیں

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= i_1(t_0) + \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t \\
i_2(t) &= i_2(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t \\
i_3(t) &= i_3(t_0) + \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t \\
&\vdots \\
i_N(t) &= i_N(t_0) + \frac{1}{L_N}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

جنہیں مساوات 6.28 میں پُر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
i(t) = i_1(t_0) + \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t + i_2(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t + \cdots \\
+ i_N(t_0) + \frac{1}{L_N}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

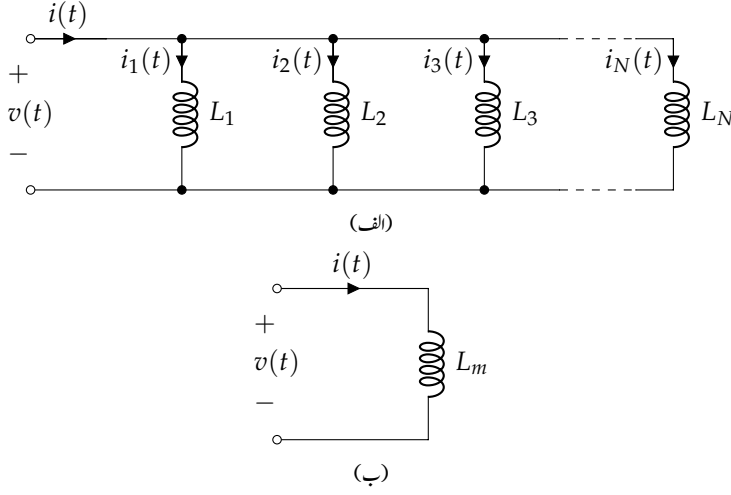
حاصل ہوتا ہے۔اس مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے

$$i(t) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_N(t_0) + \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}\right)\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے جس میں

$$\frac{1}{L_m} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{L_i} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N} \tag{6.29}$$

اور

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) + \cdots + i_N(t_0) \tag{6.30}$$

شکل 6.24: متوازی جڑے امالہ گیروں کی مساوی امالہ۔

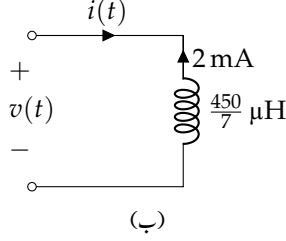
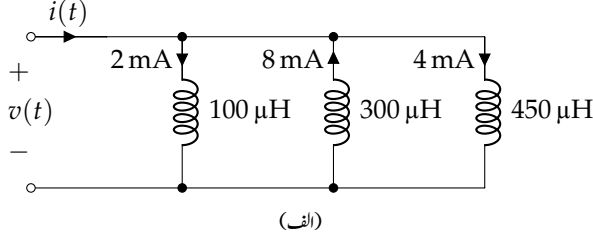
پُر کرنے سے

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L_m}\int_{t_0}^{t} v(t)\,\mathrm{d}t$$

حاصل ہوتا ہے جو ایک عدد امالہ گیر کی مساوات ہے جسے شکل 6.24-ب میں دکھایا گیا ہے۔مساوات 6.29 متوازی جڑے امالہ گیر کی مساوی امالہ L_m دیتی ہے جبکہ مساوات 6.30 مساوی امالہ میں ابتدائی رو $i(t_0)$ دیتی ہے۔

مثال 6.17: شکل 6.25-الف میں متوازی امالہ گیر اور ان میں ابتدائی رو دی گئی ہیں۔مساوی امالہ اور اس کی ابتدائی رو دریافت کریں۔

حل: مساوات 6.29 سے

$$\frac{1}{L_m} = \frac{1}{100\,\mathrm{\mu H}} + \frac{1}{300\,\mathrm{\mu H}} + \frac{1}{450\,\mathrm{\mu H}}$$

شکل 6.25: مثال 6.17 کا دور۔

لکھ کر

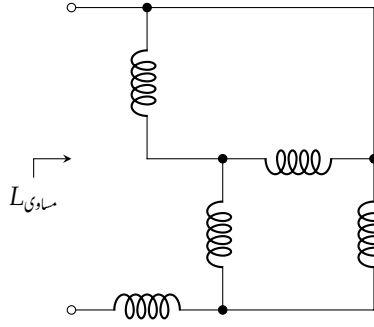
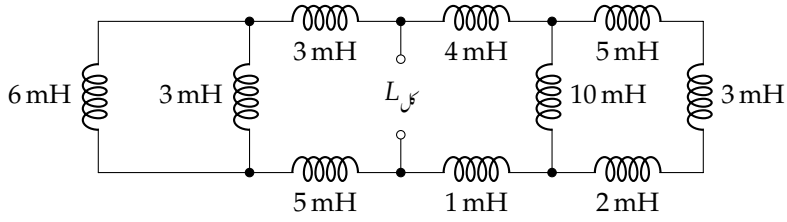
$$L_m = \frac{450}{7}\,\mu\text{H}$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 6.30 سے ابتدائی رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$i(t_0) = 2\,\text{mA} - 8\,\text{mA} + 4\,\text{mA} = -2\,\text{mA}$$

شکل 6.25-ب میں مساوی امالہ بمع ابتدائی رو دکھائی گئی ہے۔ منفی رو $i(t)$ کے الٹ ہے۔

مشق 6.14: شکل 6.26 میں تمام انفرادی امالہ 12 mH ہیں۔ ان کی مساوی امالہ دریافت کریں۔

جواب: $\frac{96}{5}$ mH

شکل 6.26: مشق 6.14 کا دور۔

شکل 6.27: مشق 6.15 کا دور۔

مشق 6.15: شکل 6.27 میں کل امالہ دریافت کریں۔

جواب: 5 mH

6.8 حسابی ایمپلیفائر کے RC ادوار

شکل 6.28 میں **تکمل کار**[22] دکھایا گیا ہے۔ جوڑ v_k زمین کے ساتھ جڑا ہے لہٰذا

$$v_k = 0$$

---

integrator[22]

ہو گا۔ جوڑ v_n پر کرخوف مساوات رو

$$\frac{v_n - v_i}{R} + C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_n - v_0) = 0$$

لکھتے ہوئے $v_n = v_k = 0$ پُر کرنے سے

$$\frac{0 - v_i}{R} + C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0 - v_0) = 0$$

یعنی

$$-\frac{v_i}{R} - C\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t} = 0$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کو

$$\mathrm{d}v_0 = -\frac{v_i}{RC}\,\mathrm{d}t$$

لکھ کر تکمل لیتے ہوئے

$$v_0 = -\frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} v_i\,\mathrm{d}t \tag{6.31}$$

یا

$$v_0 = v(t_0) - \frac{1}{RC}\int_{t_0}^{t} v_i\,\mathrm{d}t \tag{6.32}$$

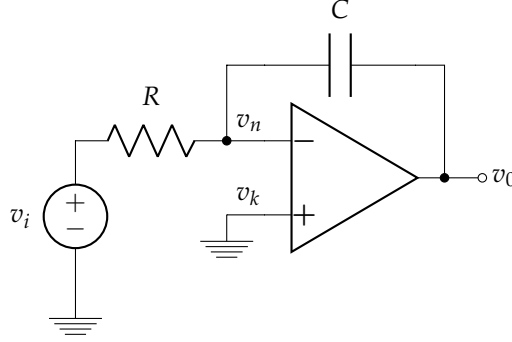
حاصل ہوتا ہے۔ اس مساوات کے تحت v_0 اشارہ v_i کے تکمل کے $\frac{1}{RC}$ گنا ہے۔ اسی لئے اس دور کو تکمل کار کہتے ہیں۔

6.9 تفرق کار

شکل 6.29 میں

$$v_k = 0$$

کے برابر ہے۔ جوڑ v_n پر کرخوف مساوات رو

$$C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_n - v_i) + \frac{v_n - v_0}{R} = 0$$

شکل 6.28: تکمل کار۔

میں $v_n = v_k = 0$ پُر کرنے سے

$$C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(0-v_i)+\frac{0-v_0}{R}=0$$

حاصل ہوتا ہے جسے ترتیب دیتے ہوئے

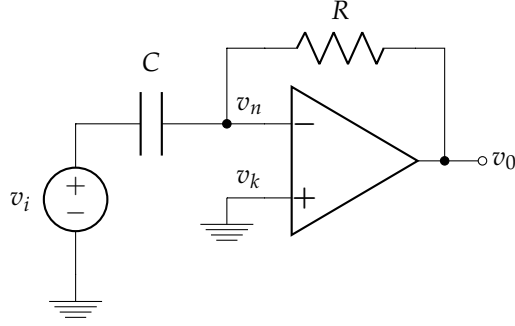
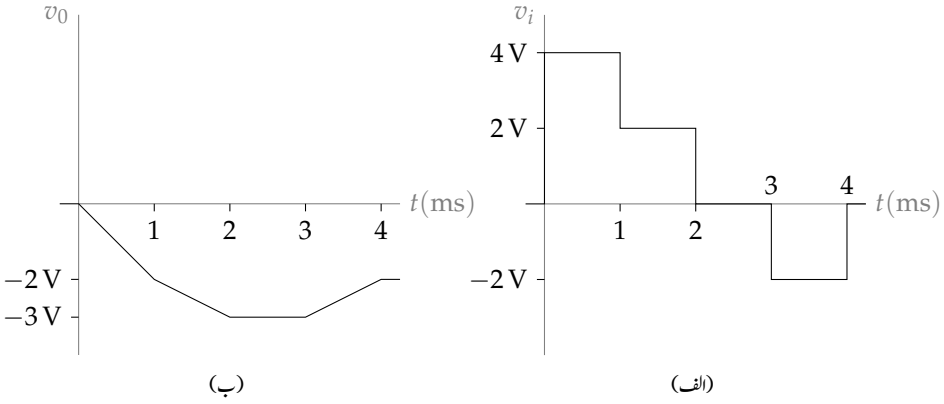
$$v_0=-RC\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} \tag{6.33}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس مساوات کے تحت v_0 اشارہ v_i کے تفرق کے $-RC$ گنا ہے۔اس لئے اس دور کو تفرق کار[23] کہتے ہیں۔

مثال 6.18: تکمل کار میں $R = 10\,000\,\mathrm{k\Omega}$ اور $C = 0.2\,\mathrm{\mu F}$ ہیں جبکہ داخلی اشارہ شکل 6.30 میں دیا گیا ہے۔خارجی اشارہ حاصل کریں۔

حل: مساوات 6.32 کے تحت

$$\begin{aligned} v_0(t) &= v(t_0)-\frac{1}{10\,000\times 0.2\times 10^{-6}}\int_{t_0}^{t} v_i\,\mathrm{d}t \\ &= v(t_0)-500\int_{t_0}^{t} v_i\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

[23] differentiator

شکل 6.29: تفرق کار۔

شکل 6.30: مثال 6.18 کا داخلی اشارہ۔

ہے جبکہ $v_i(0_-) = 0\,\mathrm{V}$ داخلی اشارے کی ابتدائی قیمت سے بالکل پہلے $t = 0$ کے برابر ہے۔لمحہ $t = 0\,\mathrm{ms}$ تا $t = 1\,\mathrm{ms}$ تک $v_i = 2\,\mathrm{V}$ ہے۔ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= 0 - 500 \int_0^t 4\,\mathrm{d}t \\
&= -2000t
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے جو سیدھے خط کی مساوات ہے جس کی ڈھلوان $-2000\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ ہے۔اس دورانیے کے اختتام $t = 1\,\mathrm{ms}$ پر

$$
v_0(1\,\mathrm{ms}) = -2000 \times 10^{-3} = -2\,\mathrm{V}
$$

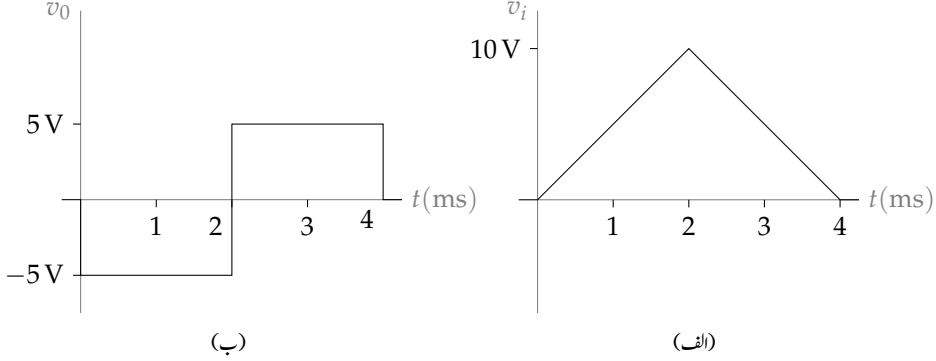
حاصل ہوتا ہے۔شکل 6.30-ب میں اس خط کو دکھایا گیا ہے۔اگلے ایک ملی سیکنڈ کی ابتدائی قیمتیں $t_0 = 1\,\mathrm{ms}$ اور $v_0(1\,\mathrm{ms}) = -2\,\mathrm{V}$ ہوں گی لہٰذا مساوات 6.32 درج ذیل لکھا جائے گا

$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= -2 - 500 \int_{1\,\mathrm{ms}}^t 2\,\mathrm{d}t \\
&= -2 - 1000(t - 0.001) \\
&= -1 - 1000t
\end{aligned}
$$

جس سے لمحہ $t = 2\,\mathrm{ms}$ پر

$$
v_0(2\,\mathrm{ms}) = -1 - 1000 \times 0.002 = -3\,\mathrm{V}
$$

حاصل ہوتا ہے۔لمحہ $t = 2\,\mathrm{ms}$ تا $t = 3\,\mathrm{ms}$ داخلی اشارہ صفر کے برابر ہے لہٰذا اس کا تکمل صفر ہو گا۔یوں خارجی اشارے میں اس دوران کوئی تبدیلی نہیں آئے گی اور یہ $-3\,\mathrm{V}$ پر برقرار رہے گا۔آخری ایک ملی سیکنڈ میں اسی طرح حل کرتے ہوئے شکل-ب کا آخری حصہ ملتا ہے۔

مثال 6.19: تفرق کار میں $R = 2\,\mathrm{k\Omega}$ اور $C = 0.5\,\mathrm{\mu F}$ ہیں جبکہ اس کا داخلی اشارہ شکل 6.31-الف میں دیا گیا ہے۔خارجی اشارہ حاصل کریں۔

شکل 6.31: مثال 6.19 کے اشارات۔

حل: شکل 6.31-الف میں چار عدد دورانیے منتخب کیے جا سکتے ہیں جن کے دوران داخلی اشارے کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ +5000, & 0 < t < 2\,\mathrm{ms} \\ -5000, & 2\,\mathrm{ms} < t < 4\,\mathrm{ms} \\ 0, & 4\,\mathrm{ms} \end{cases}$$

مساوات 6.33 میں دی گئی قیمتیں پُر کرنے سے

$$v_0 = -0.001\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں $\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}$ کی قیمتیں پُر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے جس کو شکل 6.31-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$v_0 = \begin{cases} -0.001(0) = 0\,\mathrm{V}, & t < 0 \\ -0.001(5000) = -5\,\mathrm{V}, & 0 < t < 2\,\mathrm{ms} \\ -0.001(-5000) = 5\,\mathrm{V}, & 2\,\mathrm{ms} < t < 4\,\mathrm{ms} \\ -0.001(0) = 0\,\mathrm{V}, & 4\,\mathrm{ms} \end{cases}$$

سوالات

سوال 6.1: ایک سو مائیکرو فیراڈ کے برق گیر میں دس سیکنڈ کے لئے ایک ملی ایمپیئر رو سے بار بھرنے کے بعد برق گیر کا دباو دریافت کریں۔

جواب: $100\,\mathrm{V}$

سوال 6.2: $8\,\mu\mathrm{F}$ کے برق گیر پر $4\,\mathrm{mC}$ بار پایا جاتا ہے۔اس پر دباو دریافت کریں۔

جواب: $500\,\mathrm{V}$

سوال 6.3: ایک برق گیر پر $12\,\mathrm{V}$ دباو اور $96\,\mathrm{nC}$ بار پایا جاتا ہے۔اس کی گنجائش دریافت کریں۔

جواب: $C = 8\,\mathrm{nF}$

سوال 6.4: ایک برق گیر پر ابتدائی دباو $-20\,\mathrm{V}$ ہے جبکہ اس کی گنجائش $C = 5\,\mu\mathrm{F}$ ہے۔اس میں $2\,\mu\mathrm{A}$ سے $90\,\mathrm{s}$ کے لئے بار بھرا جاتا ہے۔برق گیر پر اختتامی دباو حاصل کریں۔

جواب: $16\,\mathrm{V}$

سوال 6.5: $12\,\mu\mathrm{F}$ برق گیر میں ذخیرہ توانائی $6\cos^2 3000t\,\mu\mathrm{J}$ ہے۔برق گیر کی رو دریافت کریں۔

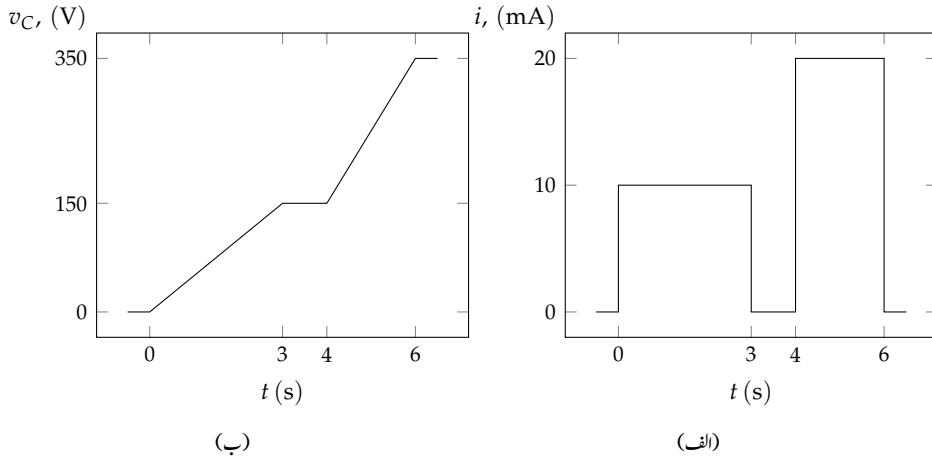
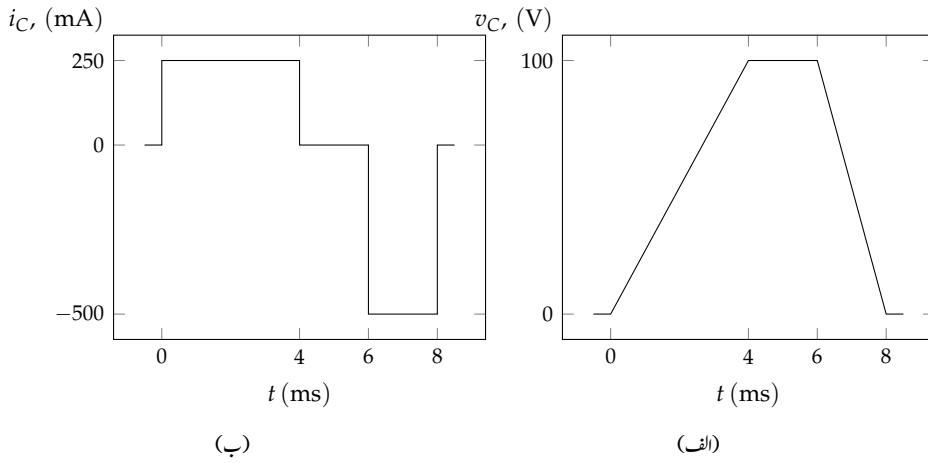
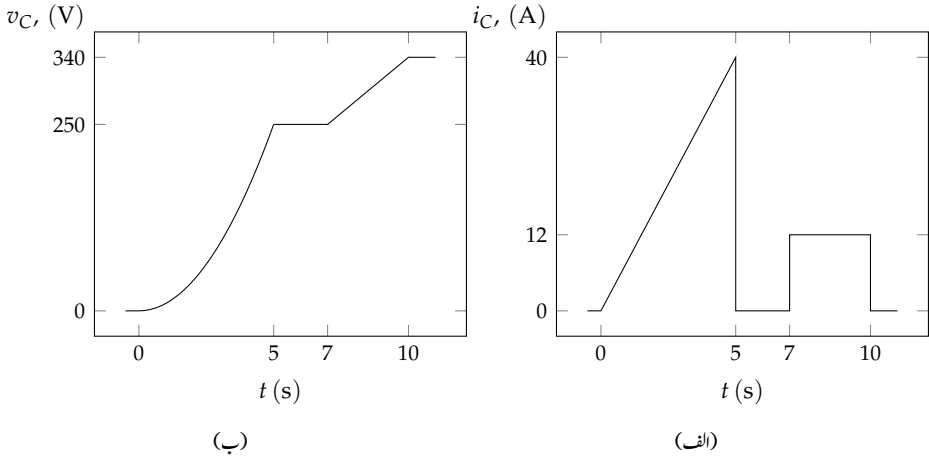
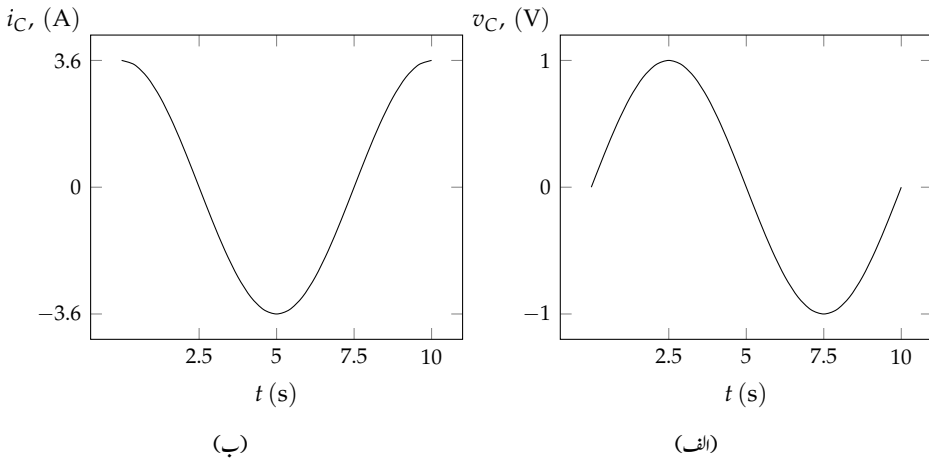
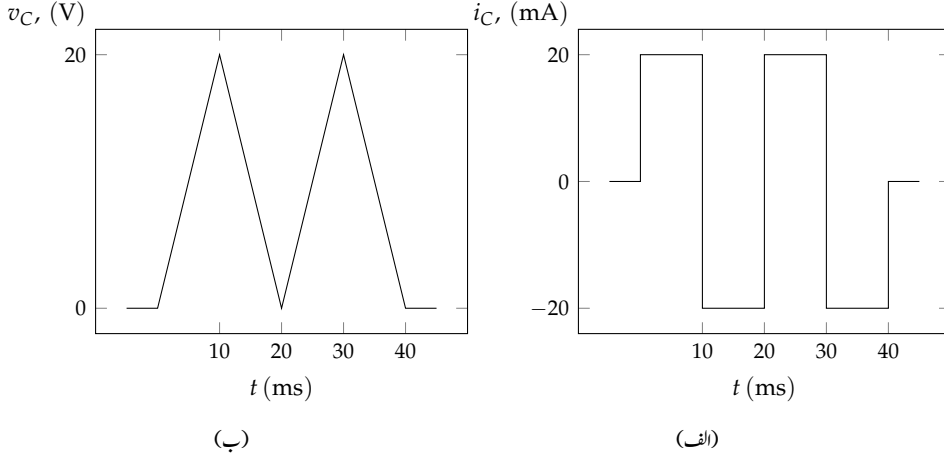
جواب: $i_C = -0.036\sin 3000t\,\mathrm{A}$

سوال 6.6: ابتدائی طور پر بے بار $0.2\,\mathrm{mF}$ برق گیر کو شکل 6.32 کی رو سے بھرا جاتا ہے۔برق گیر پر دباو کا خط کھینچیں۔

جواب: شکل-ب میں دباو دکھایا گیا ہے۔

سوال 6.7: $10\,\mu\mathrm{F}$ برق گیر کے دباو کو شکل 6.33 میں دکھایا گیا ہے۔اس کی رو کا خط کھینچیں۔

جواب: شکل-ب میں رو دکھائی گئی ہے۔

سوال 6.8: $0.4\,\mathrm{F}$ برق گیر کی رو کو شکل 6.34 میں دکھایا گیا ہے۔اس پر دباو کا خط کھینچیں۔

شکل 6.32: سوال 6.6 کے اشکال۔

شکل 6.33: سوال 6.7 کے اشکال۔

شکل 6.34: سوال 6.8 کے اشکال۔

شکل 6.35: سوال 6.9 کے اشکال۔

شکل 6.36: سوال 6.10 کے اشکال۔

جواب: شکل-ب میں دباو دکھایا گیا ہے۔

سوال 6.9: $0.1\,\mathrm{F}$ برق گیر کا دباو شکل 6.35 میں دیا گیا ہے۔اس کی رو کا خط کھینچیں۔

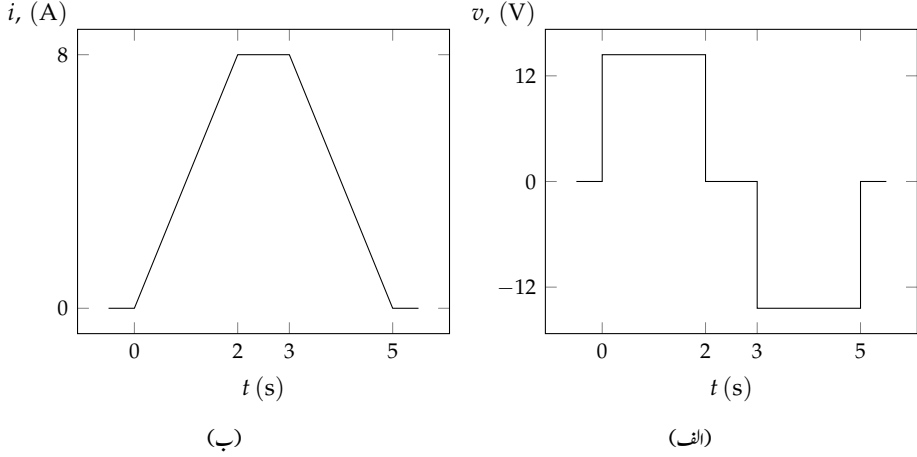
جواب: شکل-ب میں رو دکھائی گئی ہے۔

سوال 6.10: ابتدائی طور پر بے بار $10\,\mathrm{\mu F}$ برق گیر کی رو شکل 6.36 میں دی گئی ہے۔اس کے دباو کا خط کھینچیں۔

جواب: شکل-ب میں دباو دکھایا گیا ہے۔

سوال 6.11: ایک امالہ گیر میں $5\,\mathrm{ms}$ کے دورانیے میں رو $0\,\mathrm{mA}$ سے بڑھ کر $100\,\mathrm{mA}$ ہو جاتی ہے۔اس دورانیے میں امالی دباو $400\,\mathrm{mV}$ ہوتا ہے۔امالہ گیر کی گنجائش دریافت کریں۔

جواب: $2\,\mathrm{mH}$

سوال 6.12: $50\,\mathrm{mH}$ امالہ گیر کی رو $i = 7\sin 314t\,\mathrm{A}$ ہے۔اس کے دباو کی مساوات حاصل کریں۔امالہ گیر میں ذخیرہ توانائی کی مساوات حاصل کریں۔

شکل 6.37: سوال 6.14 کے اشکال۔

جواب: $v_L = 109.9\cos 314t\,\mathrm{V}$ ، $w = \frac{49}{40}\sin^2 314t\,\mathrm{J}$

سوال 6.13: $0.4\,\mathrm{H}$ امالہ گیر کی رو درج ذیل ہے۔ لمحہ $t = -3\,\mathrm{s}$ اور $t = 0.5\,\mathrm{s}$ پر امالہ کی رو اور امالہ میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

$$i_L = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 50(1 - e^{-2t})\,\mathrm{mA} & t > 0 \end{cases}$$

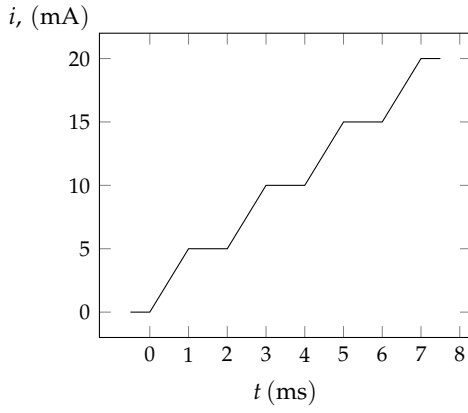
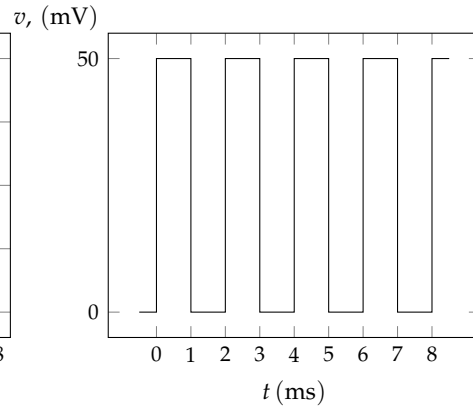
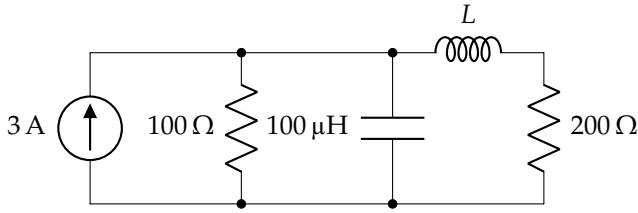
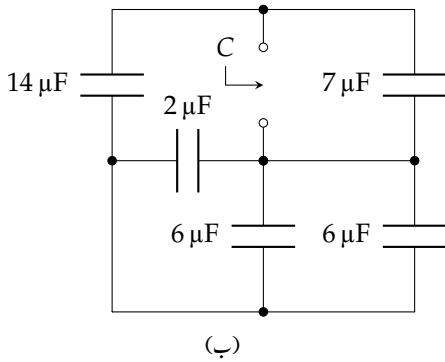
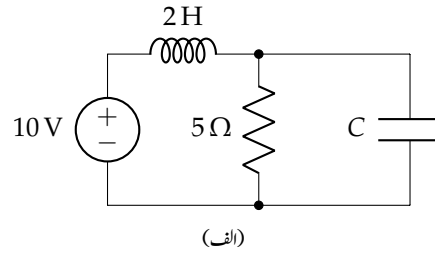
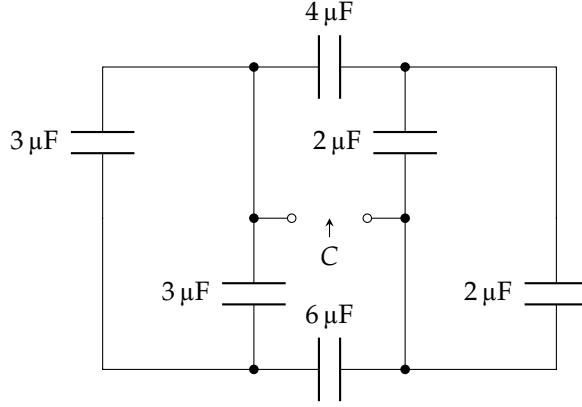
جوابات: $0\,\mathrm{A}$ ، $0\,\mathrm{J}$ ، $31.61\,\mathrm{mA}$ ، $199.8\,\mathrm{\mu J}$

سوال 6.14: شکل 6.37 میں $3\,\mathrm{H}$ کا دباو دیا گیا ہے۔ اس کی رو کا خط کھینچیں۔ ابتدائی رو صفر ہے۔

جواب: شکل-ب میں رو دی گئی ہے۔

سوال 6.15: شکل 6.38 میں $10\,\mathrm{mH}$ کا دباو دیا گیا ہے۔ اس کی رو کا خط کھینچیں۔ ابتدائی رو صفر ہے۔

جواب: شکل-ب میں رو دی گئی ہے۔

سوال 6.16: شکل 6.39 میں کل $2.5\,\mathrm{J}$ توانائی ذخیرہ ہے۔ امالہ L دریافت کریں۔

شکل 6.38: سوال 6.15 کے اشکال۔

شکل 6.39: سوال 6.16 کا دور۔

شکل 6.40: سوال 6.17 اور سوال 6.18 کے ادوار۔

شکل 6.41: سوال 6.19 کا دور۔

جواب: $L = 1\,\mathrm{H}$

سوال 6.17: شکل 6.40-الف میں امالہ گیر اور برق گیر میں برابر توانائی ذخیرہ ہے۔ برق گیر کی گنجائش دریافت کریں۔

جواب: $C = 0.08\,\mathrm{F}$

سوال 6.18: شکل 6.40-ب میں کل C دریافت کریں۔

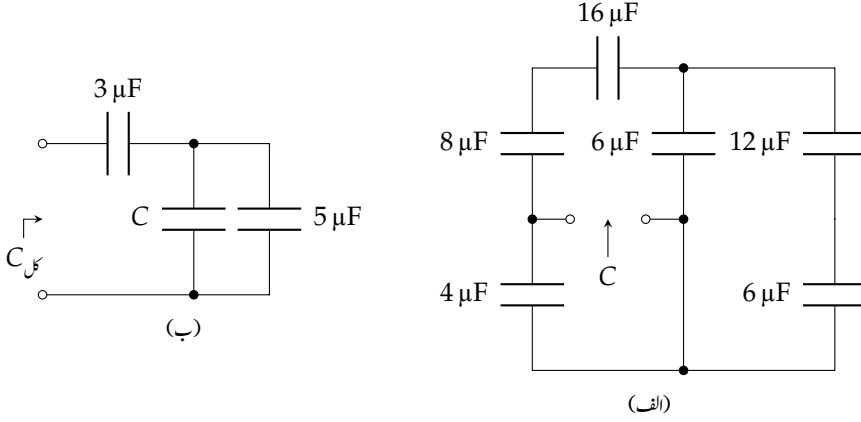
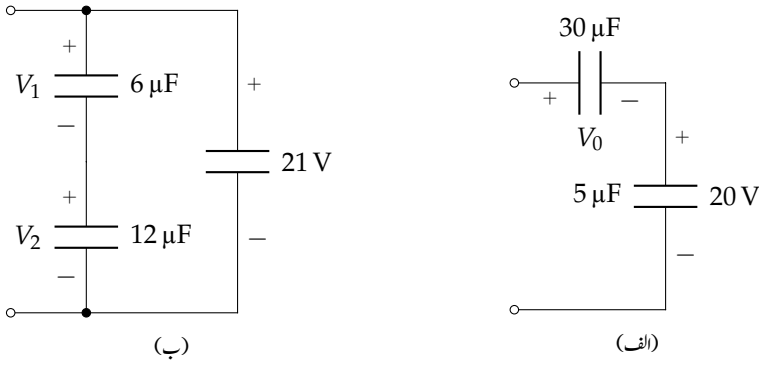
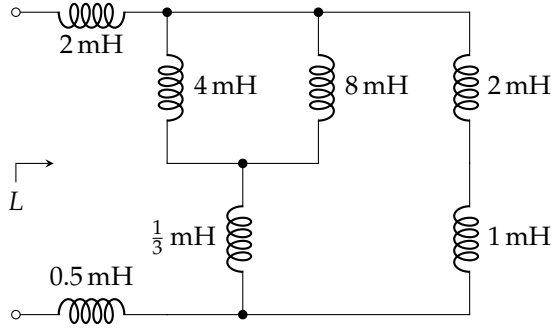
جواب: $C = 14\,\mathrm{\mu F}$

سوال 6.19: شکل 6.41-الف میں کل C دریافت کریں۔ جواب: $C = 5\,\mathrm{\mu F}$

سوال 6.20: شکل 6.42-الف میں کل C حاصل کریں۔

جواب: $C = 8\,\mathrm{\mu F}$

سوال 6.21: شکل 6.42-ب میں $C_{\text{کل}} = \frac{15}{23}\,\mathrm{\mu F}$ ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ C کی قیمت معلوم کریں۔

جواب: $C = 1\,\mathrm{\mu F}$

شکل 6.42: سوال 6.20 اور سوال 6.21 کے ادوار۔

شکل 6.43: سوال 6.22 اور سوال 6.23 کے ادوار۔

شکل 6.44: سوال 6.24 کا دور۔

سوال 6.22: شکل 6.43-الف میں سلسلہ وار برق گیر دکھائے گئے ہیں جن میں رو بار بھرتی ہے۔ دباو V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = \frac{10}{3}\,\mathrm{V}$

سوال 6.23: شکل 6.43-ب میں سلسلہ وار برق گیر دکھائے گئے ہیں جن میں رو بار بھرتی ہے۔ دباو V_1 اور V_2 حاصل کریں۔

جوابات: $V_1 = 14\,\mathrm{V}$ ، $V_2 = 7\,\mathrm{V}$

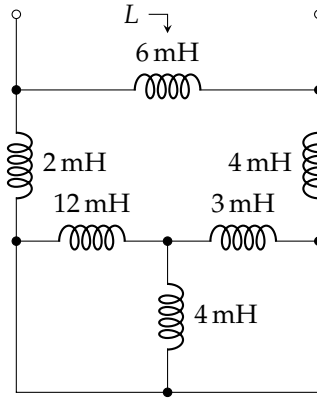
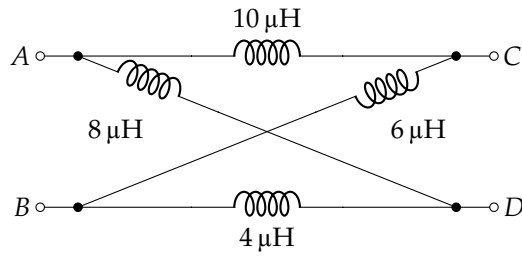
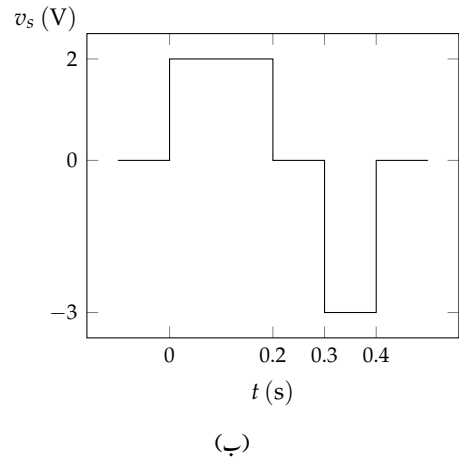
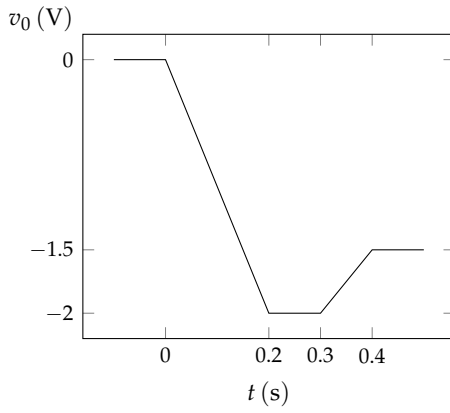
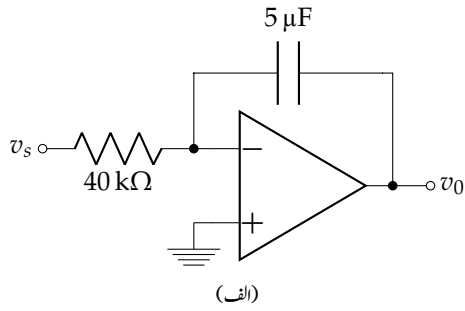
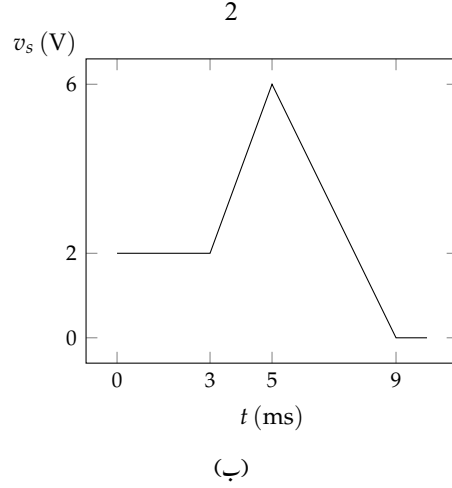
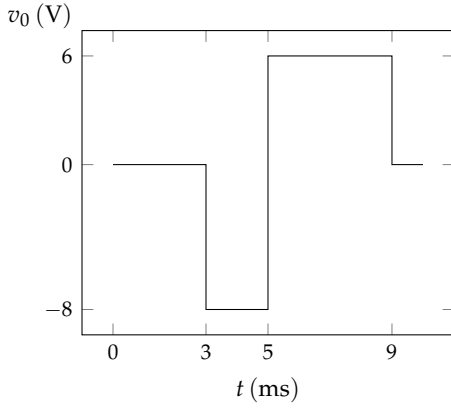
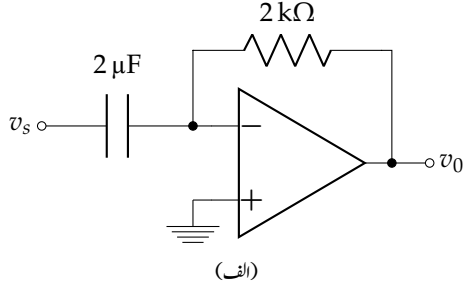
سوال 6.24: شکل 6.44 میں کل امالہ L دریافت کریں۔

جواب: $L = 4\,\mathrm{mH}$

سوال 6.25: شکل 6.45 میں L دریافت کریں۔

جواب: $L = 3\,\mathrm{mH}$

سوال 6.26: شکل 6.46 میں CD کو کھلے سر رکھتے ہوئے L_{AB} دریافت کریں۔ CD کو قصر دور کرتے ہوئے امالہ L_{AB} کو دوبارہ حاصل کریں۔

جواب: $L = \frac{48}{7}\,\mathrm{\mu H}$ ، $L = \frac{308}{45}\,\mathrm{\mu H}$

شکل 6.45: سوال 6.25 کا دور۔

شکل 6.46: سوال 6.26 کا دور۔

شکل 6.47: سوال 6.27 کا دور۔

شکل 6.48: سوال 6.28 کا دور۔

سوال 6.27: شکل 6.47-الف کے دور کا داخلی اشارہ v_s شکل-ب میں دیا گیا ہے۔خارجی اشارے v_0 کا خط کھینچیں۔

جواب: خارجی اشارہ شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 6.28: شکل 6.48-الف کے دور کا داخلی اشارہ v_s شکل-ب میں دیا گیا ہے۔خارجی اشارے v_0 کا خط کھینچیں۔

جواب: خارجی اشارہ شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔

باب 7

عارضی رد عمل

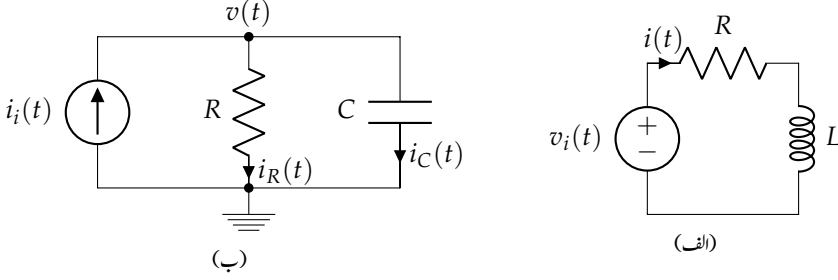
7.1 تعارف

ایسے ادوار جن میں امالہ گیر اور (یا) برق گیر پائے جاتے ہوں میں توانائی ذخیرہ کرنے کی صلاحیت ہوتی ہے۔توانائی ذخیرہ کرنے والے ادوار کا رد عمل منبع طاقت کے علاوہ ذخیرہ توانائی پر بھی منحصر ہوتا ہے۔ایسے ادوار میں کسی بھی طرح کی تبدیلی سے ذخیرہ توانائی میں تبدیلی رونما ہو سکتی ہے۔دور میں تبدیلی مثلاً کسی سوئچ کے چالو یا غیر چالو کرنے سے پیدا ہو سکتی ہے۔ایسی صورت جہاں دور یکساں ایک ہی حالت میں رہے کو **برقرار حالت**[1] کہتے ہیں۔تبدیلی کے بعد دور متبادل برقرار حالت اختیار کرتا ہے۔ایک برقرار حالت سے دوسری برقرار حالت تک پہنچنے کے دوران، دور **عارضی حالت**[2] میں ہوتا ہے۔

7.2 یک رتبی ادوار

وہ ادوار جن میں صرف امالہ گیر توانائی ذخیرہ کرتے ہوں کی کرخوف مساوات **یک رتبی تفرقی مساوات**[3] ہوتی ہے۔اسی طرح وہ ادوار جن میں صرف برق گیر توانائی ذخیرہ کرتے ہوں بھی یک رتبی کرخوف مساوات دیتے ہیں۔اسی لئے

---

[1] steady state
[2] transient state
[3] first order differential equation

شکل 7.1: یک رتبی ادوار کی مثالیں۔

انہیں یک رتبی ادوار[4] کہتے ہیں۔اس کے برعکس ایسے ادوار جن میں امالہ گیر اور برق گیر دونوں پائے جاتے ہوں دو رتبی تفرقی مساوات[5] دیتے ہیں اور انہیں دو رتبی ادوار[6] کہا جاتا ہے۔

شکل 7.1 میں یک رتبی ادوار کی مثالیں دی گئی ہیں۔آئیں ان کی کرخوف مساوات لکھ کر دیکھیں۔شکل-الف کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$v(t) = i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.1}$$

اسی طرح شکل-ب کی کرخوف مساوات درج ذیل ہے۔

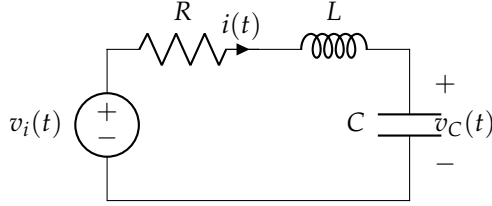
$$i_i(t) = \frac{v(t)}{R} + C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.2}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج بالا دونوں مساوات یک رتبی تفرقی مساوات ہیں۔

شکل 7.2 میں دو رتبی دور دکھایا گیا ہے جس کی کرخوف مساوات درج ذیل ہے جہاں $v_C(0)$ لمحہ $t = 0$ پر برق گیر کا دباو ہے۔

$$\begin{aligned} v_i(t) &= Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t \\ &= Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t + v_C(0) \end{aligned} \tag{7.3}$$

اس تکمل و تفرقی مساوات[7] میں تکمل کی علامت ختم کرنے سے تفرقی مساوات[8] حاصل ہو گی۔تکمل کی علامت ختم کرنے

[4] first order circuits
[5] second order differential equations
[6] second order circuits
[7] integro-differential equation
[8] differential equation

شکل 7.2: دو رتبی دور۔

کی خاطر اس کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i(t)}{C} \tag{7.4}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ امالہ گیر اور برق گیر دونوں کی موجودگی سے دو رتبی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 7.3 رو $i(t)$ کی تکمل و ترقی مساوات ہے۔اس مساوات میں

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t$$

پُر کرنے سے دباو $v_C(t)$ کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v_i(t) = RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + v_C(t) \tag{7.5}$$

7.2.1 ردعمل کی عمومی مساوات

یک رتبی ادوار کے رد عمل جاننے کی خاطر ان کی تفرقی مساوات حل کی جاتی ہے جس سے دور کے مختلف مقامات پر دباو اور رو حاصل کی جاتی ہے۔ان یک رتبی مساوات کی عمومی صورت درج ذیل ہوتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ay(t) = g(t) \tag{7.6}$$

جہاں $y(t)$ دباو یا رو کو ظاہر کرتی ہے، a مستقل ہے اور $g(t)$ جبری قوت[9] ہے۔اس مساوات کا آزاد متغیرہ وقت t ہے۔تفرقی مساوات کا ایک بنیادی مسئلہ کہتا ہے کہ مساوات 7.6 کا عمومی حل اس کے فطری رد عمل[10]

[9] forcing function
[10] natural response, complementary solution

$y_f(t)$ اور جبری رد عمل[11] $y_j(t)$ کا مجموعہ ہے۔مساوات 7.6 کے کسی بھی حل کو بطور جبری رد عمل لیا جا سکتا ہے جبکہ درج ذیل متجانس مساوات[12]

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ay(t) = 0 \tag{7.7}$$

کے کسی بھی حل کو فطری رد عمل تصور کیا جا سکتا ہے۔مساوات 7.6 میں $g(t) = 0$ پُر کرنے سے متجانس مساوات حاصل ہوتی ہے۔

آئیں $g(t) = A$ کی صورت میں مساوات 7.6 کا حل حاصل کریں جہاں A ایک مستقل ہے۔یوں ہمیں درج ذیل دو مساوات کے حل درکار ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y_j(t)}{\mathrm{d}t} + ay_j(t) = A \tag{7.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_f(t)}{\mathrm{d}t} + ay_f(t) = 0 \tag{7.9}$$

جبری حل کو قیاس کے ذریعہ K_1 تصور کرتے ہیں جہاں K ایک مستقل ہے۔

$$y_j(t) = K_1 \tag{7.10}$$

جبری حل $y_j(t) = K_1$ کو مساوات 7.8 میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t} + aK_1 &= A\\ 0 + aK_1 &= A\end{aligned}$$

یعنی

$$K_1 = \frac{A}{a} \tag{7.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.9 کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}y_f(t)}{y_f(t)} = -a\,\mathrm{d}t$$

---

forced response[11]
homogenous equation[12]

لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل

$$\ln y_f(t) = -at + c$$

یعنی

$$y_f(t) = K_2 e^{-at} \tag{7.12}$$

کے برابر ہے جہاں c تکمل کا مستقل ہے اور $K_2 = e^c$ کے برابر ہے۔مساوات 7.11 اور مساوات 7.12 سے عمومی حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y(t) = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at} \tag{7.13}$$

کسی بھی لمحے پر $y(t)$ جاننے سے درج بالا مساوات میں نا معلوم مستقل K_2 دریافت کیا جا سکتا ہے۔درج بالا مساوات کو درج ذیل عمومی حل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

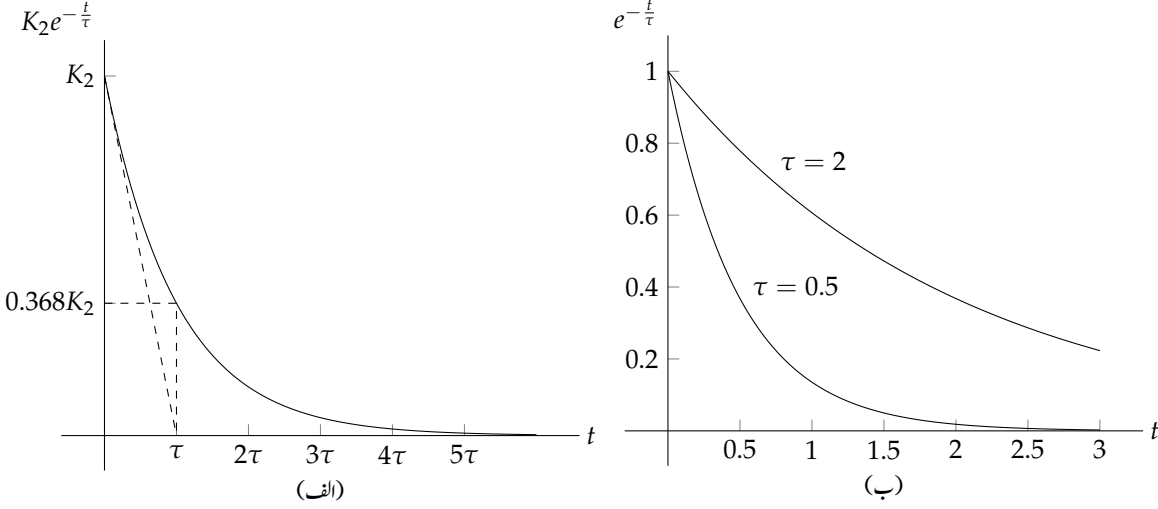
$$y(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7.14}$$

جہاں $\tau = \frac{1}{a}$ کے برابر ہے۔

مساوات 7.14 کے مختلف اجزاء کو نام دیے گئے ہیں۔یوں τ **وقتی مستقل**[13] کہلاتا ہے جبکہ K_1 **برقرار حالت حل**[14] کہلاتا ہے۔مساوات 7.14 میں $t = \infty$ پُر کرنے سے برقرار حالت حل حاصل ہوتا ہے۔یوں کسی بھی تبدیلی کے بہت دیر بعد دور برقرار حالت میں ہو گا یعنی ابدی صورت کو برقرار حالت کہا جاتا ہے۔

شکل 7.3-الف میں مثبت a کی صورت میں جبری حل دکھایا گیا ہے۔ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر $y_j(0) = K_2$ کے برابر ہے جبکہ ایک وقتی مستقل برابر وقت بعد اس کی قیمت $y_j(\tau) = 0.368K_2$ رہ گئی ہے یعنی τ دورانیے میں جبری حل کی قیمت میں 63.2 % کمی واقع ہوئی ہے۔اسی طرح دو وقتی مستقل وقفے کے بعد $y_j(2\tau) = 0.135K_2$ ہے جو $y_p(\tau)$ کے 0.368 گنا ہے۔حقیقت میں کسی بھی لمحہ t_1 پر y_j کی قیمت میں لمحہ $t_1 + \tau$ پر 63.2 % کمی واقع ہو گی۔پانچ وقتی مستقل وقفے کے بعد $y_j(5\tau) = 0.0067K_2$ رہ جاتا ہے جو ابتدائی قیمت کے 0.67 % ہے۔

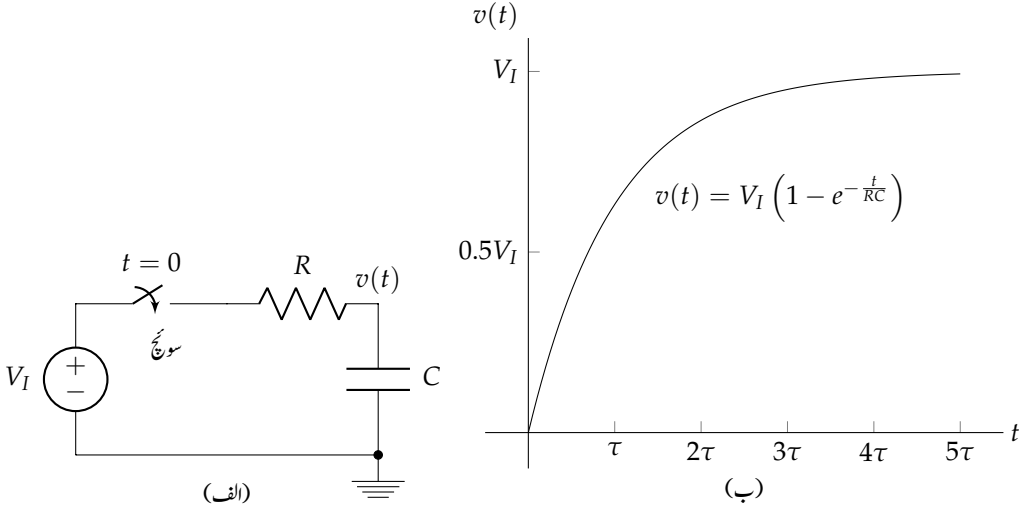
---

[13] time constant
[14] steady state solution

شکل 7.3: وقتی مستقل

مساوات 7.12 قوت نمائی انحطاطی[15] خط ہے۔ قوت نمائی انحطاطی خط کی ایک خصوصیت یہ ہے کہ ابتدائی لمحے پر اس کا مماس افقی محور کو τ پر کاٹتا ہے۔ اس مماس کو شکل 7.3-الف میں $(0, K_2)$ تا $(\tau, 0)$ نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ شکل 7.3-ب میں مختلف τ کی قیمتوں کے لئے مساوات 7.12 کو کھینچا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم وقتی مستقل کا خط جلد اختتامی قیمت تک پہنچتا ہے۔ یوں وقتی مستقل کسی بھی دور کے رد عمل کے دورانیے کی ناپ ہے۔

مثال 7.1: شکل 7.4 میں مزاحمت اور بے بار برق گیر سلسلہ وار جڑے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ[16][17] چالو کرتے ہوئے انہیں مستقل منبع دباو V_I کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ برق گیر کا دباو $v(t)$ اور رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل: سوئچ چالو کرنے سے پہلے برق گیر بے بار ہے لہٰذا اس پر دباو صفر کے برابر ہے۔ صفحہ 323 پر مساوات 6.11 کے تحت $v_C(0_+) = v_C(0_-)$ ہو گا یعنی یوں سوئچ چالو کرنے کے فوراً بعد برق گیر کا دباو صفر ہی ہو گا۔ سوئچ

[15] exponential decaying
[16] اس طرز کے سوئچ کا پورا نام ایک قطب ایک چال سوئچ ہے۔
[17] switch, spst, single pole single throw

شکل 7.4: مثال 7.1 کا دور، دباو اور رو۔

چالو کرنے کے بعد دباو جوڑ $v(t)$ کے استعمال سے کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\frac{v(t)-V_I}{R}+C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

جسے ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v(t)}{RC}=\frac{V_I}{RC} \tag{7.15}$$

لکھا جا سکتا ہے جو عمومی مساوات 7.6 کی طرح ہے۔ چونکہ V_I مستقل قیمت ہے لہٰذا اس مساوات کا جبری حل

$$v_J(t)=K_1$$

تصور کیا جا سکتا ہے جسے مساوات 7.15 میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t}+\frac{K_1}{RC}&=\frac{V_I}{RC}\\
0+\frac{K_1}{RC}&=\frac{V_I}{RC}
\end{aligned}$$

یعنی

$$K_1=V_I$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں جبری حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_J(t) = V_I$$

اس نتیجے کے تحت سوئچ چالو کرنے کے بہت دیر بعد برق گیر پر دباو عین منبع دباو کے برابر ہو گا۔شکل کو دیکھتے ہوئے اسی نتیجے تک یوں پہنچا جا سکتا ہے کہ سوئچ چالو کرنے کے بعد دور میں رو کی وجہ سے برق گیر پر بار جمع ہونا شروع ہو جائے گا۔جب تک برق گیر کا دباو منبع کے دباو سے کم ہو، مزاحمت پر دباو پایا جائے گا لہٰذا اس میں رو پائی جائے گی۔یہ رو برق گیر پر جمع بار میں اضافہ کرتی رہے گی۔عین اس وقت جب برق گیر اور منبع کے دباو برابر ہو جائیں، رو کی قیمت صفر ہو جائے گی اور برق گیر کا دباو اسی قیمت پر ابد تک برقرار رہے گا۔

آئیں اب فطری حل دریافت کریں۔فطری حل متجانس مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.15 کے دائیں بازو کو صفر کے برابر پُر کرنے سے متجانس مساوات

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t)}{RC} = 0 \tag{7.16}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس کو

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{v(t)} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC}$$

لکھتے ہوئے تکمل لینے سے

$$\ln v(t) = -\frac{t}{RC} + c$$

یعنی

$$v_F(t) = K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

فطری حل حاصل ہوتا ہے۔ جبری اور فطری حل کا مجموعہ عمومی حل ہو گا۔

$$v(t) = V_I + K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

عمومی حل میں نا معلوم مستقل کو ابتدائی شرائط[18] سے حاصل کرتے ہیں جس کے تحت $t = 0_+$ پر $v_C(0_+) = 0$ کی قیمت معلوم ہے۔ان قیمتوں کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$0 = V_I + K_2 e^{-\frac{0}{RC}}$$
$$0 = V_I + K_2$$

[18] initial conditions

یعنی

$$K_2 = -V_I$$

حاصل ہوتا ہے۔

جبری حل اور فطری حل کا مجموعہ عمومی حل دیتا ہے

$$\begin{aligned} v(t) &= v_J(t) + v_F(t) \\ &= V_I \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\ &= V_I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{7.17}$$

درج بالا مساوات میں وقتی مستقل درج ذیل ہے۔

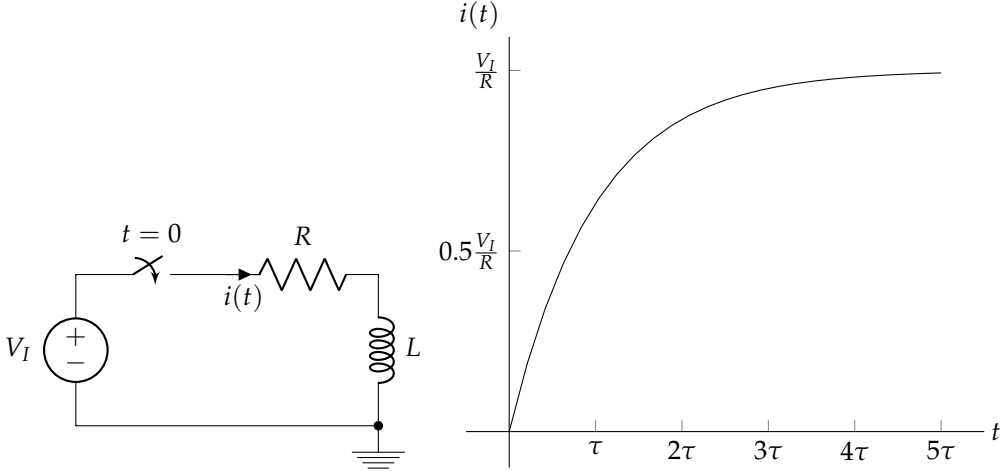
$$\tau = RC \tag{7.18}$$

یوں R یا(اور) C بڑھانے سے وقتی مستقل بڑھے گا جس سے دور برقرار صورت زیادہ دیر کے بعد اختیار کرے گا۔

مساوات 7.17 کو $i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ میں پر کرتے ہوئے رو $i(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= CV_I\left(0 + \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\ &= \frac{V_I}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

یہی رو مزاحمت پر اوہم کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے یعنی

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_I - v(t)}{R} \\ &= \frac{V_I}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

شکل 7.5: مثال 7.2 کے اشکال۔

مثال 7.2: شکل 7.5 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔رو کا خط کھینچیں۔

حل: کرخوف مساوات دباو

$$V_I = i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

کو ترتیب دیتے ہوئے عمومی شکل میں لاتے ہیں

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{V_I}{L} \tag{7.19}$$

جس کا جبری حل

$$i_J(t) = K_1$$

ہو گا۔جبری حل کو عمومی مساوات میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}K_1 &= \frac{V_I}{L} \\
0 + \frac{R}{L}K_1 &= \frac{V_I}{L}
\end{aligned}$$

یعنی

$$K_1 = \frac{V_I}{R}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i_J(t) = \frac{V_I}{R}$$

یہی جواب منطق سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔چونکہ یک سمت رو کے لئے امالہ گیر بطور قصر دور کردار ادا کرتا ہے لہٰذا عارضی دورانیہ گزر جانے کے بعد ہم امالہ گیر کو قصر دور تصور کر سکتے ہیں۔شکل 7.5 میں امالہ گیر کو قصر دور کرتے ہوئے اوہم کے قانون سے $i_J(t) = \frac{V_I}{R}$ لکھا جا سکتا ہے۔

فطری حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 7.19 میں دیے گئے عمومی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر پُر کرتے ہوئے درج ذیل متجانس مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i(t) = 0$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t$$

تکمل لینے سے

$$\ln i(t) = -\frac{R}{L}t + c$$

یعنی

$$i_F(t) = K_2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جبری اور فطری حل کا مجموعہ عمومی حل دیتا ہے

$$\begin{aligned} i(t) &= i_J(t) + i_F(t) \\ &= \frac{V_I}{R} + K_2 e^{-\frac{R}{L}t} \\ &= \frac{V_I}{R} + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \tag{7.20}$$

جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہے۔

$$\tau = \frac{R}{L} \tag{7.21}$$

عمومی حل میں نا معلوم مستقل K_2 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔سوئچ چالو کرنے سے پہلے دور میں رو صفر کے برابر ہے۔صفحہ 335 پر مساوات 6.21 کے تحت امالہ کی رو بلا جوڑ تفاعل

$$i_L(t_+) = i_L(t_-)$$

ہے لہٰذا سوئچ چالو کرنے کے فوراً بعد امالہ کی رو وہی ہو گی جو سوئچ چالو کرنے کے فوراً پہلے تھی یعنی لمحہ $t = 0_+$ پر $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ ہو گی۔ان معلومات کو مساوات 7.20 میں دیے عمومی حل میں پُر کرنے سے

$$0 = \frac{V_I}{R} + K_2 e^{-\frac{0}{\tau}}$$

یعنی

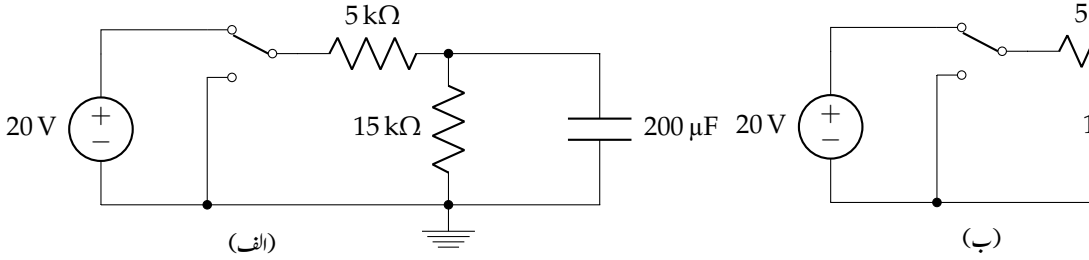
$$K_2 = -\frac{V_I}{R}$$

حاصل ہوتا ہے۔عمومی حل میں ابتدائی معلومات سے حاصل کردہ مستقل پر کرنے سے درج ذیل مخصوص حل[19] حاصل ہوتا ہے۔

$$i(t) = \frac{V_I}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{7.22}$$

رو کے خط کو شکل 7.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 7.3: ازل سے شکل 7.6 میں ایک قطب دو چال سوئچ[20] اسی جگہ پر ہے۔لمحہ $t = 0$ پر اس کی جگہ تبدیل کرتے ہوئے $5\,\text{k}\Omega$ مزاحمت کو زمین کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔برق گیر پر دباو دریافت کریں۔

[19] particular solution
[20] single pole double throw switch, spdt

شکل 7.6: مثال 7.3 کے اشکال۔

حل: ازل سے دور منبع کے ساتھ جڑا رہا ہے۔یوں دور برقرار حالت میں ہو گا اور برق گیر کو کھلا دور تصور کیا جاتا ہے۔ایسا کرنے سے شکل-ب حاصل ہوتی ہے جہاں سے تقسیم دباو کے کلیے سے برق گیر کا ابتدائی دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_C(0_-) = 20\left(\frac{15\,\mathrm{k\Omega}}{5\,\mathrm{k\Omega}+15\,\mathrm{k\Omega}}\right) = 15\,\mathrm{V}$$

برق گیر کا دباو بلا جوڑ ہے لہٰذا

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 15\,\mathrm{V} \qquad \text{ابتدائی حالت}$$

ہو گا۔لمحہ $t = 0$ کے بعد کی صورت شکل-پ میں دکھائی گئی ہے۔ہمیں اس شکل میں $v(t)$ درکار ہے جسے کرخوف مساوات رو کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{v_C(t)}{5000} + \frac{v_C(t)}{15000} + 200\times10^{-6}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

اس متجانس مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{v_C(t)} = -\frac{4}{3}\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل

$$\ln v_C(t) = -\frac{4}{3}t + c$$

یا

$$v_C(t) = Ke^{-\frac{4}{3}t}$$

کے برابر ہے جہاں تکمل کے مستقل کو c یا K لکھا گیا ہے۔ابتدائی حالت کی معلومات اس مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$15 = Ke^0$$

سے K کی قیمت درج ذیل

$$K = 15$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں

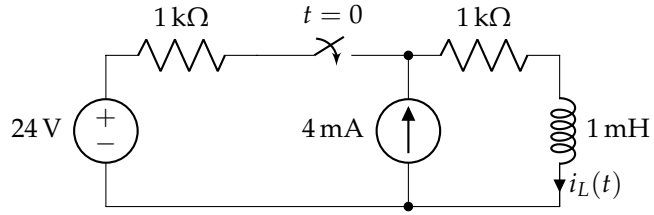
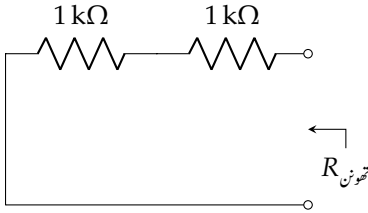
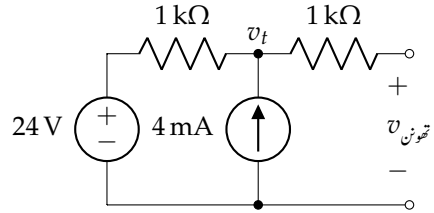
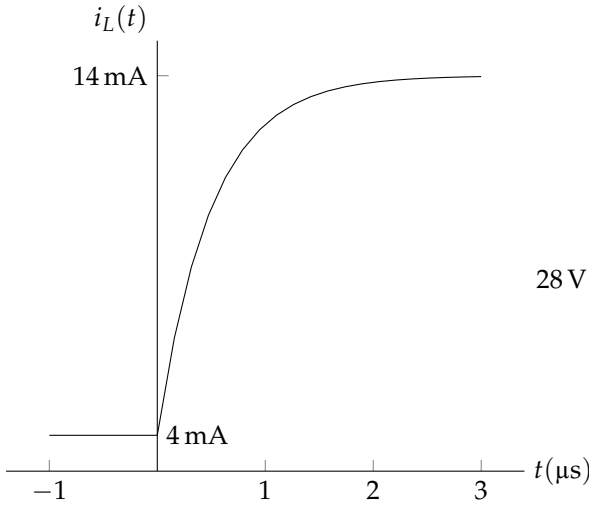
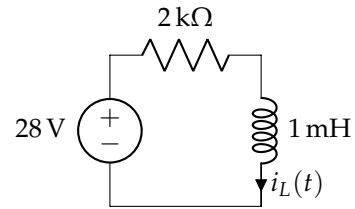
$$v_C(t) = 15e^{-\frac{4}{3}t}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں وقتی مستقل $\tau = \frac{3}{4}$ کے برابر ہے۔یوں سوئچ چالو کرنے کے $0.75\,\mathrm{s}$ بعد برق گیر کا دباو ابتدائی قیمت کے $36.8\,\%$ یعنی $0.368 \times 15 = 5.52\,\mathrm{V}$ ہو گا۔

مثال 7.4: ازل سے شکل 7.7 میں سوئچ غیر چالو تھا جسے $t = 0$ پر چالو کیا جاتا ہے۔امالہ گیر کی رو $i_L(t)$ دریافت کریں۔

حل: غیر چالو سوئچ کی صورت میں منبع رو کی تمام رو امالہ گیر سے گزرتی ہے لہٰذا

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 4\,\mathrm{mA}$$

ہو گا۔اس دور کو مسئلہ تھونن کی مدد سے حل کرتے ہیں۔یوں امالہ کو بوجھ تصور کرتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔تھونن دباو حاصل کرنے کی خاطر بوجھ کو کھلے دور کیا جاتا ہے جس سے شکل 7.7-ب حاصل

شکل 7.7: مثال 7.4 کے اشکال۔

ہوتی ہے۔اس شکل میں منبع رو کی تمام رو بائیں مزاحمت اور منبع دباو سے گزرے گی للہٰذا مزاحمت پر $4\,\mathrm{V}$ کا دباو ہو گا۔یوں

$$v_t = v_{\text{تھونن}} = 24\,\mathrm{V} + 4\,\mathrm{V} = 28\,\mathrm{V}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ بالائی دائیں مزاحمت میں رو صفر کے برابر ہے للہٰذا اس پر دباو بھی صفر ہو گا اور یوں v_t اور $v_{\text{تھونن}}$ برابر ہوں گے۔

منبع دباو کو قصر دور اور منبع رو کو کھلے دور کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتی ہے جسے دیکھتے ہوئے تھونن مزاحمت

$$R_{\text{تھونن}} = 2\,\mathrm{k\Omega}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

تھونن مساوی دور استعمال کرتے ہوئے شکل-الف کو شکل-ت کی طرز پر بنایا جا سکتا ہے۔شکل-ت کی کرخوف مساوات

$$28 = 2000i(t) + 0.001\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

کو عمومی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + 2\times 10^6 i(t) = 28000$$

اس مساوات کا جبری حل

$$i_J(t) = K_1 = 14\,\mathrm{mA}$$

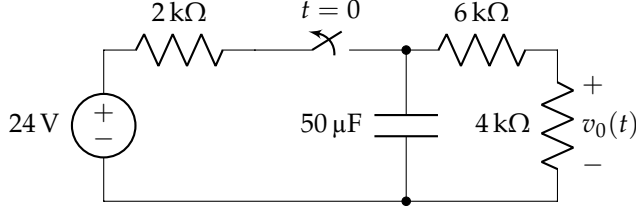
حاصل ہوتا ہے اور اس کا فطری حل

$$i_F(t) = K_2 e^{-2\times 10^6 t}$$

ہے-یوں امالہ گیر کے رو کا عمومی حل

$$i(t) = 0.014 + K_2 e^{-2\times 10^6 t}$$

ہے۔ابتدائی معلومات کو اس مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$0.004 = 0.014 + K_2 e^0$$

شکل 7.8: مشق 7.1 کا دور۔

سے

$$K_2 = -10\,\mathrm{mA}$$

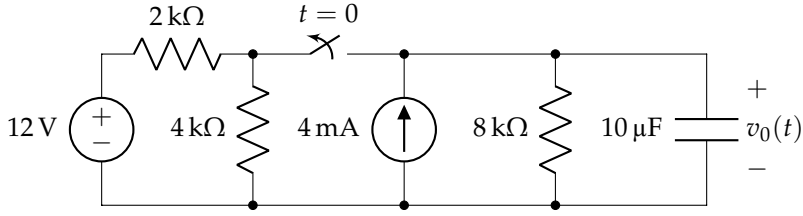
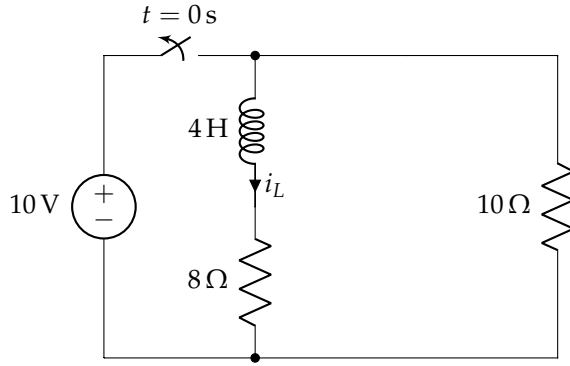
حاصل ہوتا ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہے۔

$$i_L(t) = 0.014 - 0.01e^{-2\times10^6 t} \tag{7.23}$$

اس مساوات کا وقتی مستقل $\tau = 0.5\,\mu\mathrm{s}$ ہے۔یوں تقریباً $5\tau = 2.5\,\mu\mathrm{s}$ میں دور پہلی برقرار حالت سے دوسری برقرار حالت اختیار کر پاتا ہے۔مساوات 7.23 کو شکل-ٹ میں دکھایا گیا ہے۔

مشق 7.1: شکل 7.8 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔برق گیر پر ابتدائی دباو دریافت کرتے ہوئے $v_0(t)$ دریافت کریں۔اس دور کا وقتی مستقل کیا ہے۔

جوابات: $v_C(0_+) = 20\,\mathrm{V}$ ، $v_0(t) = 8e^{-\frac{t}{0.5}}\,\mathrm{V}$ ، $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$

مشق 7.2: شکل 7.9 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔برق گیر پر ابتدائی دباو دریافت کرتے ہوئے $v_0(t)$ دریافت کریں۔

شکل 7.9: مشق 7.2 کا دور۔

شکل 7.10: مشق 7.3 کا دور۔

جوابات: $v_0(0_+) = \frac{80}{7}\,\mathrm{V}$ ، $v_0(t) = 32 - \frac{144}{7}e^{-\frac{100t}{7}}\,\mathrm{V}$

مشق 7.3: شکل 7.10 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔امالہ گیر میں ابتدائی رو دریافت کرتے ہوئے $i_L(t)$ دریافت کریں۔دور کا وقتی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: $i_L(0_+) = 1.25\,\mathrm{A}$ ، $i_L(t) = 1.25e^{-3000t}\,\mathrm{A}$ ، $\tau = \frac{1}{3}\,\mathrm{ms}$

مثال 7.5: شکل 7.11 میں ازل سے چالو سوئچ لمحہ $t = 2\,\mathrm{s}$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل: سوئچ منقطع کرنے سے فوراً پہلے کی صورت حال شکل-ب میں دکھائی گئی ہے۔چونکہ ازل سے سوئچ چالو تھا لہٰذا دور برقرار حالت میں ہو گا اور یوں برق گیر کو کھلا دور تصور کیا جائے گا۔شکل-ب کو دیکھ کر

$$i(t < 2\,\mathrm{s}) = \frac{20}{4000 + 6000} = 2\,\mathrm{mA}$$

اور

$$v_C(2_-) = v_C(2_+) = 20\left(\frac{4000}{4000 + 6000}\right) = 8\,\mathrm{V}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سوئچ منقطع ہونے کے بعد کی صورت حال شکل-الف میں دی گئی ہے۔جوڑ $v(t)$ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہوئے

$$\frac{v(t) - 10}{2000 + 4000} + 5 \times 10^{-6}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v(t) - 20}{6000} = 0$$

ترتیب دینے سے

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{200}{3}v(t) = 1000$$

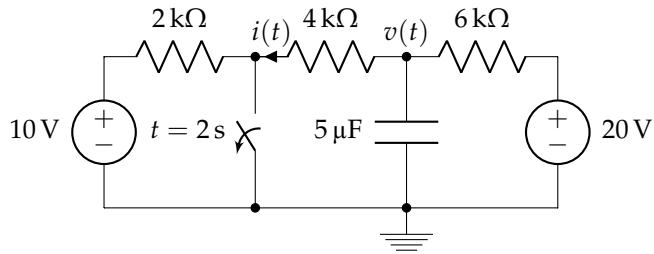
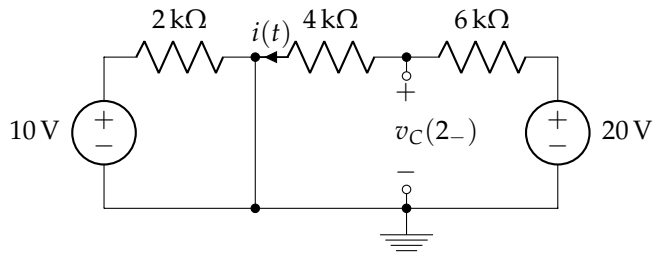
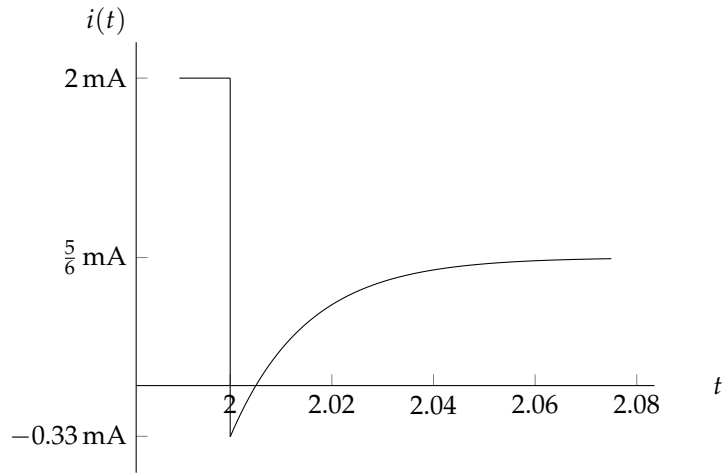
حاصل ہوتا ہے۔اس کے جبری اور فطری حل درج ذیل ہیں

$$v_J(t) = K_1 = 15\,\mathrm{V}$$
$$v_F(t) = K_2 e^{-\frac{200}{3}t}$$

جن کا مجموعہ عمومی حل

$$v(t > 2) = 15 + K_2 e^{-\frac{200}{3}t}$$

دیتا ہے۔ابتدائی معلومات $v(2_+) = 8\,\mathrm{V}$ لمحہ $t = 2\,\mathrm{s}$ پر ہم جانتے ہیں جنہیں درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$8 = 15 + K_2 e^{-\frac{200}{3}\times 2}$$

شکل 7.11: مثال 7.5 کے اشکال۔

K_2 کی قیمت درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$K_2 = -7e^{\frac{400}{3}}$$

یوں مخصوص حل درج ذیل ہو گا۔

$$v(t > 2) = 15 - 7e^{\frac{200}{3}(2-t)}$$

اب شکل-الف کو دیکھ کر

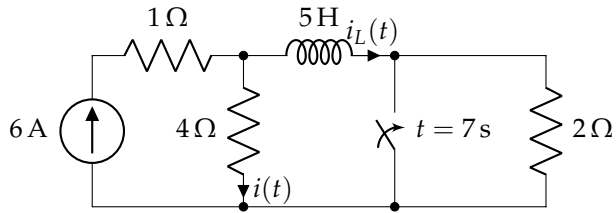
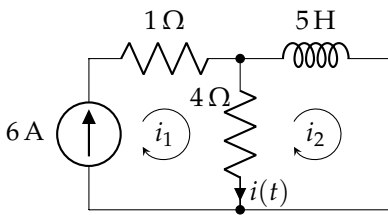
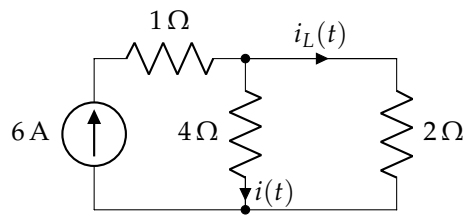
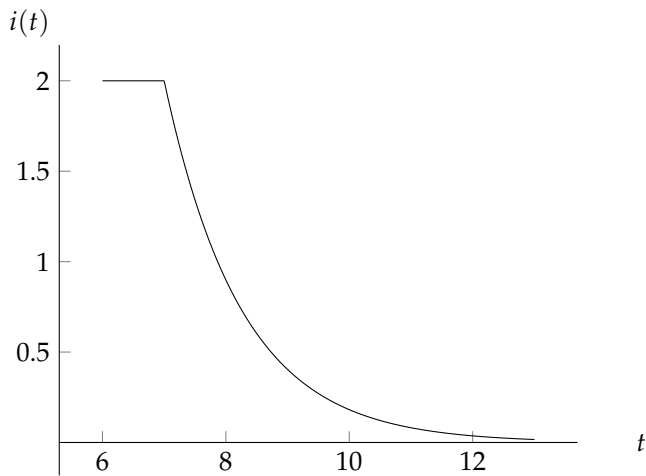
$$\begin{aligned} i(t > 2) &= \frac{v(t > 2) - 10}{6000} \\ &= \frac{5}{6} - \frac{7}{6}e^{\frac{200}{3}(2-t)}\,\text{mA} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جو درکار مساوات ہے۔یوں سوئچ منقطع کرنے سے پہلے اور اس کے بعد کے جوابات سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$i(t) = \begin{cases} 2\,\text{mA} & t < 2\,\text{s} \\ \frac{5}{6} - \frac{7}{6}e^{\frac{200}{3}(2-t)}\,\text{mA} & t > 2\,\text{s} \end{cases}$$

جسے شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوئچ منقطع کرنے سے پہلے برقرار رو $2\,\text{mA}$ تھی جبکہ سوئچ منقطع کرنے کے بعد برقرار حالت $(t \to \infty)$ میں رو $\frac{5}{6}\,\text{mA}$ ہے۔یاد رہے کہ برق گیر کا دباو فوراً تبدیل نہیں ہو سکتا البتہ اس میں رو یک دم تبدیل ہو سکتی ہے۔

وقت $t \to \infty$ پر دور برقرار حالت اختیار کر چکا ہو گا لہٰذا برق گیر کو کھلا دور کرتے ہوئے شکل 7.11-الف سے برقرار حالت رو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$i(t \to \infty) = \frac{20 - 10}{2000 + 4000 + 6000} = \frac{5}{6}\,\text{mA}$$

شکل 7.12: مثال 7.6 کے اشکال۔

مثال 7.6: شکل 7.12-الف میں ازل سے منقطع سوئچ لمحہ $t = 7\,\mathrm{s}$ پر چالو کیا جاتا ہے۔رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل:منقطع سوئچ کی صورت میں دور برقرار حالت میں ہو گا لہٰذا امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل کی گئی ہے۔ تقسیم رو کے کلیے سے

$$i_L(7_-) = i_L(7_+) = 6\left(\frac{4}{4+2}\right) = 4\,\mathrm{A}$$

اور

$$i(t) = 6\,\mathrm{A} - i_L(t) = 6 - 4 = 2\,\mathrm{A} \qquad (t < 7\,\mathrm{s}) \tag{7.24}$$

لکھا جا سکتا ہے۔سوئچ چالو کرنے کے بعد کی صورت حال شکل-پ میں دکھائی گئی ہے جہاں سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i_1 = 6\,\mathrm{A}$$
$$5\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 4(i_2 - i_1) = 0$$

ان مساوات کو ملاتے ہوئے

$$5\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 4(i_2 - 6) = 0$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{4}{5}i_2 = \frac{24}{5}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$i_2 = 6 + K_2 e^{-\frac{4}{5}t}$$

چونکہ i_2 درحقیقت i_L ہی ہے لہٰذا نامعلوم مستقل K_2 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کرتے ہیں۔درج بالا مساوات میں $t = 7\,\mathrm{s}$ پر $i_L(7_+) = 4\,\mathrm{A}$ پُر کرتے ہوئے

$$4 = 6 + K_2 e^{-\frac{4}{5}\times 7}$$

سے

$$K_2 = -2e^{\frac{4}{5}\times 7}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں سوئچ چالو کرنے کے بعد i_2 کا مخصوص حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i_2 = 6 - 2e^{\frac{4}{5}(7-t)}$$

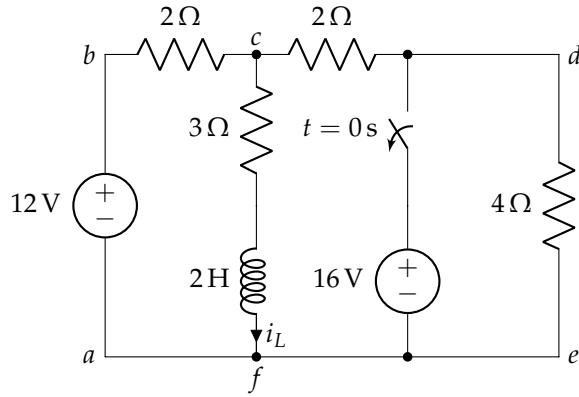
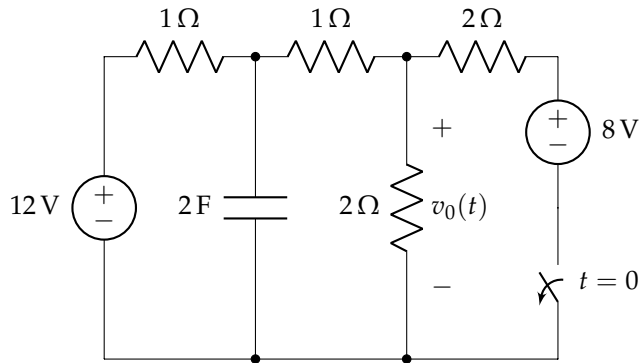
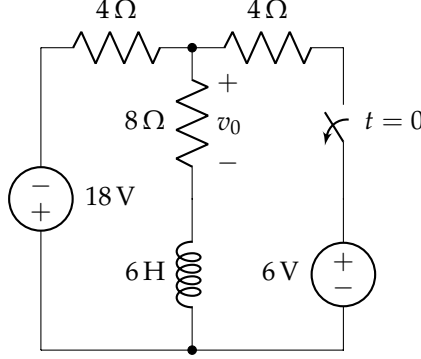
اب شکل-پ کو دیکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1 - i_2 \\ &= 6 - \left(6 - 2^{\frac{4}{5}(7-t)}\right) \\ &= 2e^{\frac{4}{5}(7-t)} \qquad (t > 7\,\mathrm{s}) \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ازل سے ابد تک $i(t)$ کو مساوات 7.24 اور درج بالا مساوات پیش کرتے ہیں۔انہیں اکٹھے لکھتے اور شکل-ت میں پیش کرتے ہیں۔

$$i(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{A} & t < 7\,\mathrm{s} \\ 2e^{\frac{4}{5}(7-t)}\,\mathrm{A} & t > 7\,\mathrm{s} \end{cases} \tag{7.25}$$

مشق 7.4: شکل 7.13 میں ابتدائی حالت $i_L(0_+)$ دریافت کریں۔دائرہ $abcfa$ میں i_1 اور $abdea$ میں i_2 لیتے ہوئے کرخوف مساوات دباو لکھیں۔ان مساوات سے صرف i_1 پر مبنی مساوات حاصل کریں۔یوں ازل سے ابد تک i_L دریافت کریں۔

جوابات: $i_L(0_+) = 3.5\,\mathrm{A}$ ، $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + 2.25 i_1 = 4.5$ ، $i_L(t > 0) = 2 + 1.5e^{-2.25t}\,\mathrm{A}$

شکل 7.13: مشق 7.4 کا دور۔

شکل 7.14: مشق 7.5 کا دور۔

شکل 7.15: مشق 7.6 کا دور۔

مشق 7.5: شکل 7.14 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

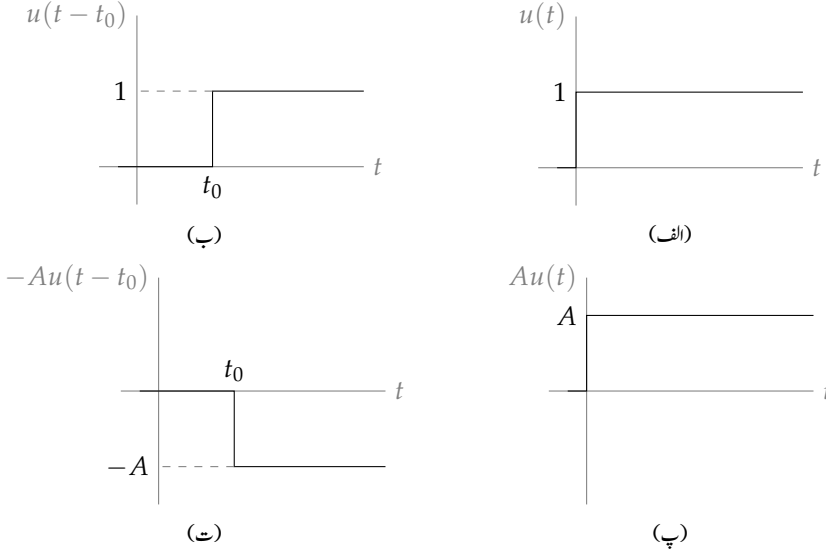
جوابات: $v_0(t) = \frac{24}{5} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{8}t}\,\text{V}$

مشق 7.6: شکل 7.15 میں سوئچ منقطع کرنے کے بعد v_0 حاصل کریں۔

جوابات: $v_0 = -12 + \frac{9}{2}e^{-2t}\,\text{V}$

7.3 دھڑکن

گزشتہ حصے میں سوئچ کو چالو یا منقطع کرتے ہوئے ادوار میں یکدم تبدیلی پیدا کی گئی۔ فوراً تبدیلی پیدا کرنے والے دو عدد تفاعل نہایت اہم ہیں۔ انہیں **اکائی سیڑھی تفاعل**[21] اور **اکائی جھٹکا تفاعل**[22] کہتے ہیں۔ آئیں اکائی سیڑھی تفاعل پر غور کریں۔

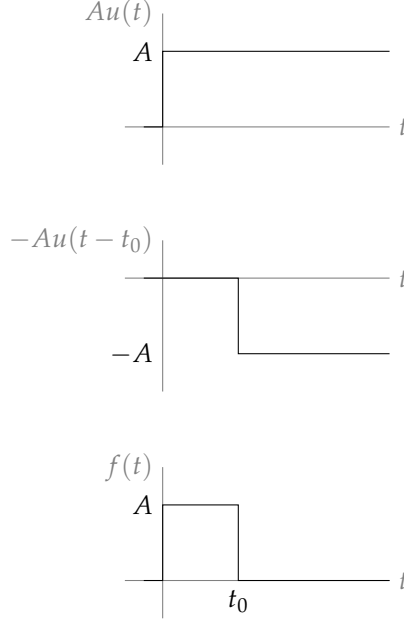
[21] unit step function
[22] unit impulse function

شکل 7.16: اکائی سیڑھی تفاعل۔

اکائی سیڑھی تفاعل $u(t)$ کی الجبرائی تعریف درج ذیل ہے۔

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{7.26}$$

اکائی سیڑھی تفاعل بے بعد[23] ہے جو منفی t کی صورت میں صفر کے برابر جبکہ مثبت t کی صورت میں اکائی کے برابر ہے۔ شکل 7.16-الف میں اکائی سیڑھی تفاعل کو دکھایا گیا ہے۔ اکائی سیڑھی تفاعل کے متغیرہ کو $t - t_0$ لکھتے ہوئے شکل 7.16-ب حاصل ہوتا ہے جو افقی محدد پر t_0 دائیں منتقل اکائی سیڑھی تفاعل $u(t-t_0)$ ہے۔ یہ تفاعل منفی $t - t_0$ کی صورت میں صفر کے برابر ہے جبکہ مثبت $t - t_0$ کی صورت میں یہ اکائی کے برابر ہے۔ اکائی سیڑھی تفاعل کو V_0 وولٹ کے دباو سے ضرب دینے سے V_0 وولٹ کا سیڑھی تفاعل حاصل ہو گا جس سے بعد وولٹ V ہے۔ یوں بے بعد سیڑھی تفاعل سے کسی بھی بعد کی سیڑھی تفاعل حاصل کی جا سکتی ہے۔ شکل 7.16-پ میں $Au(t)$ اور شکل 7.16-ت میں $-Au(t-t_0)$ دکھائے گئے ہیں جہاں A از خود مثبت عدد ہے۔

اکائی سیڑھی تفاعل سے مستطیل تفاعل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ عمل شکل 7.17 میں دکھایا گیا ہے جہاں $Au(t)$

[23] dimensionless

شکل 7.17: اکائی سیڑھی تفاعل سے مستطیل تفاعل کا حصول۔

اور $-Au(t-t_0)$ کا مجموعہ

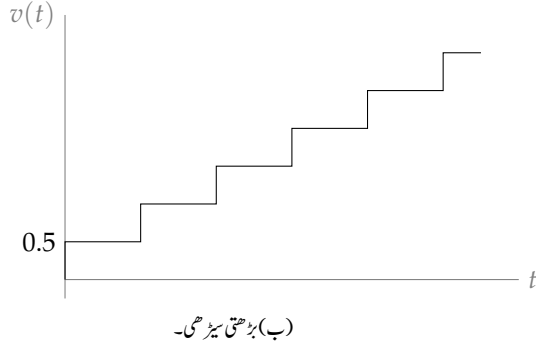
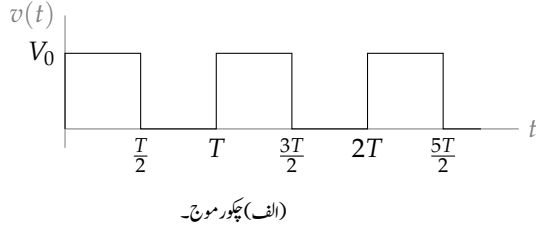
$$f(t) = Au(t) - Au(t-t_0) \tag{7.27}$$

لیتے ہوئے A حیطے کا مستطیل تفاعل حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.7: اکائی سیڑھی تفاعل کے استعمال سے T طول موج اور V_0 حیطے کی چکور موج حاصل کریں۔

حل: شکل 7.17 کی طرز پر متعدد مستطیل اشارات سے ایسی موج حاصل کی جا سکتی ہے۔ایسا کرنے کی خاطر متعدد اکائی سیڑھی تفاعل استعمال کی جائیں گی۔درکار تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$v(t) = V_0 \left[u(t) - u(t-0.5T) + u(t-T) - u(t-1.5T) + u(t-2T) - \cdots \right]$$

(الف) چکور موج۔

(ب) بڑھتی سیڑھی۔

شکل 7.18: اکائی سیڑھی تفاعل سے چکور موج کا حصول۔

جیسے شکل 7.18-الف میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 7.8: اکائی سیڑھی تفاعل سے اوپر جانب بڑھتی سیڑھی تفاعل حاصل کریں۔ سیڑھی کی اونچائی 0.5 رکھیں۔

حل: درج بالا مثال میں اجزاء کو بالترتیب جمع اور منفی کیا گیا۔ یہاں انہیں صرف جمع کیا جاتا ہے یعنی

$$v(t) = 0.5\left[u(t) + u(t-0.5T) + u(t-T) + u(t-1.5T) + u(t-2T) + \cdots\right]$$

جس سے درکار سیڑھی حاصل ہو گی۔ بڑھتی سیڑھی کو شکل 7.18-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 7.9: شکل 7.19-الف میں ایک قطب دو چال کا سوئچ استعمال کیا گیا ہے جو ازل سے دور کو زمین سے ملایا ہوا ہے۔ لمحہ $t = 0\,\mathrm{s}$ پر سوئچ کو پلٹتے ہوئے دور کو منبع دباو کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 30\,\mathrm{ms}$ پر سوئچ کو واپس اپنی حالت میں لاتے ہوئے دور کو ایک بار پھر زمین کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ دباو $v_C(t)$ حاصل کریں۔

حل: سوئچ کو پلٹ کر واپس کرنے سے دور اور منبع $30\,\mathrm{ms}$ کے لئے جڑتے ہیں۔ یوں دور کو اس دورانیے کے لئے $10\,\mathrm{V}$ ملتا ہے۔ شکل-ب میں اس دباو کو دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں سوئچ اور منبع دباو کی جگہ مستطیل دباو پیدا کرنے والا منبع v_p نسب کرنے سے شکل-پ حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_p = 10\left[u(t) - u(t - 30\,\mathrm{ms})\right]$$

کے برابر ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل-پ میں بھی دور کو عین شکل-ب کا دباو مہیا کیا گیا ہے لہٰذا ان دونوں ادوار کے حل میں کوئی فرق نہیں ہو گا۔

ازل سے داخلی دباو صفر کے برابر ہونے کی بنا

$$v_C(0_-) = v_C(0_+) = 0\,\mathrm{V}$$

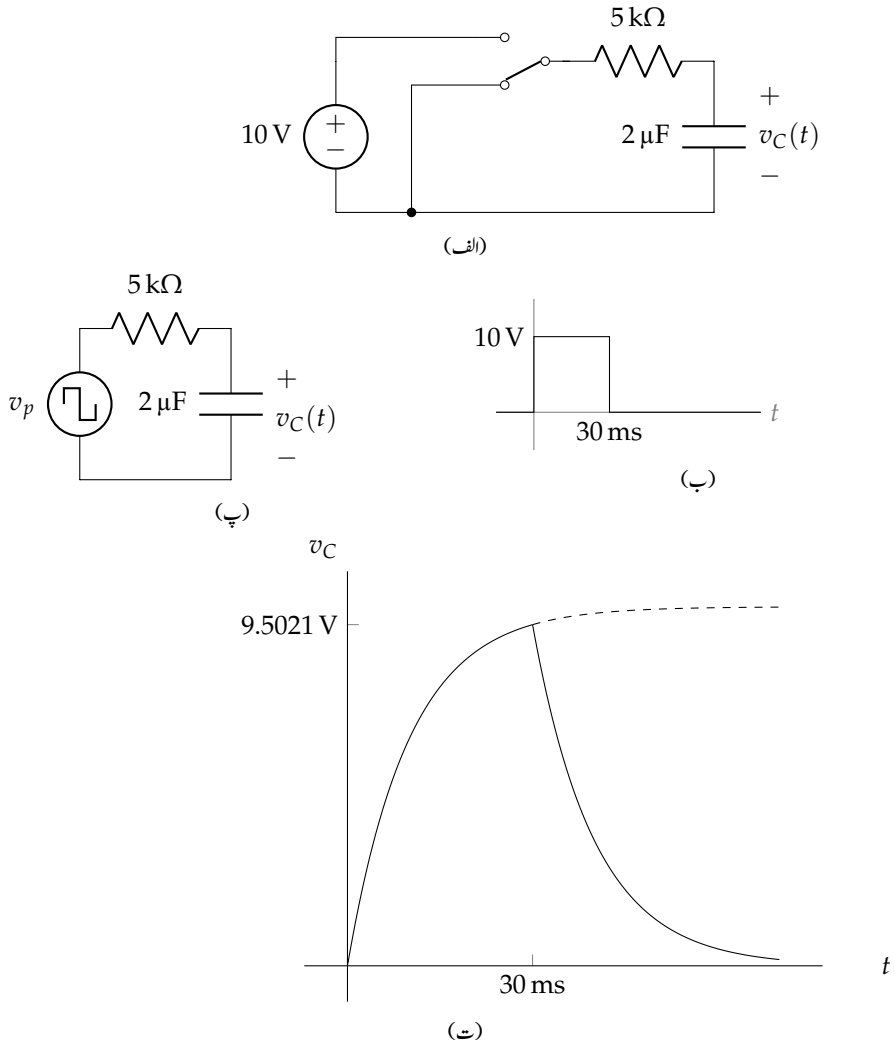
ہو گا۔ دورانیہ $t = 0\,\mathrm{s}$ تا $t = 30\,\mathrm{ms}$ شکل-پ میں داخلی دباو $v_p = 10\,\mathrm{V}$ کے برابر ہے لہٰذا کرخوف مساوات رو درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\frac{v_C - 10}{5000} + 2 \times 10^{-6}\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + 100v_C = 1000$$

لکھا جا سکتا ہے جس کے جبری اور فطری حل درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} v_{C,j} &= K_1 = 10 \\ v_{C,f} &= K_2 e^{-100t} \end{aligned}$$

شکل 7.19: مثال 7.9 کے اشکال۔

یوں عمومی حل درج ذیل لکھا جائے گا

$$v_C(t) = 10 + K_2 e^{-100t} \qquad (0 < t < 30\,\mathrm{ms})$$

جس میں لمحہ $t = 0\,\mathrm{s}$ کے معلومات پُر کرتے

$$0 = 10 + K_2 e^{-100\times 0}$$

ہوئے نا معلوم متغیر کی قیمت $K_2 = -10$ حاصل ہوتی ہے۔یوں عمومی حل درج ذیل ہے۔

$$v_C(t) = 10 - 10e^{-100t} \qquad (0 < t < 30\,\mathrm{ms}) \tag{7.28}$$

لمحہ $t = 30\,\mathrm{ms}$ پر داخلی دباو میں دوبارہ یک دم تبدیلی پائی جاتی ہے لہٰذا اس لمحے کے معلومات اگلے دورانیے کے حل کے لئے درکار ہوں گے۔مساوات 7.28 سے $t = 30\,\mathrm{ms}$ پر $v_C(0.03_-)$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(0.03_-) = v_C(0.03_+) = 10 - 10e^{-100\times 0.03} = 9.5021\,\mathrm{V}$$

اگلے دورانیے یعنی $30\,\mathrm{ms} < t$ کا حل تلاش کرتے ہیں۔اس دورانیے میں داخلی دباو $v_p = 0\,\mathrm{V}$ کے برابر ہے لہٰذا شکل-پ کا کرخوف مساوات رو درج ذیل ہو گا

$$\frac{v_C - 0}{5000} + 2\times 10^{-6}\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

جس کا عمومی حل

$$v_C = K_3 e^{-100t} \qquad (30\,\mathrm{ms} < t)$$

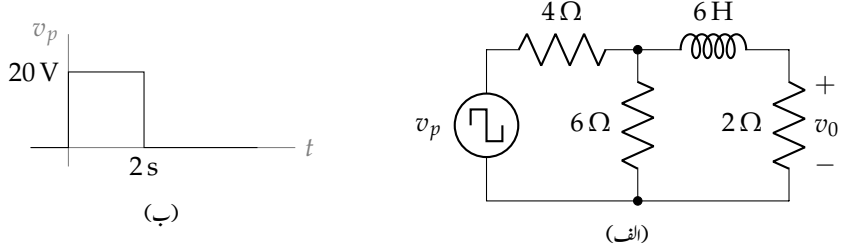
ہے۔اس میں لمحہ $t = 30\,\mathrm{ms}$ پر $V_C(0.03_+)$ پر کرتے ہوئے

$$9.5021 = K_3 e^{-100\times 0.03}$$

نا معلوم متغیرہ $K_3 = 190.8554$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا عمومی حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$v_C = 190.8554e^{-100t} \qquad (30\,\mathrm{ms} < t) \tag{7.29}$$

مساوات 7.28 اور مساوات 7.29 کو اکٹھے لکھتے ہوئے اس کا خط

$$v_C = \begin{cases} 10 - 10e^{-100t} & 0 < t < 30\,\mathrm{ms} \\ 190.8554e^{-100t} & 30\,\mathrm{ms} < t \end{cases} \tag{7.30}$$

شکل 7.20: مشق 7.7 کے اشکال۔

شکل-ت میں کھینچتے ہیں۔

اگر لمحہ $t = 30\,\text{ms}$ اور اس کے بعد بھی داخلی دباو $10\,\text{V}$ پر برقرار رہتا تب v_C نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے $10\,\text{V}$ تک جا پہنچتا۔

مشق 7.7: شکل 7.20-الف کو شکل 7.20-ب کا داخلی دباو مہیا کیا جاتا ہے۔ دباو v_0 دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t<0) = 0\,\text{V}$ ، $v_0(0<t<2) = \frac{30}{29}\left(1-e^{-\frac{29}{15}t}\right)$ ، $v_0(2<t) = 8.78074e^{-\frac{11}{15}t}$

7.4 دو رتبی ادوار

شکل 7.21-الف میں R ، L اور C متوازی منبع رو $i_S(t)$ کے ساتھ جڑے ہیں جبکہ شکل-ب میں منبع دباو کے ساتھ تینوں پرزے سلسلہ وار جڑے ہیں۔ شکل-الف کی کرخوف مساوات رو اور شکل-ب کی کرخوف مساوات دباو بالترتیب درج ذیل ہیں۔

$$\frac{v(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(t)\,\mathrm{d}t+i_L(t_0)+C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=i_S(t)$$
$$i(t)R+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(t)\,\mathrm{d}t+v_C(t_0)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=v_S(t)$$

یہ مساوات یکساں صورت رکھتے ہیں لہٰذا ان کا حل بالکل یکساں ہو گا۔ان مساوات کا تفرق لے کر ترتیب دینے سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

$$C\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v(t)}{L}=\frac{\mathrm{d}i_S(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$L\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{i(t)}{C}=\frac{\mathrm{d}v_S(t)}{\mathrm{d}t}$$

آپ نے دیکھا کہ دونوں مساوات میں تفرقی جزو کے عددی سر، مستقل مقدار ہیں۔آئیں مستقل عددی سر کے دو رتبی تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔

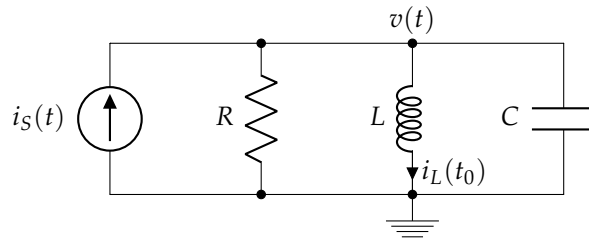
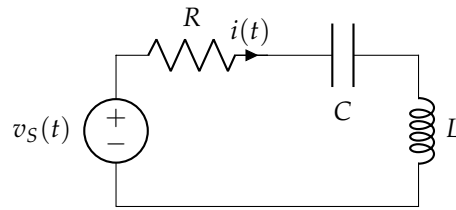
مستقل عددی سر کے دو رتبی تفرقی مساوات کی عمومی صورت درج ذیل ہے جہاں دو رتبی تفرق کے عددی سر کو اکائی برابر رکھا گیا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_2y(t)=f(t) \tag{7.31}$$

یک رتبی مساوات کے حل کی طرح یہاں بھی اگر مساوات 7.31 کا جبری حل $y_j(t)$ ہو اور درج ذیل متجانس مساوات کا فطری حل $y_f(t)$ ہو

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_2y(t)=0 \tag{7.32}$$

تب مساوات 7.31 کا عمومی حل

$$y(t)=y_j(t)+y_f(t) \tag{7.33}$$

شکل 7.21: دور تبی ادوار۔

ہو گا۔یاد رہے کہ کسی بھی تفرقی مساوات میں جبری قوت کو صفر $(f(t)=0)$ پُر کرنے سے اس کی متجانس مساوات حاصل ہوتی ہے۔مستقل جبری قوت، یعنی $f(t)=A$ ، کی صورت میں جبری حل بھی مستقل ہو گا جسے K_1 تصور کرتے ہوئے مساوات 7.31 میں پُر کرتے ہوئے

$$y_j(t)=K_1=\frac{A}{a_2} \tag{7.34}$$

حاصل ہوتا ہے۔

متجانس مساوات میں $a_1=2\zeta\omega_0$ اور $a_2=\omega_0^2$ پُر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+2\zeta\omega_0\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2 y(t)=0 \tag{7.35}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ω_0 کو **(بلا تقصیر) قدرتی تعدد**[24] اور ζ کو **تقصیری تناسب**[25] کہا جاتا ہے۔ان کی افادیت جلد سامنے آئے گی۔مساوات 7.35 متجانس مساوات کی عمومی صورت ہے جو طبیعیات کے دیگر شعبوں میں بھی استعمال کی جاتی ہے۔اس مساوات کا فطری حل

$$y_f(t)=Ke^{st}$$

تصور کرتے ہیں۔آئیں اس فطری حل کو متجانس مساوات میں پُر کرتے ہیں۔

$$s^2Ke^{st}+2\zeta\omega_0 sKe^{st}+\omega_0^2Ke^{st}=0$$

اس کو Ke^{st} سے تقسیم کرتے ہوئے

$$s^2+2\zeta\omega_0+\omega_0^2=0 \tag{7.36}$$

حاصل ہوتا ہے جسے **امتیازی مساوات**[26] کہتے ہیں۔اس دو درجی امتیازی مساوات کو s کے لئے حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} s&=\frac{-2\zeta\omega_0\mp\sqrt{4\zeta^2\omega_0^2-4\omega_0^2}}{2}\\ &=-\zeta\omega_0\mp\omega_0\sqrt{\zeta^2-1} \end{aligned} \tag{7.37}$$

---

[24] undamped natural frequency
[25] damping ratio
[26] characteristic equation

مساوات کے جذر[27] حاصل کرتے ہیں۔

$$s_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$
$$s_2 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{7.38}$$

یوں دو فطری حل $K_2 e^{s_1 t}$ اور $K_3 e^{s_2 t}$ ممکن ہیں۔ایسی صورت میں عمومی فطری حل ان کا مجموعہ ہو گا یوں عمومی فطری حل

$$y_f(t) = K_2 e^{s_1 t} + K_3 e^{s_2 t} \tag{7.39}$$

لکھا جائے گا جہاں مستقل K_2 اور K_3 کو ابتدائی معلومات مثلاً $y(0)$ اور $\left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ سے حاصل کیا جاتا ہے۔عمومی حل میں مخصوص ابتدائی معلومات سے حاصل کردہ مستقل پر کرنے سے مخصوص حل[28] ملتا ہے۔

مساوات 7.38 پر غور کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ s_1 اور s_2 کی قیمتوں کا دارومدار ζ کی قیمت پر ہے۔تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں یعنی $\zeta > 1$ ، $\zeta < 1$ اور $\zeta = 1$ جن سے بالترتیب s_1 اور s_2 کی قیمتیں حقیقی اور مختلف، مخلوط اور مختلف، حقیقی اور برابر حاصل ہوتی ہیں۔آئیں ان تینوں صورتوں پر تفصیلاً غور کریں۔

زیادہ مقصور صورت، $\zeta > 1$

زیادہ مقصور صورت[29] میں s_1 اور s_2 کی قیمتیں حقیقی اور آپس میں مختلف حاصل ہوتی ہیں۔زیادہ مقصور حالت $\zeta > 1$ کی صورت میں پائی جاتی ہے۔ایسی صورت میں فطری حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y_f(t) = K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t} + K_3 e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t} \tag{7.40}$$

جو دو عدد، قوت نمائی انحطاطی تفاعل کا مجموعہ ہے۔

کم مقصور صورت، $\zeta < 1$

کم مقصور صورت[30] $\zeta < 1$ میں امتیازی مساوات کے حل، s_1 اور s_2 ، کی قیمتیں مخلوط حاصل ہوتی ہیں جنہیں

---

roots[27]
particular solution[28]
over damped condition[29]
under damped condition[30]

درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma + j\omega_d \\
s_2 &= -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma - j\omega_d
\end{aligned}
\tag{7.41}
$$

جہاں $\zeta\omega_0 = \sigma$ اور $\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d$ لکھے گئے ہیں جبکہ $j = \sqrt{-1}$ ہے۔یوں فطری حل

$$
\begin{aligned}
y_f(t) &= K_2 e^{-\sigma t + j\omega_d t} + K_3 e^{-\sigma t - j\omega_d t} \\
&= e^{-\sigma t}\left[K_2 e^{j\omega_d t} + K_3 e^{-j\omega_d t}\right] \\
&= e^{-\sigma t}\left[K_2(\cos\omega_d t + j\sin\omega_d t) + K_3(\cos\omega_d t - j\sin\omega_d t)\right] \\
&= e^{-\sigma t}\left[(K_2+K_3)\cos\omega_d t + j(K_2-K_3)\sin\omega_d t\right]
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
y_f(t) &= e^{-\sigma t}\left(c_1\cos\omega_d t + c_2\sin\omega_d t\right) \\
&= e^{-\zeta\omega_0 t}\left[c_1\cos\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t + c_2\sin\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t\right]
\end{aligned}
\tag{7.42}
$$

لکھا جائے گا جہاں $K_2 + K_3 = c_1$ اور $j(K_2 - K_3) = c_2$ لکھے گئے ہیں۔فطری حل کے مستقل c_1 اور c_2 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جاتا ہے۔
مساوات 7.42 میں

$$
\begin{aligned}
c_1 &= A\cos\theta \\
c_2 &= A\sin\theta
\end{aligned}
$$

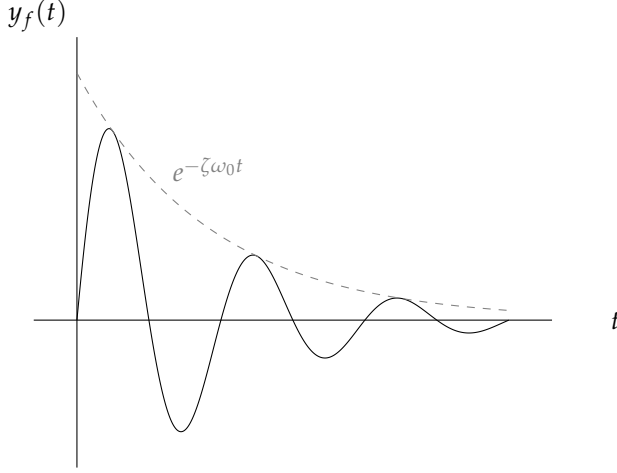
پُر کرتے ہوئے

$$
y_f(t) = e^{-\sigma t}\left(A\cos\theta\cos\omega_d t + A\sin\theta\sin\omega_d t\right)
$$

یعنی

$$
\begin{aligned}
y_f(t) &= Ae^{-\sigma t}\cos(\omega_d t - \theta) \\
&= Ae^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t - \theta)
\end{aligned}
\tag{7.43}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 7.43 کے مستقل A اور θ ہیں جنہیں ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جاتا ہے۔جیسا شکل 7.22 میں دکھایا گیا ہے، مساوات 7.43 قصری ارتعاش[31] کو ظاہر کرتی ہے۔کم قصری مساوات میں $e^{-\zeta\omega_0 t}$ قصری ارتعاش کے غلاف[32] کو ظاہر کرتی ہے جسے شکل میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

[31] damped oscillation
[32] envelope

شکل 7.22: قصری ارتعاش۔

فاصل مقصور صورت، $\zeta = 1$

فاصل مقصور صورت $\zeta = 1$ میں

$$s_1 = s_2 = -\zeta\omega_0 \tag{7.44}$$

حاصل ہوتے ہیں۔جب s_1 اور s_2 کی قیمتیں ایک دونوں کے برابر $(s_1 = s_2)$ ہوں تب عمومی فطری حل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$y_f(t) = K_2 e^{-\zeta\omega_0 t} + K_3 t e^{-\zeta\omega_0 t} \tag{7.45}$$

جہاں دوسرے جزو کو t سے ضرب دیا گیا ہے۔مساوات کے مستقل K_2 اور K_3 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کرتے ہوئے مخصوص حل حاصل کیا جاتا ہے۔

مشق 7.8: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 2\,\Omega$ ، $L = 5\,\mathrm{H}$ اور $C = 4\,\mathrm{F}$ ہیں۔تقصیری تناسب اور غیر تقصیری قدرتی تعدد دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 0.2236\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\zeta = 0.8944$

مشق 7.9: متوازی RLC دور میں $R = 2\,\Omega$ ، $L = 5\,\mathrm{H}$ اور $C = 4\,\mathrm{F}$ ہیں۔ تقصیری تناسب اور غیر تقصیری قدرتی تعدد دریافت کریں۔

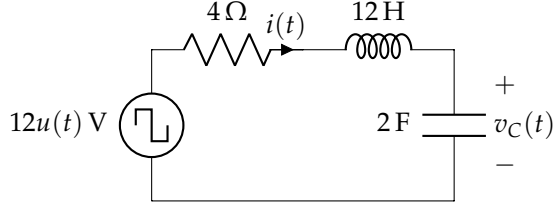
جوابات: $\omega_0 = 0.2236\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\zeta = 0.2795$

مشق 7.10: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 4\,\Omega$ اور $L = 12\,\mathrm{H}$ ہیں۔ دور کا رد عمل $C = 6\,\mathrm{F}$ ، $C = 2\,\mathrm{F}$ اور $C = 3\,\mathrm{F}$ کی صورت میں کیا ہو گا۔

جوابات: زیادہ قصری، کم قصری اور فاصل قصری۔

مثال 7.10: شکل 7.23 میں $v_C(t)$ دریافت کریں جہاں لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $i_L(0) = 2\,\mathrm{A}$ اور $v_C(0) = 4\,\mathrm{V}$ ہیں۔

حل: دور کی کرخوف مساوات لمحہ $t = 0$ کے بعد لکھتے ہیں۔

$$i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t = 12 \tag{7.46}$$

شکل 7.23: مثال 7.10 کا دور۔

اس میں

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$v_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t$$

پُر کرتے ہوئے

$$RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2\,v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + v_C(t) = 12 \tag{7.47}$$

ملتا ہے۔آئیں مساوات 7.47 کو حل کریں۔

دی گئی قیمتوں کو مساوات 7.47 میں پُر کرتے ہوئے ترتیب دینے سے درج ذیل ملتا ہے

$$\frac{\mathrm{d}^2\,v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_C(t)}{24} = \frac{1}{2} \tag{7.48}$$

جس میں جبری تفاعل کو صفر کے برابر پُر کرنے سے متجانس مساوات

$$\frac{\mathrm{d}^2\,v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_C(t)}{24} = 0 \tag{7.49}$$

حاصل ہوتی ہے۔مساوات 7.48 میں جبری تفاعل ایک مستقل مقدار ہے لہٰذا جبری حل کو مستقل $y_j(t) = K_1$ تصور کرتے ہوئے مساوات 7.48 میں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}^2\,K_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t} + \frac{K_1}{24} = \frac{1}{2}$$
$$0 + 0 + \frac{K_1}{24} = \frac{1}{2}$$

حل کرنے سے

$$v_{C,j}(t) = K_1 = 12\,\mathrm{V}$$

ملتا ہے۔یہی جواب شکل 7.23 کو دیکھ کر بھی اخذ کیا جا سکتا ہے جہاں لمحہ $t = 0$ کے بہت دیر بعد، برقرار حالت کی صورت میں برق گیر کو کھلا دور تصور کرتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ برق گیر کا دباو عین داخلی دباو کے برابر ہو گا۔

مساوات 7.49 میں دی گئی متجانس مساوات سے درج ذیل امتیازی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$s^2 + \frac{s}{3} + \frac{1}{24} = 0$$

جس سے $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{24}}$ اور $\zeta = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0.333$ لکھا جا سکتا ہے۔چونکہ $\zeta < 1$ ہے لہٰذا یہ کم قصری مساوات ہے۔امتیازی مساوات کے حل درج ذیل ہیں۔

$$s_1 = -\frac{1}{6} - \frac{j}{6\sqrt{2}}$$
$$s_2 = -\frac{1}{6} + \frac{j}{6\sqrt{2}}$$

ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 7.42 کے تحت فطری حل

$$v_{C,f}(t) = e^{-\frac{t}{6}}\left(c_1\cos\frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{t}{6\sqrt{2}}\right)$$

ہے جہاں $\sigma = \omega_0\zeta = \frac{1}{6}$ اور $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$ استعمال کئے گئے۔یوں عمومی حل درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_{C,j}(t) + v_{C,f}(t) \\ &= 12 + e^{-\frac{t}{6}}\left(c_1\cos\frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{t}{6\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \tag{7.50}$$

جس میں مستقل c_1 اور c_2 معلوم کرنا باقی ہے۔ابتدائی دباو $v_C(0) = 4\,\mathrm{V}$ کو عمومی حل میں پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} 4 &= 12 + e^{-\frac{0}{6}}\left(c_1\cos\frac{0}{6\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{0}{6\sqrt{2}}\right) \\ &= 12 + c_1 \end{aligned}$$

یعنی

$$c_1 = -8 \tag{7.51}$$

ملتا ہے۔ابتدائی رو $i_L(0) = 2\,\mathrm{A}$ کو استعمال کرنے کی خاطر مساوات 7.50 کے دونوں اطراف کو C سے ضرب دیتے ہوئے تفرق لیتے ہیں۔

$$C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{C}{6}e^{-\frac{t}{6}}\left(-8\cos\frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{t}{6\sqrt{2}}\right) + \frac{C}{6\sqrt{2}}e^{-\frac{t}{6}}\left(8\sin\frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2\cos\frac{t}{6\sqrt{2}}\right)$$

اس میں $C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = i_C(t)$ کے برابر ہے لہٰذا

$$i_C(t) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{6}}\left(-8\cos\frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{t}{6\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-\frac{t}{6}}\left(8\sin\frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2\cos\frac{t}{6\sqrt{2}}\right)$$

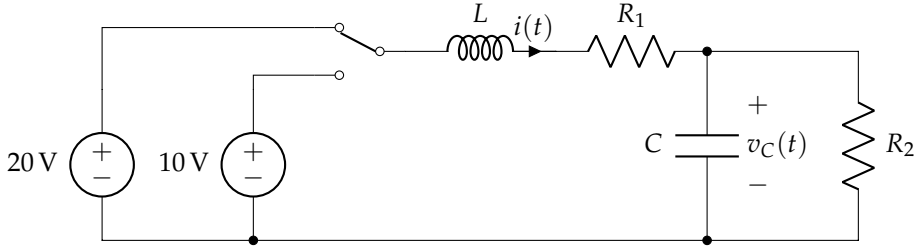
لکھا جا سکتا ہے جہاں بائیں ہاتھ $i_C(t)$ کے برابر ہے اور دائیں ہاتھ $C = 2$ پُر کیا گیا ہے۔چونکہ L اور C سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا $i_C(t) = i_L(t)$ ہو گا۔ درج بالا مساوات میں ابتدائی رو $i_L(0) = i_C(0) = 2\,\mathrm{A}$ پُر کرتے ہوئے

$$2 = -\frac{1}{3}e^{-\frac{0}{6}}\left(-8\cos\frac{0}{6\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{0}{6\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{6}e^{-\frac{0}{6}}\left(8\sin\frac{0}{6\sqrt{2}} + c_2\cos\frac{0}{6\sqrt{2}}\right)$$

یعنی

$$c_2 = -\sqrt{8}$$

ملتا ہے۔مساوات کے مستقل جانتے ہوئے مخصوص حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_C(t) = 12 + e^{-\frac{t}{6}}\left(-8\cos\frac{t}{6\sqrt{2}} - \sqrt{8}\sin\frac{t}{6\sqrt{2}}\right) \tag{7.52}$$

شکل 7.24: مثال 7.11 کا دور۔

اس مساوات سے $t = 0\,\mathrm{s}$ پر $v_C = 4\,\mathrm{V}$ اور $t = \infty$ پر $v_C = 12\,\mathrm{V}$ حاصل ہوتا ہے۔پہلا جواب ابتدائی دباو ہی ہے جبکہ دوسرا جواب ابدی برقرار حالت یعنی جبری حل ہے۔

مثال 7.11: شکل 7.24 میں سوئچ ازل سے دکھائے گئے حالت میں ہے۔لمحہ $t = 0$ پر اس کو پلٹایا جاتا ہے۔دور کا رد عمل $R_1 = 15\,\Omega$ ، $R_2 = 5\,\Omega$ ، $L = 2\,\mathrm{H}$ اور $C = 0.5\,\mathrm{F}$ کی صورت میں معلوم کریں۔

حل: لمحہ $t = 0\,\mathrm{s}$ کے بعد دور کے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$L\frac{\mathrm{d}i_(t)}{\mathrm{d}t} + R_1 i_(t) + v_C(t) = 10$$

$$C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_C(t)}{R_2} = i(t)$$

نچلی مساوات کی رو کو بالائی مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$L\left[C\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R_2}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}\right] + R_1\left[C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_C(t)}{R_2}\right] + v_C(t) = 10$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left[\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L}\right]\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{R_2 LC}v_C(t) = \frac{10}{LC}$$

ملتا ہے۔پرزوں کی قیمتیں پُر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+7.9\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+3v_C(t)=10 \tag{7.53}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $\omega_0=\sqrt{3}$ اور $\zeta=2.28$ ملتے ہیں۔چونکہ $\zeta>1$ ہے لہٰذا دور زیادہ قصری ہے۔مستقل جبری قوت کی بنا $v_{C,j}(t)=K_1$ متوقع ہے جسے مندرجہ بالا مساوات میں پُر کرنے سے

$$v_{C,j}=\frac{10}{3}\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.53 میں جبری قوت کو صفر پُر کرنے، یعنی دائیں ہاتھ کو صفر کے برابر پُر کرنے، سے درج ذیل متجانس مساوات حاصل ہو گی

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+7.9\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}+3v_C(t)=0$$

جس کا متوقع حل $v_{C,f}=e^{st}$ ہے۔متوقع حل کو متجانس مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$s^2e^{st}+7.9se^{st}+3e^{st}=0$$

حاصل ہوتا ہے جس کے دونوں اطراف کو e^{st} سے تقسیم کرنے سے درج ذیل امتیازی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$s^2+7.9s+3=0$$

جس کے حل

$$\begin{aligned}
s_1&=\frac{-1-\sqrt{7.9^2-4\times3}}{2}=-7.5\\
s_2&=\frac{-1+\sqrt{7.9^2-4\times3}}{2}=-0.4
\end{aligned}$$

ہیں۔یوں فطری حل درج ذیل ہو گا

$$v_{C,f}=c_1e^{-7.5t}+c_2e^{-0.4t}$$

اور عمومی حل

$$\begin{aligned}
v_C(t)&=v_{C,j}(t)+v_{C,f}(t)\\
&=\frac{10}{3}+c_1e^{-7.5t}+c_2e^{-0.4t}
\end{aligned} \tag{7.54}$$

ہو گا۔

مساوات کے مستقل حاصل کرنے کے لئے ابتدائی معلومات درکار ہیں۔ لمحہ $t=0$ سے پہلے $20\,\mathrm{V}$ کی منبع دور کو طاقت فراہم کر رہی تھی۔ اس برقرار صورت میں برق گیر کو کھلا دور اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
v_C(0_-) &= v_C(0_+) = 20\left(\frac{5000}{15000+5000}\right) = 5\,\mathrm{V}\\
i(0_-) &= i(0_+) = \frac{20-v_C}{R_1} = \frac{20-5}{15000} = 1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

ملتے ہیں۔ ابتدائی دباو کو مساوات 7.54 میں پُر کرتے ہوئے

$$
5 = \frac{10}{3} + c_1 e^{-7.5\times 0} + c_2 e^{-0.4\times 0}
$$

یعنی

$$
c_1 + c_2 = \frac{5}{3} \tag{7.55}
$$

ملتا ہے۔

مساوات 7.54 کو C سے ضرب دے کر اس کا تفرق لیتے ہوئے

$$
C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0 - 0.5\times 7.5 c_1 e^{-7.5t} - 0.5\times 0.4 c_2 e^{-0.4t}
$$

یعنی

$$
i_C(t) = -3.75 c_1 e^{-7.5t} - 0.2 c_2 e^{-0.4t}
$$

ملتا ہے۔ لمحہ $t=0_+$ پر برق گیر کی رو درج بالا مساوات سے

$$
\begin{aligned}
i_C(0_+) &= -3.75 c_1 e^{-7.5\times 0} - 0.2 c_2 e^{-0.4\times 0}\\
&= -3.75 c_1 - 0.2 c_2
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ اسی لمحے پر R_2 کی رو درج ذیل ہو گی۔

$$
i_{R2}(0_+) = \frac{v_C(0_+)}{R_2} = \frac{5}{5000} = 1\,\mathrm{mA}
$$

چونکہ $i_L(t) = i(t)$ ہی ہے لہٰذا کرخوف مساوات رو کے تحت

$$\begin{aligned} i_L(0+) &= i_C(0+) + i_{R2}(0_+) \\ 0.001 &= 0.001 - 3.75c_1 - 0.2c_2 \end{aligned}$$

یعنی

$$c_1 + c_2 = 0 \tag{7.56}$$

ہو گا۔مساوت 7.55 اور مساوات 7.56 ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{20}{213} \\ c_2 &= \frac{125}{71} \end{aligned}$$

یوں مخصوص حل درج ذیل ہے۔

$$v_C(t) = \frac{10}{3} - \frac{20}{213}e^{-7.5t} + \frac{125}{71}e^{-0.4t} \tag{7.57}$$

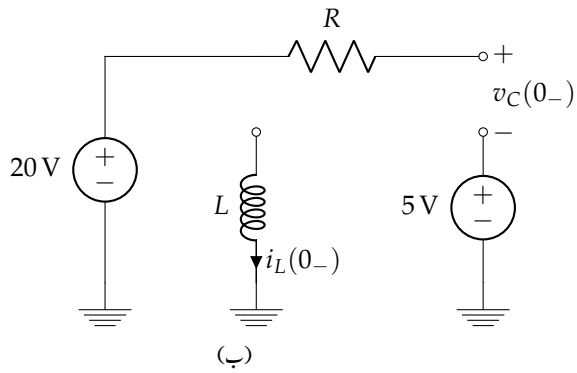
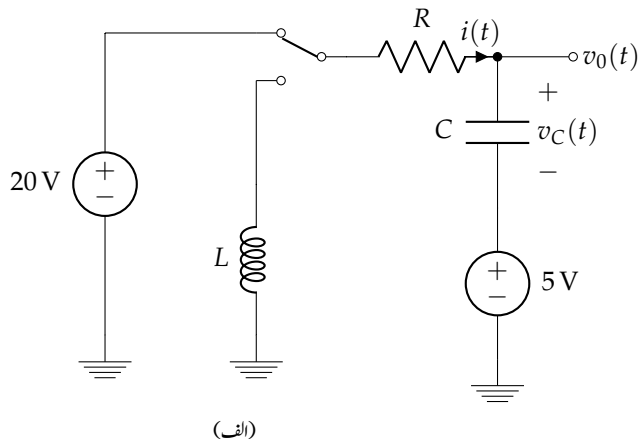
یہ مساوات $t = 0_+$ پر متوقع جوابات $v_C(0_+) = 5\,\mathrm{V}$ اور $t = \infty$ پر $v_C(\infty) = \frac{10}{3}\,\mathrm{V}$ دیتی ہے۔

مثال 7.12: شکل 7.25 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ کو امالہ گیر پر لے جایا جاتا ہے۔ $v_0(t)$ دریافت کریں۔پرزوں کی قیمتیں $R = 20\,\Omega$ ، $C = 0.04\,\mathrm{F}$ اور $L = 4\,\mathrm{H}$ ہیں۔

حل:سوئچ امالہ پر کرنے کے بعد کرخوف مساوات لکھتے ہیں

$$v_C(t) + Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + 5 = 0$$

جہاں

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

شکل 7.25: مثال 7.12 کا دور۔

کے برابر ہے۔درج بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے

$$v_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + 5 = 0$$

ملتا ہے جسے ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{v_C(t)}{LC} = -\frac{5}{LC}$$

پرزوں کی قیمتیں پُر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + 6.25v_C(t) = -31.25$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $\omega_0 = 2.5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\zeta = 1$ ، جبری حل

$$v_{C,j} = K_1 = -5\,\mathrm{V}$$

اور متجانس مساوات درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} + 6.25v_C(t) = 0$$

متجانس مساوات میں e^{st} پُر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کیا جا سکتا ہے

$$s^2 + 5s + 6.25 = 0 \tag{7.58}$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$s_1 = s_2 = -2.5$$

$\zeta = 1$ کے تحت دور فاصل قصری ہے اور $s_1 = s_2$ ہی متوقع تھا۔ فاصل قصری مساوات کا فطری حل درج ذیل ہے۔

$$v_{C,f}(t) = c_1e^{-2.5t} + c_2te^{-2.5t}$$

یوں عمومی حل

$$v_C(t) = -5 + (c_1 + tc_2)e^{-2.5t} \tag{7.59}$$

ہو گا۔ عمومی حل کے مستقل ابتدائی معلومات سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔ ابتدائی معلومات سوئچ ہلانے سے پہلے برقرار حال سے ملتی ہیں۔ لمحہ $t=0$ سے پہلے برقرار صورت میں برق گیر کو کھلا دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب ملتا ہے جہاں سے

$$\begin{aligned} v_C(0_-) &= v_C(0_+) = 20 - 5 = 15\,\text{V} \\ i_L(0_-) &= i_L(0_+) = 0\,\text{A} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 7.59 میں $t=0$ پر $v_C(0_+)$ پُر کرنے

$$15 = -5 + (c_1 + 0 \times c_2)e^{-2.5\times 0}$$

سے

$$c_1 = 20$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.59 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= 0.04 \times (-2.5c_1 + c_2 - 2.5tc_2)e^{-2.5t} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ لمحہ $t=0$ کے بعد شکل-الف کو دیکھتے ہوئے $i_L(t) = -i(t)$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں امالہ گیر کی ابتدائی رو سے لمحہ $t=0_+$ پر $i(0_+) = -i_L(0_+) = 0$ کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے

$$= 0.04 \times (-2.5c_1 + c_2 - 2.5 \times 0 \times c_2)e^{-2.5\times 0}$$

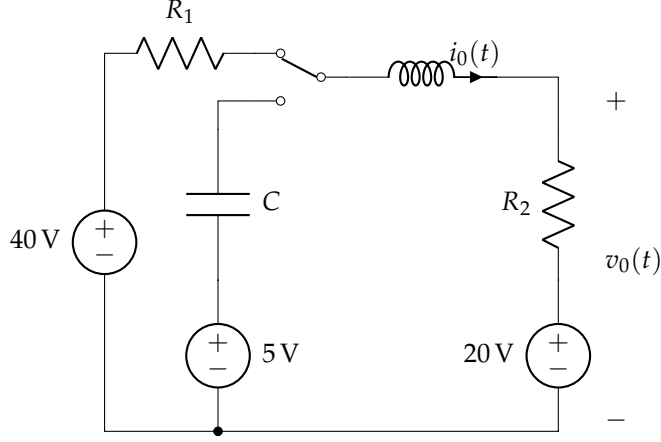
ہوئے

$$c_2 = 50$$

ملتا ہے۔ یوں مخصوص حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_{C,j}(t) + v_{C,f}(t) \\ &= -5 + (20 + 50t)e^{-2.5t}\,\text{V} \end{aligned}$$

ہمیں $v_0(t)$ درکار ہے جسے شکل-الف سے دیکھ کر لکھتے ہیں۔

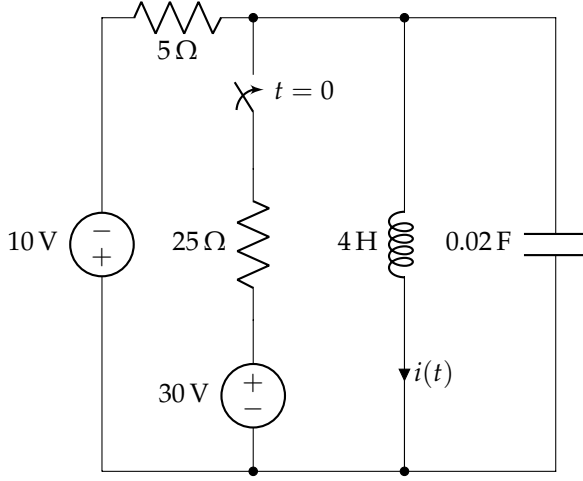
$$v_0(t) = 5 + v_C(t) = (20 + 50t)e^{-2.5t}\,\text{V} \tag{7.60}$$

شکل 7.26: مشق 7.11 کا دور۔

مشق 7.11: شکل 7.26 میں $v_0(t)$ دریافت کریں۔پرزوں کی قیمتیں $R_1 = 8\,\Omega$ ، $R_2 = 22\,\Omega$ ، $L = 4\,\mathrm{H}$ اور $C = 0.04\,\mathrm{F}$ ہیں۔

جوابات: $i_0(t) = 2.77e^{-3.8964t} - 2.103e^{-1.6043t}$ ، $v_0(t) = 20 + i_0(t)R_2$

مشق 7.12: شکل 7.27 میں سوئچ چالو کرنے کے بعد $i(t)$ دریافت کریں۔

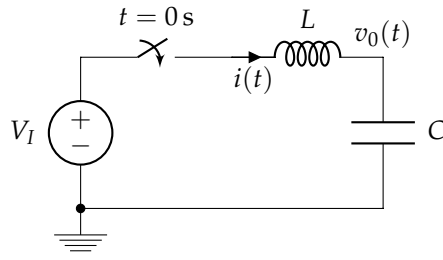
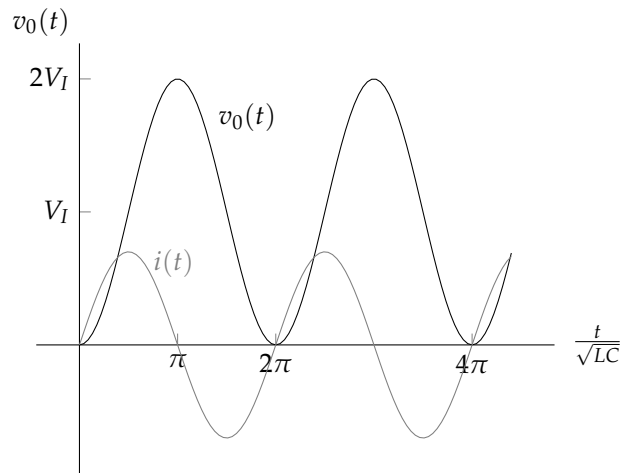
جواب: $i(t) = 3 + 1.3035e^{-17.071t} - 6.035e^{-2.9289t}$

آئیں عارضی رد عمل کے چند دلچسپ مثال دیکھیں۔

شکل 7.27: مشق 7.12 کا دور۔

مثال 7.13: صفحہ 380 پر مثال 7.1 میں سلسلہ وار جڑے مزاحمت اور بے بار برق گیر کو لمحہ $t=0$ پر V_I وولٹ کے منبع دباو کے ساتھ جوڑا گیا۔ برق گیر پر دباو صفر وولٹ سے بڑھتے بڑھتے آخر کار V_I تک پہنچتی ہے۔ اس دور میں مزاحمت کی قیمت کم کرنے سے ابتدائی رو کی قیمت بڑھتی ہے حتٰی کہ $R=0\,\Omega$ کی صورت میں، توقع کے عین مطابق، لامحدود قیمت کی ابتدائی رو حاصل ہوتی ہے۔ حقیقی ادوار میں مزاحمت کو بالکل صفر اوہم کرنا ناممکن ہوتا ہے لہٰذا حقیقت میں لامحدود رو کی بجائے انتہائی زیادہ رو پائی جائے گی جو یا تو سوئچ کو اور یا برق گیر کو تباہ کر دے گی۔

آئیں مزاحمت کی جگہ امالہ گیر نسب کرتے ہوئے صورت حال دیکھیں۔ شکل 7.28-الف میں بے بار برق گیر کے ساتھ امالہ گیر سلسلہ وار جڑا ہے۔ لمحہ $t=0$ پر انہیں مستقل منبع دباو V_I کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: سوئچ چالو کرنے سے پہلے برق گیر بے بار ہے لہٰذا اس پر دباو بھی صفر وولٹ ہو گا۔ اسی طرح امالہ گیر کی ابتدائی رو صفر ہے۔

$$\begin{aligned} v_C(0_+) &= 0\,\mathrm{V} \\ i_L(0_+) &= 0\,\mathrm{A} \end{aligned} \tag{7.61}$$

(الف)

(ب)

شکل 7.28: مثال 7.13 کا اشکال۔

سوئچ چالو کرنے کے بعد کی کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t+v_C(0_+)=V_I \tag{7.62}$$

مساوات 7.61 کے ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم دیگر ابتدائی معلومات درج بالا مساوات سے حاصل کر سکتے ہیں۔ لمحہ $t=0_+$ یعنی سوئچ چالو کرنے کے فوراً بعد، درج بالا مساوات میں ابتدائی معلومات پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}L\frac{\mathrm{d}i(0_+)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\int_0^{0_+} i(t)\,\mathrm{d}t+v_C(0_+)&=V_I\\ L\frac{\mathrm{d}i(0_+)}{\mathrm{d}t}+0+0+0&=V_I\end{aligned}$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}i(0_+)}{\mathrm{d}t}=\frac{V_I}{L} \tag{7.63}$$

حاصل ہوتا ہے جو ابتدائی شرح رو ہے۔یہی جواب، $v_C(0_+)=0\,\mathrm{V}$ تصور کرتے ہوئے، شکل 7.28 کو دیکھ کر لکھا جا سکتا ہے۔

مساوات 7.62 میں تکمل کا نشان ختم کرنے کی خاطر تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{i}{LC}=0$$

تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے جس سے جبری حل

$$i_J(t)=K_1=0$$

حاصل ہوتا ہے۔ تفرقی مساوات سے درج ذیل امتیازی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$s^2+\frac{1}{LC}=0$$

جس کے حل درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}s_1&=\frac{j}{\sqrt{LC}}\\ s_2&=-\frac{j}{\sqrt{LC}}\end{aligned}$$

یوں فطری حل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
i_F(t) &= Ae^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}} + Be^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}\\
&= (A+B)\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + j(A-B)\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}\\
&= c_1\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + c_2\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}
\end{aligned}$$

عمومی حل

$$i(t) = i_J(t) + i_F(t) = c_1\cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + c_2\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

ہو گا۔مساوات کے مستقل ابتدائی معلومات سے حاصل کئے جاتے ہیں۔لمحہ $t = 0_+$ پر $i(0_+) = i_L(0_+) = 0$ پُر کرتے ہوئے $c_1 = 0$ حاصل ہوتا ہے۔درج بالا مساوات میں $c_1 = 0$ پُر کرتے ہوئے تفرق لیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{c_2}{\sqrt{LC}}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

ابتدائی $\frac{\mathrm{d}i(0_+)}{\mathrm{d}t}$ پُر کرنے سے

$$\frac{V_I}{L} = \frac{c_2}{\sqrt{LC}}\cos\frac{0}{\sqrt{LC}}$$

مستقل کی قیمت $c_2 = V_I\sqrt{\frac{C}{L}}$ حاصل ہوتی ہے۔یوں مخصوص حل درج ذیل ہے۔

$$i(t) = V_I\sqrt{\frac{C}{L}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}} \tag{7.64}$$

اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے برق گیر پر دباو $v_0(t)$ درج ذیل مساوات

$$v_0 = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + v_C(0_+)$$

سے

$$v_0 = V_I\left(1 - \cos\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \tag{7.65}$$

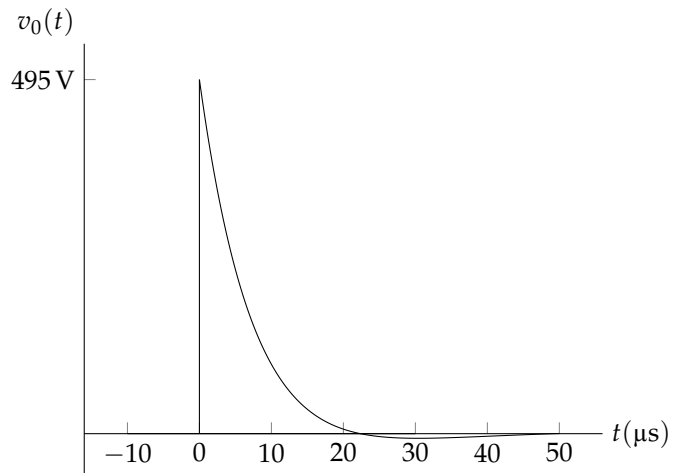
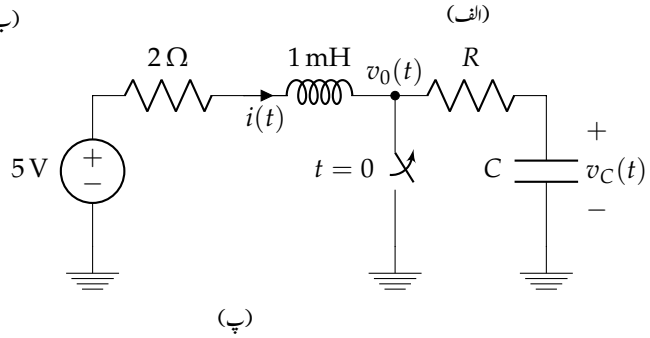
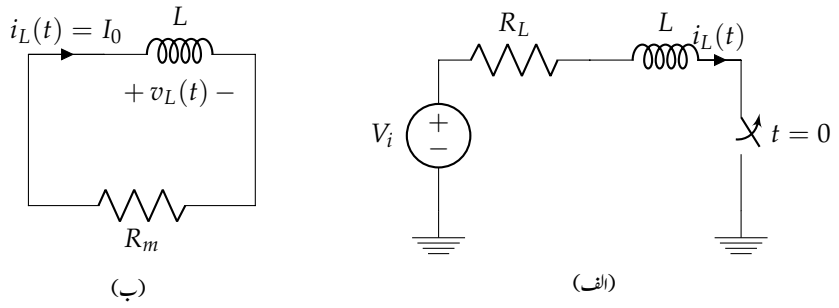
حاصل کرتے ہیں جسے شکل 7.28-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مساوات 7.65 میں حاصل نتیجہ جسے شکل 7.28-ب میں دکھایا گیا ہے غور طلب ہے۔اس مساوات کے تحت جب بھی برق گیر کو سوئچ کے ذریعے منبع دباو کے ساتھ جوڑا جائے، برق گیر پر منبع دباو کی دگنی چوٹی حاصل ہو گی۔اسی شکل میں ہلکی سیاہی سے مساوات 7.64 کو بھی دکھایا گیا ہے۔دباو کی چوٹی عین اس وقت پائی جاتی ہے جب رو کی قیمت صفر ہو۔

قوی برقیات میں بدلتا رو[33] سے یک سمت رو[34] بذریعہ سمت کار[35] حاصل کی جاتی ہے۔سمت کار صرف ایک سمت میں رو گزارتا ہے۔یوں عین اس لمحہ جب دور میں رو کی قیمت منفی ہونے کی کوشش کرے، سمت کار رو گزارنا روک دیتا ہے اور برق گیر دگنی دباو پر رہ جاتا ہے۔قوی برقیات کے میدان میں اس حقیقت کا خاص خیال رکھنا ضروری ہے اور جہاں اس دگنی دباو کی پہنچ ہو، وہاں استعمال کئے گئے پرزوں کی سکت دگنی دباو سے زیادہ ہونی لازمی ہے۔یوں 100 V کی یک سمت منبع کے ساتھ کم از کم 200 V پر کام کرنے والا برق گیر استعمال کیا جائے گا۔ یہاں یہ بتلانا بھی ضروری ہے آپ کسی صورت یہ نہ فرض کر لیں کہ چونکہ آپ نے دور میں امالہ نسب نہیں کیا لہذا آپ کو اس مسئلے سے واسطہ نہیں ہے چونکہ منبع اور برق گیر کو آپس میں جوڑنے والی تار از خود بطور امالہ گیر کردار ادا کرتی ہے۔منبع دباو اور برق گیر کو بغیر تار کے آپس میں جوڑنے سے بھی منبع دباو اور برق گیر کی اندرونی لمبائی جس سے رو گزرتی ہے بطور امالہ گیر کردار ادا کرے گی۔مساوات 7.65 سے ظاہر ہے کہ امالہ کی قیمت کم سے کم کرنے سے دباو کی پہلی چوٹی جلد سے جلد حاصل ہوتی ہے اور مساوات 7.64 کے تحت رو کی چوٹی زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے۔امالہ گیر کے استعمال سے ابتدائی رو کو قابل قبول حد تک رکھا جاتا ہے۔قوی برقیات میں ابتدائی رو قابو کرنے کی خاطر امالہ گیر کی جگہ مزاحمت اس لئے استعمال نہیں کیا جاتا کہ مزاحمت طاقت ضائع کرتی ہے جبکہ امالہ گیر طاقت ضائع نہیں کرتی۔

مثال 7.14: **قوی برقیات**[36] کے میدان میں برقی طاقت کو قابو کیا جاتا ہے۔یہ طاقت چند واٹ W سے کئی سو میگا واٹ MW تک ہو سکتی ہے۔شکل 7.29-الف میں مزاحمت R_L کو سوئچ کے ذریعہ منبع دباو سے طاقت فراہم کی گئی ہے۔سوئچ کو چالو اور منقطع کرتے ہوئے مزاحمت کو منتقل طاقت قابو کی جاتی ہے۔منبع اور مزاحمت کے درمیان امالہ گیر بھی موجود ہے۔

---

[33] alternating current, AC
[34] direct current, DC
[35] rectifier
[36] power electronics

شکل 7.29: مثال 7.14 کے اشکال۔

فرض کریں کہ سوئچ اتنی دیر سے چالو ہے کہ دور برقرار صورت اختیار کئے ہوئے ہے۔یوں امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے

$$i_L = \frac{V_I}{R_L} = I_0$$

لکھا جا سکتا ہے۔شکل-ب میں امالہ گیر اور R_m متوازی جڑے دکھائے گئے ہیں جہاں امالہ گیر کی ابتدائی رو I_0 ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ ایسی صورت میں امالہ گیر کی رو درج ذیل مساوات کے تحت آخرکار صفر ہو جائے گی

$$i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

اور اس دوران اس پر برقی دباو

$$v_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

پایا جائے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ امالہ گیر پر دباو منفی ہو گا یعنی برقی دباو شکل-ب میں دکھائے گئے $v_L(t)$ کے الٹ ہو گا۔ اب شکل-الف پر دوبارہ غور کریں جہاں سوئچ منقطع ہونے کے بعد امالہ گیر کے متوازی لامحدود قیمت کی مزاحمت پائی جائے گی۔یوں درج بالا مساوات میں دباو کی قیمت منفی اور لامحدود ہو گی۔

$$v_L(t) = -\frac{\infty}{L}I_0 e^{-\frac{\infty}{L}t}$$

امالہ گیر کی رو جلدی سے منقطع کرنے سے پیدا دباو کو امالی لات[37] کہتے[38] ہیں۔لامحدود دباو سوئچ پر شعلہ پیدا کرتا ہے جس سے سوئچ جھلس سکتا ہے۔ قوی برقیات کے میدان میں کام کرنے والوں کے لئے امالی لات ایک مسلسل درد سر ثابت ہوتا ہے۔

سوئچ پر دباو کی قیمت قابو کرنے سے شعلہ روکا جا سکتا ہے۔دباو کی قیمت تبدیلی رو کی شرح پر منحصر ہے لہٰذا اس شرح کو کم کرتے ہوئے دباو پر قابو پایا جا سکتا ہے۔شکل-پ میں سوئچ کے متوازی RC جوڑے گئے ہیں۔شکل-پ میں سوئچ منقطع کرنے سے رو یک دم صفر نہیں ہو جاتی بلکہ اس کی سمت RC کی طرف مڑ جاتی ہے لہٰذا امالہ گیر میں رو برقرار رہتی ہے اور لامحدود دباو پیدا ہونے کا جواز ہی نہیں رہتا۔آئیں L ، R اور C کی قیمتیں حاصل کرنا سیکھیں۔

---

[37] inductive kick

[38] ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے امالہ گیر غصے میں آ کر لات مارتا ہے۔

تصور کریں کہ $V_I = 5\,\mathrm{V}$ ، $L = 1\,\mathrm{mH}$ اور $R_L = 2\,\Omega$ ہیں۔یوں برقرار چالو سوئچ میں امالہ گیر کی رو درج ذیل ہو گی جسے سوئچ منقطع کرتے وقت کی ابتدائی رو لیا جاتا ہے۔

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = \frac{5\,\mathrm{V}}{2\,\mathrm{A}} = 2.5\,\mathrm{A}$$

برقرار چالو سوئچ کی صورت میں برق گیر پر دباو صفر ہو گا۔

$$v_C(0_-) = v_C(0_+) = 0\,\mathrm{V}$$

سوئچ منقطع کرنے کے بعد دور سلسلہ وار RLC صورت اختیار کر لیتا ہے جس کی تفرقی مساوات درج ذیل ہے۔

$$L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + (R_L + R)i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + v_C(0_+) = 5 \tag{7.66}$$

اس سے امتیازی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$s^2 + \left(\frac{2+R}{L}\right)s + \frac{1}{LC} = s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

ہم $\zeta = 1$ اور $\omega_0 = 100\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ چنتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔یوں

$$C = 0.1\,\mathrm{\mu F}$$
$$R = 198\,\Omega$$

حاصل ہوتا ہے۔

اب سوئچ منقطع کرتے وقت کے دباو پر غور کرتے ہیں۔چونکہ برق گیر کی ابتدائی دباو صفر وولٹ ہے لہٰذا سوئچ منقطع کرنے کے فوراً بعد اس پر $0\,\mathrm{V}$ ہی ہو گا۔اس لمحہ سوئچ پر دباو

$$v_0(0_+) = i(0_+)R + v_C(0_+) = 2.5 \times 198 + 0 = 495\,\mathrm{V}$$

ہو گا۔سوئچ کے متوازی RC نسب کرنے سے بے قابو بڑھتے ہوئے دباو پر قابو پاتے ہوئے دباو کو قابل قبول حد تک محدود کیا جاتا ہے۔قوی برقیات کے میدان میں سوئچ کے متوازی RC نسب کرنا لازمی ثابت ہوتا ہے۔دباو کی روک تھام کی خاطر سوئچ کے متوازی RC دور کو دباوپکڑ[39] کہتے ہیں۔

---

[39] snubber

پرزوں کی قیمتیں پُر کرتے ہوئے امتیازی مساوات درج ذیل لکھا جائے گا

$$s^2 + 2 \times 10^5 s + 10^{10} = 0$$

جس کے حل

$$s_1 = s_2 = 100\,000$$

سے فطری حل درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$i_F(t) = c_1 e^{-100000t} + tc_2 e^{-100000t} = i(t)$$

چونکہ جبری حل صفر کے برابر ہے لہٰذا فطری حل ہی عمومی حل $i(t)$ ہے۔ عمومی حل کے مستقل دریافت کرنے کی خاطر ابتدائی $\frac{\mathrm{d}i(0_+)}{\mathrm{d}t}$ درکار ہے جسے مساوات 7.66 میں لمحہ $t = 0_+$ کے معلومات پُر کرنے

$$10^{-3} \left. \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0_+} + (2 + 198) \times 2.5 + 0 + 0 = 5$$

سے

$$\left. \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0_+} = -495\,000\,\mathrm{V\,s^{-1}}$$

حاصل کیا جا سکتا ہے۔ عمومی حل میں $i(0_+)$ پُر کرنے سے c_1 کی قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$c_1 = 2.5$$

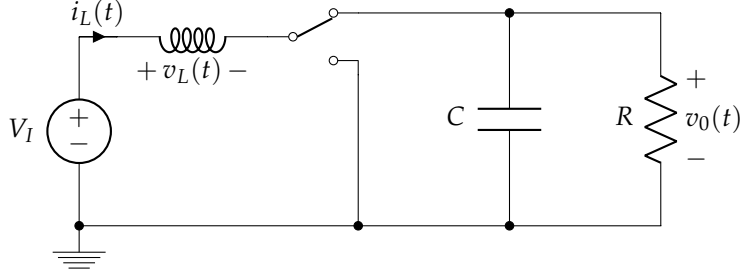
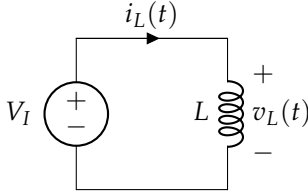
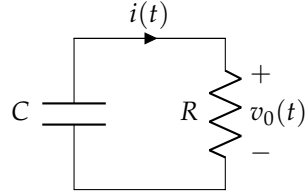
اسی طرح عمومی حل کے تفرق میں ابتدائی $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ پُر کرنے سے

$$c_2 = -245\,000$$

ملتا ہے۔ یوں عمومی حل درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$i(t) = 2.5e^{-100000t} - 245000te^{-100000t}$$

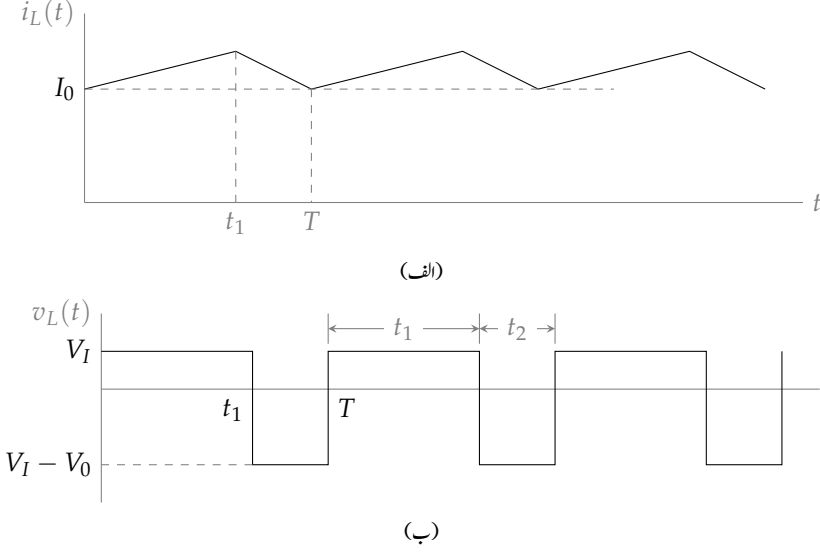
یوں سوئچ پر دباو درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} v_0(t) &= Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + v_C(0_+) \\ &= 5 + 490e^{-100000t} - 2.4 \times 10^7 te^{-100000t} \end{aligned}$$

شکل 7.30: مثال 7.15 کے اشکال۔

جسے شکل 7.29-ت میں دکھایا گیا ہے۔ درج بالا مساوات سے $t = \infty$ پر $v_0 = 5\,\mathrm{V}$ ملتا ہے۔ شکل-ت میں اتنی کم مقدار دکھایا ممکن نہیں ہے۔

مثال 7.15: شکل 7.30 میں منبع دباو[40] کا نہایت مقبول دور دکھایا گیا ہے۔ آپ یقین کے ساتھ کہہ سکتے ہیں کہ آپ کے کمپیوٹر[41] اور گھر میں موجود ٹیلیویژن[42] کو یہی برقی طاقت مہیا کرتا ہے۔ آئیں اس کی کارکردگی پر غور کریں۔

منبع میں ایک قطب اور دو چال والا سوئچ استعمال کیا گیا ہے۔ یہ سوئچ امالہ گیر کو زمین کے ساتھ t_1 دورانیے کے لئے اور برق گیر کے ساتھ t_2 دورانیے کے لئے جوڑتا ہے۔ یوں سوئچ کا دوری عرصہ $T = t_1 + t_2$ ہے۔ فرض کریں کہ سوئچ صفر دورانیے[43] میں جوڑ تبدیل کرتا ہے لہٰذا ایسا کبھی بھی نہیں ہو گا کہ امالہ گیر کی رو یک دم روکی

[40] switching supply
[41] computer
[42] television, TV
[43]

شکل 7.31: مثال 7.15 کے اشکال۔

جائے۔دوران t_1 منبع کو دو علیحدہ علیحدہ ادوار تصور کیا جا سکتا ہے جنہیں شکل-ب اور شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔

دوران t_1 امالہ گیر کی رو مسلسل بڑھتی ہے جس سے امالہ گیر میں ذخیرہ توانائی $W = \frac{Li_L^2}{2}$ بڑھتی ہے۔اس دوران مزاحمت کو برق گیر طاقت فراہم کرتا ہے لہٰذا برق گیر کا دباو مسلسل گھٹتا ہے۔دوران t_2 امالہ گیر کی رو کا کچھ حصہ برق گیر میں بار بھرتا ہے جبکہ بقایا حصہ مزاحمت سے گزرتا ہے۔امالہ گیر کی رو یک دم تبدیل نہیں ہو سکتی لہٰذا اس دوران امالہ گیر کی رو بتدریج گھٹتی ہے اور امالہ گیر میں ذخیرہ توانائی برق گیر اور مزاحمت کو منتقل ہوتا ہے۔ دور یہ سلسلہ لگاتار دہراتا ہے۔یوں t_1 کے دوران امالہ گیر توانائی حاصل کرتے ہوئے t_2 کے دوران اسے برق گیر اور مزاحمت کو منتقل کرتا ہے۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ t_1 کے ابتدا اور t_2 کے اختتام پر امالہ گیر میں رو کی قیمت یکساں طور پر I_0 ہو گی۔شکل 7.31-الف میں i_L کو دکھایا گیا ہے۔آئیں دوران t_1 شکل 7.30-ب اور شکل 7.30-پ پر تفصیلاً غور کریں۔

دوران t_1 امالہ گیر کے لئے شکل-پ کو دیکھتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{V_I}{L}$$

یا

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= \frac{1}{L}\int_0^{t_1} v_L(t)\,\mathrm{d}t + i_L(0_+) \\
&= \frac{1}{L}\int_0^{t_1} V_I\,\mathrm{d}t + I_0 \\
&= \frac{V_I}{L}t_1 + I_0 \qquad\qquad 0 < t < t_1
\end{aligned} \tag{7.67}
$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا اس دورانیے میں امالہ گیر کی رو بڑھتی ہے۔چونکہ رو اور امالہ گیر میں مقناطیسی توانائی کا تعلق $W = \frac{Li_L(t)^2}{2}$ ہے لہٰذا امالہ گیر کی رو بڑھنے سے اس میں ذخیرہ توانائی بڑھتی ہے۔اسی دوران مزاحمت R کو برق گیر توانائی فراہم کرتا ہے لہٰذا برق گیر کی توانائی بتدریج گھٹتی ہے۔برق گیر کی ابتدائی دباو V_0 لیتے ہوئے

$$
v_0(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔حقیقت میں RC وقتی مستقل کی قیمت سوئچ کے دوری عرصہ T سے بہت کم $(RC \ll T)$ ہوتی ہے لہٰذا t_1 کے دوران برق گیر کے دباو میں تبدیلی قابل نظر انداز ہوتی ہے۔یوں برق گیر کے دباو کو مستقل تصور کیا جا سکتا ہے۔

آئیں اب t_2 کے دوران صورت حال پر غور کریں۔ سادہ مساوات کے حصول کی خاطر برق گیر کے دباو کو مستقل مقدار V_0 تصور کرتے ہوئے شکل-ب سے

$$
\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{V_I - V_0}{L}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔دورانیہ t_2 کی ابتدائی رو مساوات 7.67 کی اختتامی رو ہو گی۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
i_L(t) &= \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_1+t_2} v_L(t)\,\mathrm{d}t + \left[\frac{V_I}{L}t_1 + I_0\right] \\
&= \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_1+t_2} (V_I - V_0)\,\mathrm{d}t + \left[\frac{V_I}{L}t_1 + I_0\right] \\
&= \frac{V_I}{L}(t_1+t_2) - \frac{V_0}{L}t_2 + I_0 \qquad\qquad t_1 < t < (t_1+t_2)
\end{aligned} \tag{7.68}
$$

جہاں ابتدائی رو کو چکور قوسین میں بند لکھا گیا ہے اور آخری قدم پر نتائج کو ترتیب دیتے ہوئے پیش کیا گیا ہے۔

جیسے شکل 7.31-الف میں دکھایا گیا ہے، لمحہ t_2 کے اختتام پر امالہ گیر کی رو وہی ہو گی جو t_1 کی ابتدا پر ہے۔اگر t_2 کے اختتام پر رو کی قیمت I_0 سے زیادہ ہو تب امالہ گیر کی رو ہر چکر میں بتدریج بڑھتی رہے گی حتیٰ کہ آخرکار

یہ امالہ گیر کو تباہ کر دے گی۔اسی طرح اگر t_2 کے اختتام پر رو کی قیمت I_0 سے کم ہو تب ہر چکر میں رو کی قیمت بتدریج کم ہوتے ہوئے صفر ہو جائے گی۔منبع دباو کی صحیح کارکردگی کے لئے ضروری ہے کہ t_1 کی ابتدا پر اور t_2 کی اختتام پر رو کی قیمت یک برابر رہے۔ان حقائق کو مد نظر رکھتے ہوئے مساوات 7.68 کی اختتامی رو کو I_0 کے برابر پُر کرتے ہوئے حل کرتے ہیں

$$\frac{V_I}{L}(t_1+t_2)-\frac{V_0}{L}t_2+I_0=I_0$$
$$\frac{V_I}{L}T=\frac{V_0}{L}t_2$$

جہاں دوسری قدم پر $t_1+t_2=T$ لکھا گیا ہے۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$V_0=V_I\frac{T}{t_2}=V_0\frac{T}{T-t_1}=\frac{V_0}{1-\frac{t_1}{T}}$$

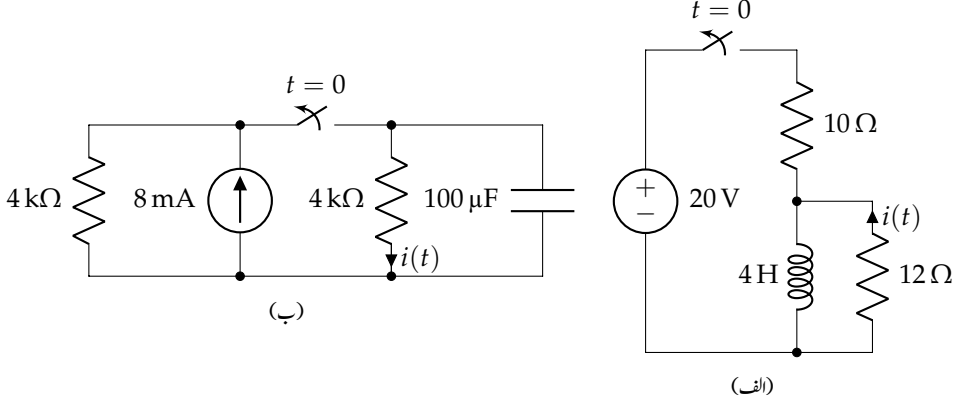
جس میں

$$D=\frac{t_1}{T}\qquad(0<D<1)\tag{7.69}$$

لکھتے ہوئے

$$V_0=\frac{V_I}{1-D}\tag{7.70}$$

ملتا ہے۔وقت t_1 اور دوری عرصہ T کی شرح D کو **فعال عرصہ**[44] کہتے ہیں جسے عموماً فی صد کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے لہٰذا 40 % فعال عرصے کی مراد $t_1=0.4T$ ہے۔

یہاں غور کریں کہ $t_1<T$ ہے لہٰذا D مثبت ہو گا جبکہ اس کی قیمت صفر تا اکائی $(0<D<1)$ ممکن ہے۔یوں درج بالا مساوات کے تحت $V_0\geq V_I$ ہو گا یعنی خارجی دباو کی قیمت داخلی دباو سے زیادہ ہو گی۔اسی لئے اس منبع کو **اٹھاؤ منبع**[45] کہتے ہیں۔دوری عرصہ T کو مستقل رکھتے ہوئے V_0 کی قیمت کو D کی مدد سے تبدیل کیا جاتا ہے۔

شکل 7.32: سوال 7.1 اور سوال 7.2 کے ادوار۔

سوالات

سوال 7.1: شکل 7.32-الف میں سوئچ منقطع کرنے کے بعد $i(t)$ دریافت کریں۔

جواب: $i(t) = 2e^{-3t}\,\mathrm{A}$

سوال 7.2: شکل 7.32-ب میں سوئچ منقطع کرنے کے بعد $i(t)$ دریافت کریں۔

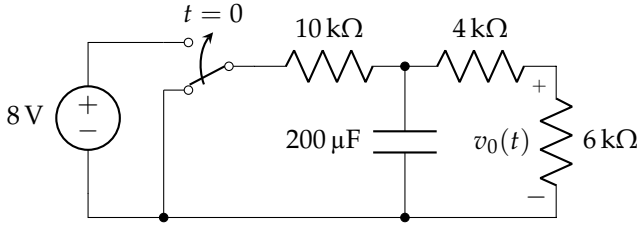
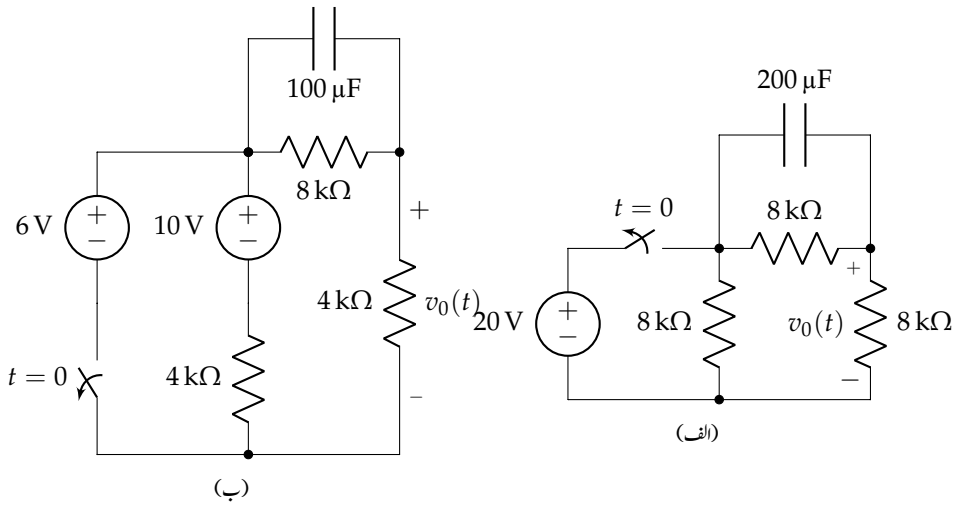
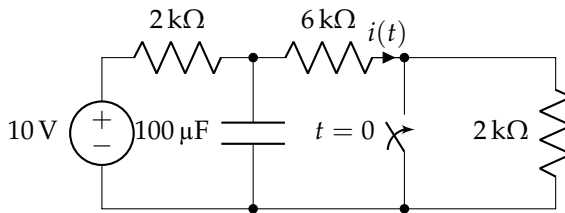
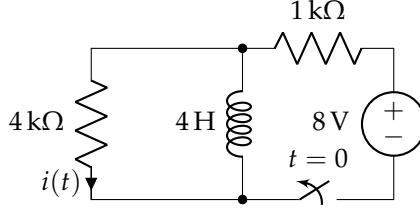
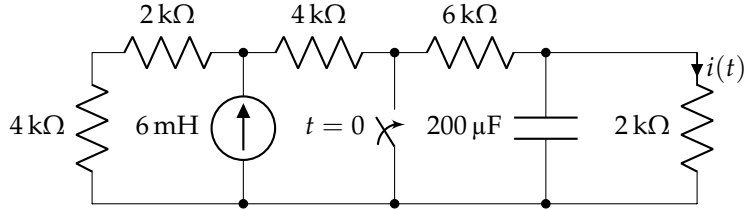
جواب: $i(t) = 4e^{-\frac{5t}{2}}\,\mathrm{mA}$

سوال 7.3: شکل 7.33 میں $t = 0$ پر سوئچ کو منبع کی جانب کر دیا جاتا ہے۔اس لمحے کے بعد $v_0(t)$ دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t) = \frac{12}{5}(1 - e^{-t})\,\mathrm{V}$

سوال 7.4: شکل 7.34-الف میں $v_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = -5e^{-\frac{15t}{16}}\,\mathrm{V}$

سوال 7.5: شکل 7.34-ب میں $v_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

شکل 7.33: سوال 7.3 کا دور۔

شکل 7.34: سوال 7.4 اور سوال 7.5 کے ادوار۔

شکل 7.35: سوال 7.6 کا دور۔

شکل 7.36: سوال 7.7 کا دور۔

شکل 7.37: سوال 7.8 کا دور۔

جواب: $v_0(t) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{5t}{2}}\,\text{V}$

سوال 7.6: شکل 7.35 میں $i_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $i(t) = \frac{5}{4} + \frac{1}{12}e^{-\frac{20t}{3}}\,\text{mA}$

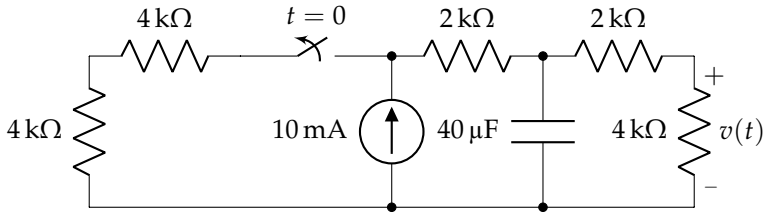
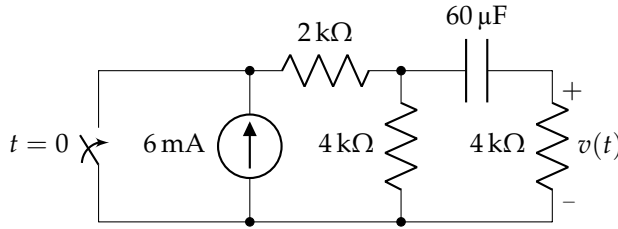
سوال 7.7: شکل 7.36 میں $i_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $i(t) = -8e^{-1000t}\,\text{mA}$

سوال 7.8: شکل 7.37 میں $i_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $i(t) = 2e^{-\frac{10t}{3}}\,\text{mA}$

سوال 7.9: شکل 7.38 میں $v_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $v(t) = 40 - 20e^{-\frac{25t}{6}}\,\text{V}$

شکل 7.38: سوال 7.9 کا دور۔

شکل 7.39: سوال 7.10 کا دور۔

سوال 7.10: شکل 7.39 میں $v_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = -18e^{-\frac{25t}{8}}\ \text{V}$

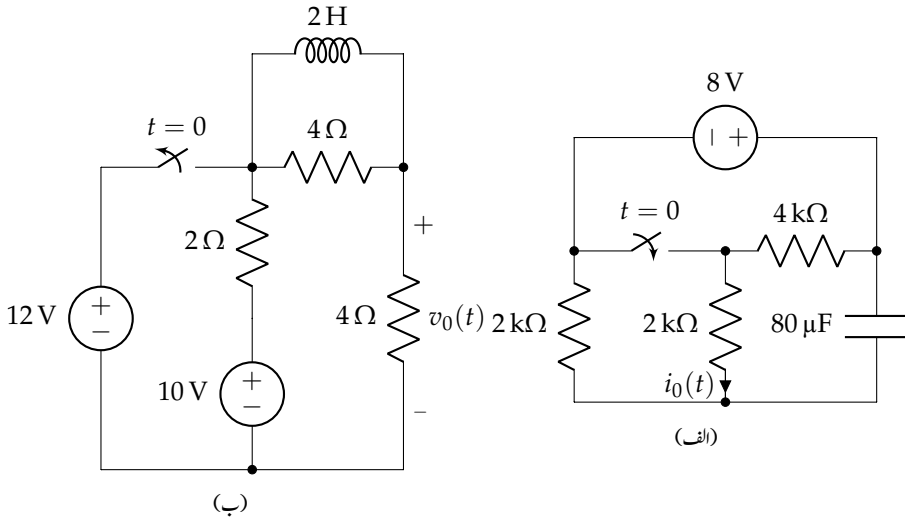
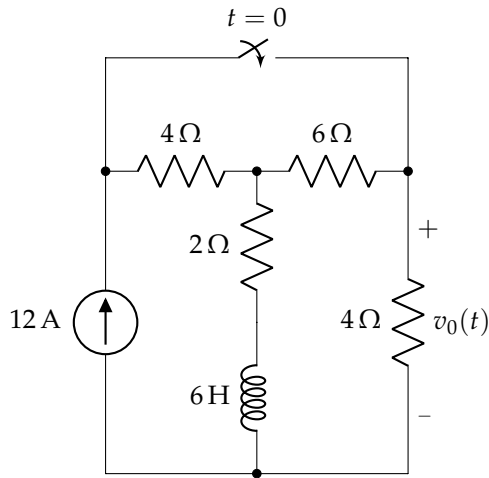
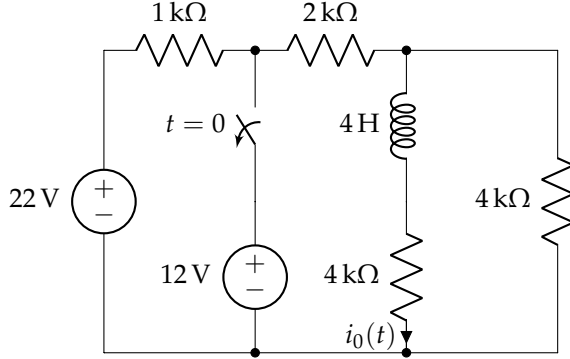
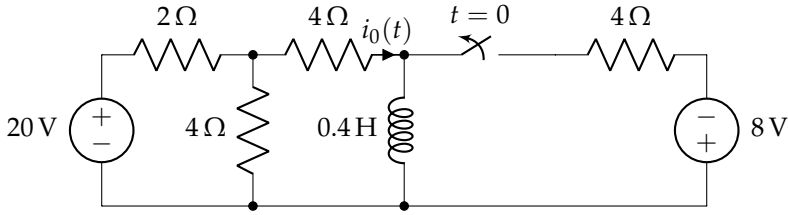
سوال 7.11: شکل 7.40-الف میں $i_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $i_0(t) = 5e^{-\frac{25t}{2}}\ \text{mA}$

سوال 7.12: شکل 7.40-ب میں $v_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = \frac{112}{15}e^{-\frac{6t}{5}} - \frac{20}{3}\ \text{V}$

سوال 7.13: شکل 7.41 میں $v_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = \frac{176}{7} - \frac{120}{7}e^{-\frac{7t}{5}}\ \text{V}$

شکل 7.40: سوال 7.11 اور سوال 7.12 کے ادوار۔

شکل 7.41: سوال 7.13 کا دور۔

شکل 7.42: سوال 7.14 کا دور۔

شکل 7.43: سوال 7.15 کا دور۔

سوال 7.14: شکل 7.42 میں $i_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $i_0(t) = \frac{11}{5} - \frac{7}{10} e^{-\frac{10000t}{7}}\,\text{mA}$

سوال 7.15: شکل 7.43 میں $i_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

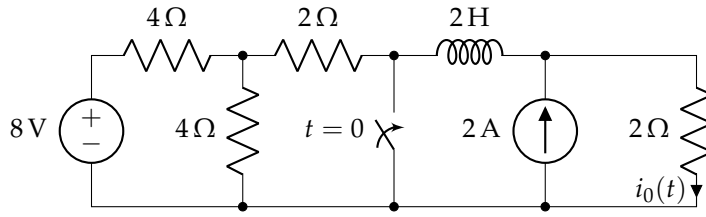
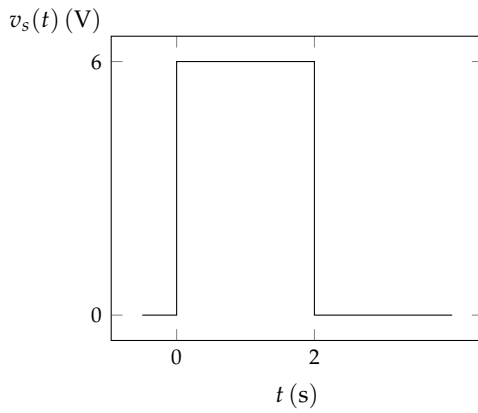
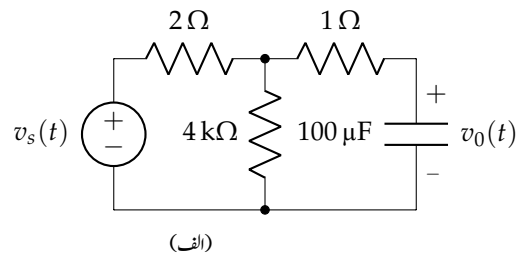
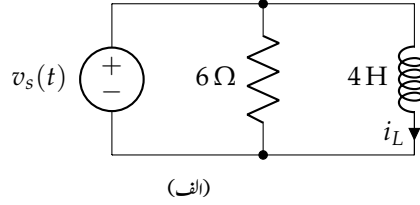
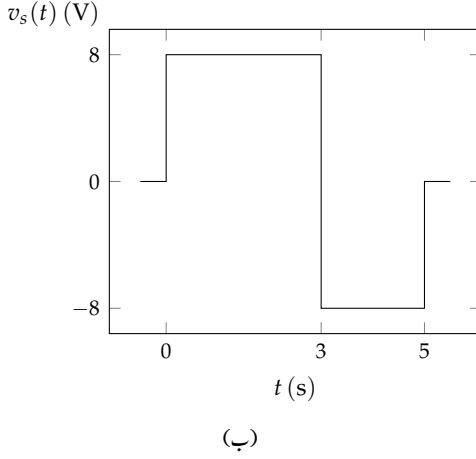
جواب: $i_0(t) = 3e^{-\frac{40t}{3}} - 2.5\,\text{A}$

سوال 7.16: شکل 7.44 میں $i_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جواب: $i_0(t) = 2e^{-t}\,\text{A}$

سوال 7.17: شکل 7.45-الف میں $v_0(t)$ کو $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔ داخلی اشارہ شکل-ب میں دیا گیا ہے۔

---

[44] duty cycle
[45] boost converter

شکل 7.44: سوال 7.16 کا دور۔

شکل 7.45: سوال 7.17 کا دور۔

شکل 7.46: سوال 7.18 کا دور۔

جواب:

$$v_0(t) = \begin{cases} 4(1-e^{-\frac{30t}{7}}) & 0 < t < 2 \\ 4(1-e^{-\frac{60}{7}})e^{-\frac{30}{7}(t-2)} & 2 < t \end{cases}$$

سوال 7.18: شکل 7.46-الف میں لمحہ $t = 0$ پر امالہ کی رو صفر کے برابر ہے۔امالہ کی رو کو $t = 3\,\mathrm{s}$، $t = 5\,\mathrm{s}$ اور $t = 6\,\mathrm{s}$ پر دریافت کریں۔ داخلی اشارہ شکل-ب میں دیا گیا ہے۔امالہ کو کامل تصور کریں۔

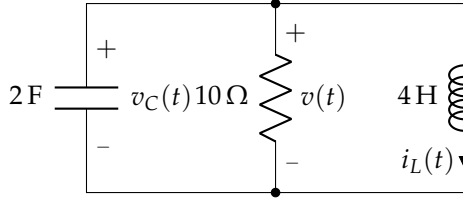
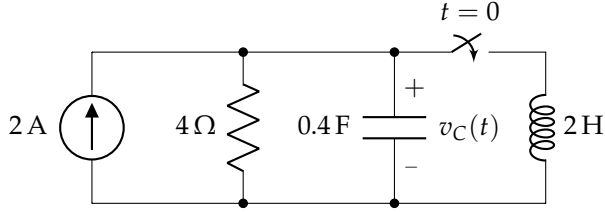
جواب: $6\,\mathrm{A}$ ، $2\,\mathrm{A}$ ، $2\,\mathrm{A}$

سوال 7.19: ایک دور کی تفرقی مساوات درج ذیل ہے۔ $i(t)$ کی مساوات حاصل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 6i = 0$$

جوابات: $i(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$

سوال 7.20: ایک دور کی تفرقی مساوات درج ذیل ہے۔ $i(t)$ کی مساوات حاصل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} + 7\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 6v = 0$$

شکل 7.47: سوال 7.21 کا دور۔

شکل 7.48: سوال 7.22 کا دور۔

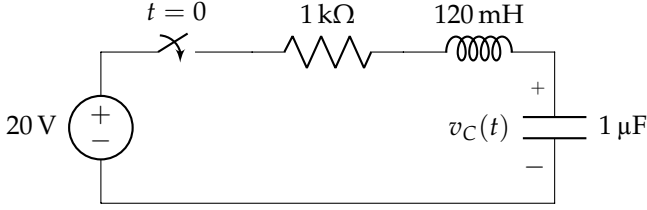
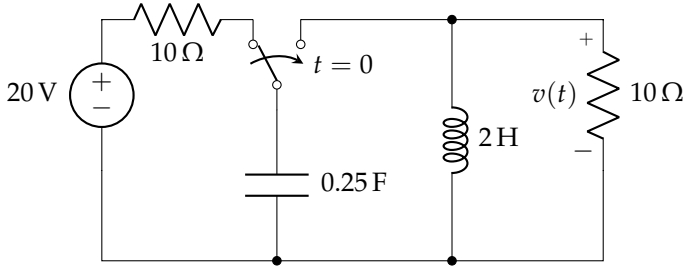
جوابات: $v(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-6t}$

سوال 7.21: شکل 7.47 میں امالہ کی ابتدائی رو $i_L(0) = 2\,\mathrm{A}$ ہے اور برق گیر کا ابتدائی دباو $v_C(0) = 15\,\mathrm{V}$ ہے۔ ابتدائی $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ دریافت کریں۔ دباو $v(t)$ کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -1.75\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ ، $v(t) = e^{-\frac{t}{40}}[15\cos\frac{\sqrt{199}t}{40} - \frac{55}{\sqrt{199}}\sin\frac{\sqrt{199}t}{40}]\,\mathrm{V}$

سوال 7.22: شکل 7.48 میں ازل سے منقطع سوئچ کو $t = 0$ پر چالو کیا جاتا ہے۔ سوئچ چالو کرنے کے فوراً بعد $\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت دریافت کریں۔ $v_C(t)$ کی مساوات $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\mathrm{d}v_c(t)}{\mathrm{d}t} = 0\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ ، $v_C(t) = e^{-\frac{5t}{10}}[8\cos\frac{\sqrt{295}t}{16} + \frac{40}{\sqrt{295}}\sin\frac{\sqrt{295}t}{16}]\,\mathrm{V}$

سوال 7.23: شکل 7.49 میں لمحہ $t = 0_+$ پر $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت دریافت کریں۔ $v_C(t)$ کی مساوات $t > 0$ کے لئے حاصل کریں۔

شکل 7.49: سوال 7.23 کا دور۔

شکل 7.50: سوال 7.24 کا دور۔

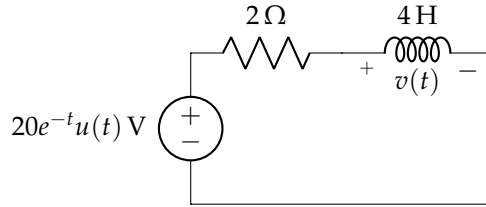
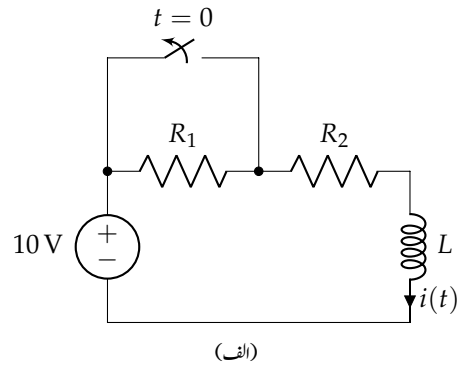
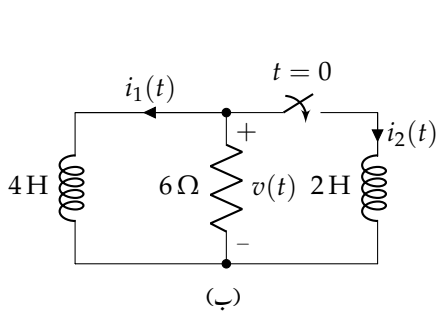
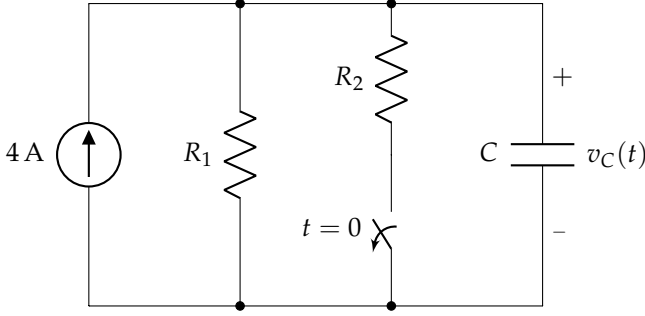
جوابات:

$$\left.\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0_+} = \frac{500}{3}\,\mathrm{A\,s^{-1}}$$
$$v_C(t) = 20 + 3.8675e^{-\frac{2500}{3}(\sqrt{13}+5)t} - 23.8675e^{\frac{2500}{3}(\sqrt{13}-5)t}$$

سوال 7.24: شکل 7.50 میں لمحہ $t=0_+$ پر سوئچ کو دوسری جانب کر دیا جاتا ہے۔اس لمحے $\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت دریافت کریں۔ $v(t)$ کی مساوات $t>0$ کے لئے حاصل کریں۔

جوابات: $\frac{\mathrm{d}v(0_+)}{\mathrm{d}t} = -8\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ ، $v(t) = e^{-\frac{t}{5}}(20\cos\frac{7t}{5} - \frac{20}{7}\sin\frac{7t}{5})\,\mathrm{V}$

سوال 7.25: شکل 7.51 میں $v(t)$ دریافت کریں۔

جواب: $v(t) = [30e^{-t} - 10e^{-\frac{t}{2}}]u(t)\,\mathrm{V}$

شکل 7.51: سوال 7.25 کا دور۔

شکل 7.52: سوال 7.26 کا دور۔

شکل 7.53: سوال 7.28 کا دور۔

سوال 7.26: شکل 7.52-الف میں $t=0$ کے بعد $i(t)=\frac{5}{3}(1+2e^{-2t})\,\mathrm{A}$ ہے۔ دور میں R_1 ، R_2 اور L کی قیمتیں دریافت کریں۔

جواب: $R_1=4\,\Omega$ ، $R_2=2\,\Omega$ ، $L=3\,\mathrm{H}$

سوال 7.27: شکل 7.52-ب میں $i_1(0_-)=6\,\mathrm{A}$ ہے۔ لمحہ $t=0$ پر سوئچ کو چالو کیا جاتا ہے۔ $i_2(0_+)$ ، $v(0_+)$ اور $i_1(t\to\infty)$ دریافت کریں۔

جوابات: $i_2(0_+)=0\,\mathrm{A}$ ، $v(0_+)=-36\,\mathrm{V}$ ، $i_1(t\to\infty)=0\,\mathrm{A}$

سوال 7.28: شکل 7.53 میں $t=0$ پر R_2 کو منقطع کیا جاتا ہے جس کے بعد $v_C(t)=120-80e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{V}$ حاصل ہوتا ہے۔ دور میں R_1 ، R_2 اور C کی قیمتیں دریافت کریں۔

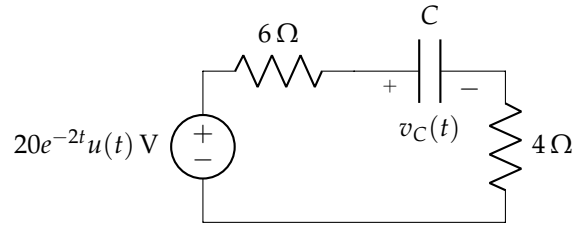
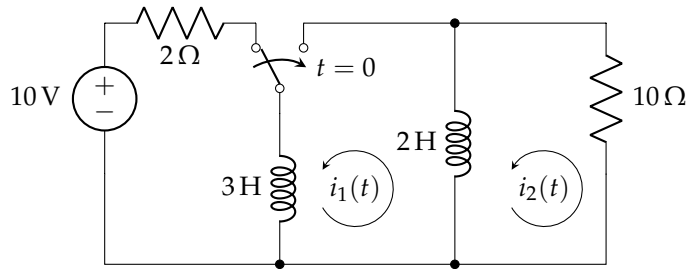
جواب: $R_1=20\,\Omega$ ، $R_2=10\,\Omega$ ، $C=0.1\,\mathrm{F}$

سوال 7.29: شکل 7.54 میں $v_C(t)=\frac{20}{7}[e^{(}-\frac{t}{4})-e^{(}-2t)]\,\mathrm{V}$ ہے۔ دور میں C کی قیمتیں دریافت کریں۔

جواب: $C=0.4\,\mathrm{F}$

سوال 7.30: شکل 7.55 میں ازل سے منبع دور کے ساتھ منسلک ہے جس کو $t=0$ پر دور سے منقطع کیا جاتا ہے۔ دور میں $i_1(t)$ اور $i_2(t)$ دریافت کریں۔

جواب:

$$i_1(t)=-2e^{-\frac{25t}{3}}-3\,\mathrm{A}$$
$$i_2(t)=-3e^{-\frac{25t}{3}}-3\,\mathrm{A}$$

شکل 7.54: سوال 7.29 کا دور۔

شکل 7.55: سوال 7.30 کا دور۔

باب 8

تجزیہ برقرار حال

جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی سے دور عارضی حالت اختیار کرتا ہے۔ محدود قیمت کے وقتی مستقل کی صورت میں آخر کار عارضی دورانیہ گزر جاتا ہے اور دور ایک بار پھر برقرار حالت اختیار کر لیتا ہے۔ جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی کی غیر موجودگی میں دور برقرار صورت میں رہتا ہے۔ اس باب میں ایسے ہی ادوار پر غور کیا جائے گا جن کے جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ ایسی صورت میں جبری حل ہی عمومی حل ہو گا۔ اس باب میں عمومی حل سے مراد جبری حل ہو گا۔

8.1 مخلوط اعداد

حقیقی[1] عدد اور خیالی[2] عدد کے مجموعے کو مخلوط[3] عدد کہتے ہیں۔ مخلوط اعداد کو مخلوط سطح[4] پر دکھایا جاتا ہے۔ مخلوط سطح پر افقی محدد حقیقی اعداد کو ظاہر کرتا ہے جبکہ عمودی محدد خیالی اعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

شکل 8.1-الف میں مخلوط عدد $3 + j2$ دکھایا گیا ہے۔ اسی شکل میں ایک مستطیل بھی دکھایا گیا ہے۔ اس عدد کے حقیقی اور خیالی اجزاء مستطیل کے اطراف ہیں۔ یوں مخلوط عدد کو حقیقی اور خیالی اجزاء کے مجموعے یعنی $3 + j2$ کے طرز پر لکھنے کو مستطیلی طرز[5] کہتے ہیں۔

---

[1] real number
[2] imaginary number
[3] complex number
[4] complex plane
[5] rectangular form

شکل 8.1-الف میں مخلوط نقطہ $(3+j2)$ سے محدد کے مبدا $(0,0)$ تک لکیر کھینچی گئی ہے۔اس لکیر کی لمبائی r کو مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$r=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح افقی محدد سے لکیر تک کا زاویہ درج ذیل ہو گا۔

$$\theta=\tan^{-1}\frac{2}{3}=33.69^\circ$$

شکل 8.1-ب میں اسی مخلوط عدد کو $r\underline{/\theta}$ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔مخلوط عدد کو حیطے اور زاویے سے ظاہر کرنے کو زاویائی طرز[6] کہتے ہیں۔

کسی بھی مخلوط عدد m کو

$$m=x+jy \qquad \text{مستطیل طرز} \tag{8.1}$$

یا

$$m=r\underline{/\theta} \qquad \text{زاویائی طرز} \tag{8.2}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں مستطیلی طرز سے زاویائی طرز درج ذیل طریقے سے حاصل کی جاتی ہے

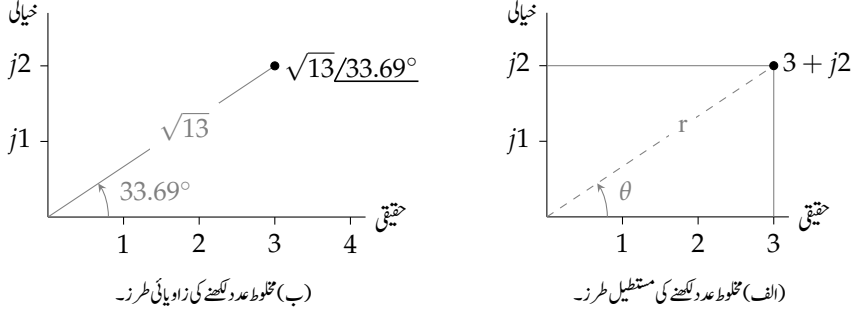
$$\begin{aligned} r&=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta&=\tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned} \tag{8.3}$$

جبکہ زاویائی طرز سے مستطیل طرز درج ذیل سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} x&=r\cos\theta\\ y&=r\sin\theta \end{aligned} \tag{8.4}$$

مخلوط اعداد کو جمع، منفی، ضرب اور تقسیم کرنے کی چند مثالیں دیکھتے ہیں۔

---

[6] angular form

شکل 8.1: مخلوط اعداد کو لکھنے کے طریقے۔

مثال 8.1: مخلوط اعداد $a = 2 + j3$ اور $b = 4 + j5$ دیے گئے ہیں۔درج ذیل حاصل کریں۔

$$a + b, \qquad a - b, \qquad ab, \qquad \frac{a}{b}$$

حل: مخلوط اعداد جمع (منفی) کرتے وقت حقیقی اجزاء کو علیحدہ جمع (منفی) کیا جاتا ہے اور خیالی اجزاء کو علیحدہ جمع (منفی) کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} a + b &= (2 + j3) + (4 + j5) = (2 + 4) + j(3 + 5) = 6 + j8 \\ a - b &= (2 + j3) - (4 + j5) = (2 - 4) + j(3 - 5) = -2 - j2 \end{aligned}$$

مخلوط اعداد کو ضرب دیتے ہوئے $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ لکھا جاتا ہے۔

$$ab = (2 + j3)(4 + j5) = 8 + j10 + j12 + j^2 15 = (8 - 15) + j(10 + 12) = -7 + j22$$

مخلوط اعداد کو تقسیم کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{2+j3}{4+j5} \\
&= \left(\frac{2+j3}{4+j5}\right)\left(\frac{4-j5}{4-j5}\right) \\
&= \frac{8-j10+j12-j^2 15}{4^2-(j5)^2} \\
&= \frac{23+j2}{16+25} \\
&= \frac{23}{41}+j\frac{2}{41} \\
&= 0.56098+j0.04878
\end{aligned}
$$

مثال 8.2: گزشتہ مثال میں مخلوط اعداد کو زاویائی طرز پر لکھتے ہوئے ab اور $\frac{a}{b}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 8.3 استعمال کرتے ہوئے $a = 2 + j3$ کا حیطہ اور زاویہ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
r_a &= \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \\
\theta_a &= \tan^{-1}\frac{3}{2} = 56.31^\circ
\end{aligned}
$$

یوں

$$
a = \sqrt{13}\underline{/56.31^\circ}
$$

لکھا جائے گا۔اسی طرح $b = 4 + j5$ کا حیطہ اور زاویہ حاصل کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
r_b &= \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41} \\
\theta_b &= \tan^{-1}\frac{5}{4} = 51.34^\circ
\end{aligned}
$$

درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$b=\sqrt{41}\angle 51.34^\circ$$

اس طرح

$$\begin{aligned}ab&=\left(\sqrt{13}\angle 56.31^\circ\right)\left(\sqrt{41}\angle 51.34^\circ\right)\\&=\sqrt{13}\sqrt{41}\angle 56.31^\circ+51.34^\circ\\&=\sqrt{533}\angle 107.65^\circ\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{\sqrt{13}\angle 56.31^\circ}{\sqrt{41}\angle 51.34^\circ}\\&=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{41}}\angle 56.31^\circ-51.34^\circ\\&=\sqrt{\frac{13}{41}}\angle 4.97^\circ\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

ان جوابات کو مستطیلی طرز میں درج ذیل لکھا جائے گا جو گزشتہ مثال کے جوابات ہیں۔

$$\begin{aligned}ab&=\sqrt{533}\cos 107.65^\circ+j\sqrt{533}\sin 107.65^\circ=-7+j22\\\frac{a}{b}&=\sqrt{\frac{13}{41}}\cos 4.97^\circ+j\sqrt{\frac{13}{41}}\sin 4.97^\circ=0.56098+j0.04878\end{aligned}$$

ہم نے دیکھا کہ زاویائی طرز میں لکھا مخلوط عدد $a=r\angle\theta$ مستطیل طرز میں بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$a=r\angle\theta=r\cos\theta+jr\sin\theta \tag{8.5}$$

یولر مساوات[7] درج ذیل ہے۔

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \tag{8.6}$$

---

[7] Euler's equation

مندرجہ بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$r\underline{/\theta} = re^{j\theta} = r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right) \tag{8.7}$$

مثال 8.3: مخلوط عدد $m = 5 - j12$ کو زاویائی طرز میں لکھیں۔

حل: مساوات 8.3 کے استعمال سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{-12}{5} = -67.38^\circ$$

لہٰذا درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$m = 13e^{-j67.38^\circ}$$
$$m = 13\underline{/-67.38^\circ}$$

8.2 سائن نما تفاعل

سائن نما[8] تفاعل سے مراد سائن تفاعل $\sin\theta$ اور کوسائن تفاعل $\cos\theta$ ہیں۔ شکل 8.2-الف میں رداس A_0 کے گول دائرے پر ایک نقطہ یکساں رفتار کے ساتھ، گھڑی کی گردش کی الٹ سمت میں، حرکت کر رہا ہے۔ یہ دائرہ کارتیسی محدد[9] کے مبدا $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ t پر زاویہ $\underline{/aox}$ کی قیمت θ کے برابر ہے۔ نقطے سے x محدد پر عمودی لکیر محدد کو $x(t)$ پر ٹکراتی ہے جبکہ y محدد پر عمودی لکیر $y(t)$ پر ٹکراتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y(t) = A_0\sin\theta \tag{8.8}$$

---

[8] sinusoidal
[9] Cartesian coordinates

جہاں A_0 موج کی چوٹی ہے جسے موج کا حیطہ[10] کہتے ہیں اور θ کو تفاعل کا دلیل[12][11] کہتے ہیں۔اس مساوات میں θ از خود وقت t پر منحصر ہے۔

گردش کرتا نقطہ ایک چکر میں $360°$ درجے کا زاویہ یعنی 2π ریڈیئن طے کرتا ہے۔ایک چکر کاٹنے کے لئے درکار دورانیے کو دوری عرصہ[13] کہتے ہیں جسے T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 8.1: شکل 8.2-الف میں نقطہ ایک چکر $20\,\mathrm{ms}$ میں پورا کرتا ہے۔یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے چکر پورا کرے گا۔یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے ریڈیئن کا زاویہ طے کرتا ہے۔

جوابات: 50 چکر، $100\pi\,\mathrm{rad}$

اگر ایک چکر کاٹنے کے لئے T سیکنڈ کا وقت درکار ہو تب ایک سیکنڈ میں چکروں کی تعداد $\frac{1}{T}$ ہو گی جسے **تعدد**[14] کہتے اور f سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$f = \frac{1}{T} \tag{8.9}$$

تعدد کی اکائی ہرٹز[15] ہے جسے Hz سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک چکر 2π ریڈیئن کو کہتے ہیں لہٰذا f چکر سے مراد $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ ہے۔یوں f تعدد پر گردش کرتا نقطہ ایک سیکنڈ میں $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ طے کرے گا یعنی اس کی **زاویائی رفتار**[16] کی قیمت $2\pi f$ ہو گی۔زاویائی رفتار کو ω سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی سیکنڈ $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔

$$\omega = 2\pi f \tag{8.10}$$

---

[10] amplitude

[11] ایک ماہر ریاضی اپنی خیالی دنیا میں کو سائن $\cos\theta$ تفاعل کے ساتھ بحث میں مصروف ہوتا ہے۔ماہر ریاضی تفاعل کو دلیل کے طور پر صفر پیش کرتا ہے۔تفاعل اس کا فوراً جواب اکائی $(\cos 0 = 1)$ دیتا ہے۔

[12] argument

[13] time period

[14] frequency

[15] Hertz

[16] angular speed

زاویائی رفتار ω سے گردش کرتا ہوا نقطہ t سیکنڈ میں $2\pi ft$ ریڈیئن کا زاویہ طے کرے گا۔یوں اگر $t = 0$ پر نقطہ عین x محدد کے مثبت حصے پر ہو تب لمحہ t پر

$$\theta = \omega t = 2\pi ft \tag{8.11}$$

لکھا جائے گا۔یوں مساوات 8.8 کو

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 \sin 2\pi ft \\ &= A_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \\ &= A_0 \sin \omega t \end{aligned} \tag{8.12}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

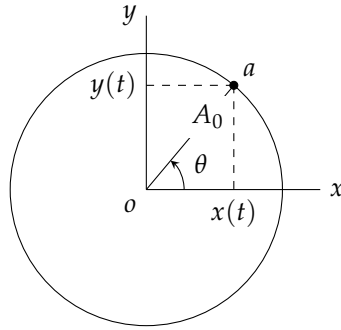
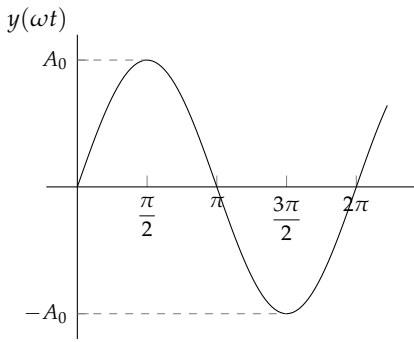
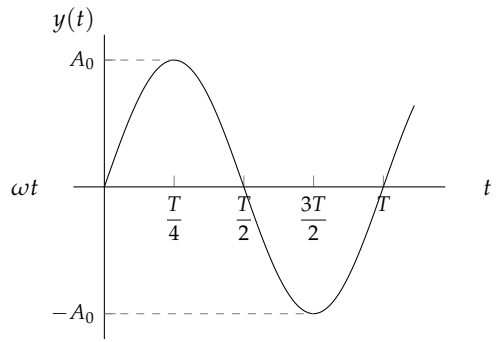
برقی میدان میں $y(t)$ وقت کے ساتھ بدلتے دباو یا وقت کے ساتھ بدلتا رو کو ظاہر کر سکتی ہے۔مساوات 8.12 میں دیے تفاعل، جسے شکل 8.2-ب میں دکھایا گیا ہے، کا آزاد متغیرہ وقت t ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل ہر T سیکنڈ کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔اس حقیقت کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$y(t+T) = y(t) \tag{8.13}$$

جس سے مراد یہ ہے کہ تفاعل کی قیمت لمحہ t اور لمحہ $t+T$ پر برابر ہیں۔

مساوات 8.12 کے خط کو ωt کے ساتھ بھی کھینچا جا سکتا ہے۔ایسا ہی شکل 8.2-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ یہ تفاعل ہر 2π ریڈیئن کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

مشق 8.2: شکل 8.2-الف میں گردش کرتا نقطہ $0.2\,\mathrm{s}$ میں 40° کا زاویہ طے کرتا ہے۔زاویائی رفتار، تعدد اور دوری عرصہ دریافت کریں۔

جوابات: $\omega = \frac{10\pi}{9}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $f = 1.8\,\mathrm{Hz}$ ، $T = \frac{5}{9}\,\mathrm{s}$

شکل 8.2: سائن موج۔

شکل 8.3 میں عمومی صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں ω زاویائی رفتار سے گردش کرتا نقطہ، لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α پر پایا جاتا ہے۔یہ نقطہ وقت t کے دوران ωt زاویہ طے کرتے ہوئے $\theta = \omega t + \alpha$ پہنچ جائے گا لہٰذا اس کے لئے

$$y(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha) \tag{8.14}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں α کو زاویائی ہٹاو[17] کہتے ہیں۔اس مساوات کا دلیل $\omega t + \alpha$ ہے۔شکل 8.3-ب میں مساوات 8.12 اور مساوات 8.14 کو دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان مساوات میں α زاویائی فرق[18] پایا جاتا ہے۔ مساوات 8.12 سے مساوات 8.14 α ریڈیئن آگے[19] ہے۔ یہ بھی کہا جا سکتا ہے کہ مساوات 8.14 سے مساوات 8.12 α ریڈیئن پیچھے[20] ہے۔ایک ہی تعدد کے دو تفاعل

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_{01} \sin(\omega t + \alpha) \\ y_2(t) &= A_{02} \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \tag{8.15}$$

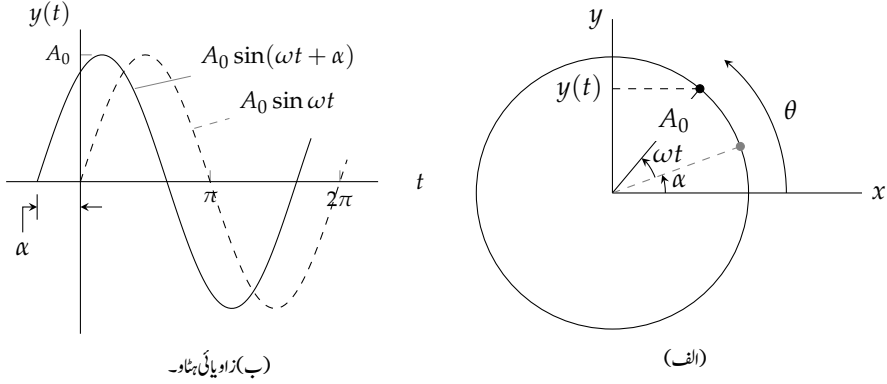
میں $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\alpha - \beta$ ریڈیئن آگے ہے۔ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $y_2(t)$ تفاعل $y_1(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈیئن پیچھے ہے۔اگر $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈیئن آگے ہے یا کہ $\alpha = \beta$ ہو تب تفاعل ہم زاویہ[21] کہلاتے ہیں جبکہ $\alpha \neq \beta$ کی صورت میں تفاعل الگ زاویہ[22] کہلاتے ہیں۔

زاویائی ہٹاو کو عموماً درجوں میں بیان کیا جاتا ہے لہٰذا $\alpha = \frac{\pi}{4}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = A_0 \sin\left(\omega t + 45^\circ\right) \tag{8.16}$$

با ضابطہ طور پر چونکہ ωt کی قیمت ریڈیئن میں ہے لہٰذا α کی قیمت بھی ریڈیئن میں ہونا لازم ہے لہٰذا تفاعل لکھنے کا صحیح طریقہ $y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ ہی ہے لیکن زاویائی ہٹاو کو درجوں میں لکھنے کی روایت نہایت مقبول ہے لہٰذا اس کتاب میں بھی اس روایت کو برقرار رکھا جائے گا۔مساوات 8.16 میں 45° لکھتے ہوئے زیر بالا میں درجے کی علامت $(^\circ)$ استعمال کی گئی ہے جبکہ $\frac{\pi}{4}$ پر کوئی علامت نہیں لگائی گئی۔اسی علامت سے ریڈیئن یا درجوں کی پہچان کی جاتی ہے۔

---

[17] phase angle
[18] phase difference
[19] lead
[20] lag
[21] in phase
[22] out of phase

شکل 8.3: لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α ہے۔

مثال 8.4: مساوات $y_1(t) = 15\sin(100t + 60^\circ)$ اور $y_2(t) = 22\sin(200t + 0.2\pi)$ کی قیمت $t = 25\,\text{ms}$ پر دریافت کریں۔

حل: پہلی تفاعل میں 50° کا زاویائی ہٹاو $\frac{60^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{\pi}{3}$ ریڈیئن کے برابر ہے۔ یوں لمحہ $t = 25\,\text{ms}$ پر

$$y_1(0.025) = 15\sin\left(100 \times 25 \times 10^{-3} + \frac{\pi}{3}\right) = -5.918619766$$

اور

$$y_2(0.025) = 22\sin(200 \times 0.025 + 0.2\pi) = -13.39917888$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اگرچہ اب تک کی بحث میں ہم نے سائن تفاعل استعمال کیا، ہم اس کی جگہ کوسائن تفاعل بھی استعمال کر سکتے تھے۔ ان دو تفاعل کی صورت بالکل یکساں ہے پس دونوں میں 90° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\omega t \tag{8.17}$$

$$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\omega t \tag{8.18}$$

سائن نما تفاعل کے دلیل کے ساتھ 2π ریڈیئن یا $360°$ کا مضرب جمع کرنے سے تفاعل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔

$$\cos(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \cos(\omega t + \alpha) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{8.19}$$
$$\sin(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \sin(\omega t + \alpha) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{8.20}$$

دو سائن نما تفاعل میں زاویائی فرق تین شرائط پورا کرنے کے بعد دریافت کیا جا سکتا ہے۔پہلی شرط یہ ہے کہ دونوں تفاعل کی تعدد برابر ہو۔دوسری شرط یہ ہے کہ دونوں کو سائن تفاعل اور یا پھر دونوں کو کوسائن تفاعل کی صورت میں لکھا جائے۔تیسری اور آخری شرط یہ ہے کہ دوسری شرط میں لکھے گئے تفاعل کے حیطے مثبت ہوں۔درج ذیل مماثل ان شرائط کو پورا کرنے میں مدد دیتے ہیں۔

$$-\sin(\omega t + \alpha) = \sin(\omega t + \alpha \pm 180°) \tag{8.21}$$
$$-\cos(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha \pm 180°) \tag{8.22}$$

ان کے علاوہ درج ذیل مماثل بھی نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \tag{8.23}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \tag{8.24}$$

ایک آخری تفاعل جس کا ذکر ضروری ہے درج ذیل ہے۔

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \tag{8.25}$$

مثال 8.5: درج ذیل تفاعل کے خط کھینچیں۔

- $v(t) = 1\cos(\omega t + 60°)$
- $v(t) = 1\cos(\omega t + 240°)$
- $v(t) = 1\cos(\omega t - 300°)$

حل: شکل 8.4-الف میں $v(\omega t) = 1\cos\omega t$ کا خط دکھایا گیا ہے۔اس کو افقی محدد پر 60° درجے بائیں منتقل کرنے سے $v(\omega t) = 1\cos(\omega t + 60^\circ)$ کا خط حاصل ہوتا ہے جسے شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$v(\omega t) = 1\cos(\omega t + 240^\circ) = 1\cos(\omega t + 60^\circ + 180^\circ) = -1\cos(\omega t + 60^\circ)$$

جہاں مساوات 8.22 کا استعمال کیا گیا ہے۔درج بالا مساوات کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شکل-ب کا منفی ہے۔اسی طرح مساوات 8.19 کی مدد سے

$$v(\omega t) = 1\cos(\omega t - 300^\circ) = 1\cos(\omega t - 300^\circ + 360^\circ) = 1\cos(\omega t + 60^\circ)$$

لکھتے ہوئے شکل-ت حاصل ہوتی ہے جو عین شکل-ب ہی ہے۔

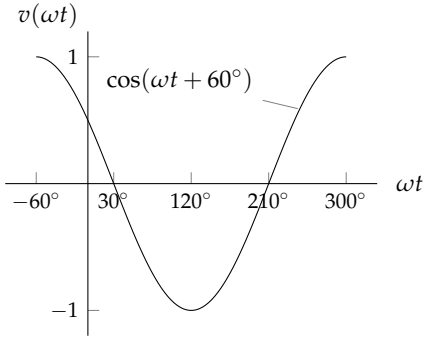
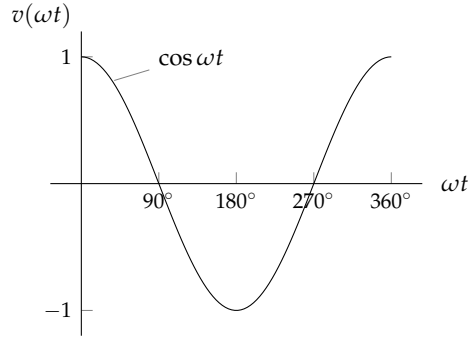
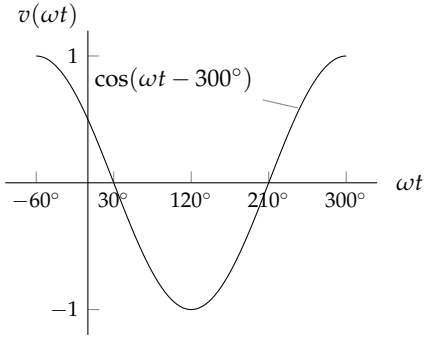
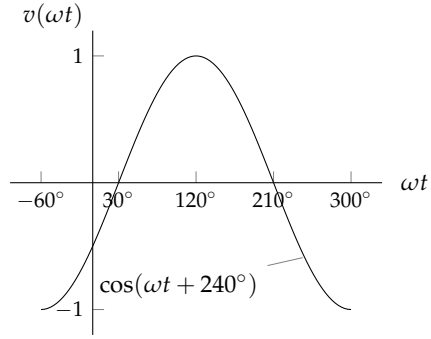
مثال 8.6: درج ذیل امواج کی تعدد ہرٹز میں حاصل کریں۔ امواج کے مابین زاویائی فرق دریافت کریں۔یہ بھی بتلائیں کہ کونسی موج آگے ہے۔

$$\begin{aligned} v_1(\omega t) &= 100\sin(400t - 30^\circ) \\ v_2(\omega t) &= -250\cos(400t + 0.2\pi) \end{aligned}$$

حل:ان امواج میں $\omega = 400\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{400}{2\pi} = 63.66\,\mathrm{Hz}$$

ہو گا۔زاویائی فرق دریافت کرنے کی خاطر دونوں امواج کو مثبت حیطے کے کوسائن موج کی صورت میں لکھتے ہیں۔ساتھ ہی ساتھ ان کے زاویائی ہٹاو کو درجوں میں لکھتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned} v_1(\omega t) &= 100\sin(400t - 30^\circ) \\ &= 100\cos(400t - 30^\circ - 90^\circ) \\ &= 100\cos(400t - 120^\circ) \\ &= 100\cos(400t + 240^\circ) \end{aligned}$$

شکل 8.4: مثال 8.5 کے خط۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 8.19 کا استعمال کیا گیا۔اسی طرح

$$\begin{aligned} v_2(\omega t) &= -250\cos(400t + 0.2\pi) \\ &= 250\cos(400t + 0.2\pi + \pi) \\ &= 250\cos(400t + 216^\circ) \end{aligned}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر 1.2π ریڈیئن کو 216° درجے لکھا گیا ہے۔ان امواج کے مابین

$$240^\circ - 216^\circ = 24^\circ$$

کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے اور موج $v_1(\omega t)$ آگے ہے۔

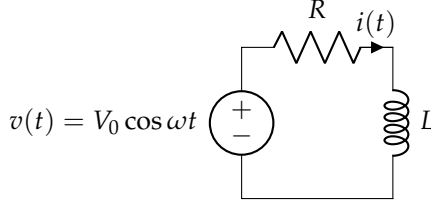
مشق 8.3: ایک دور میں درج ذیل تین رو پائے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} i_1(1) &= 30\cos(100\pi t + 30^\circ) \\ i_2(2) &= 55\sin(100\pi t + 40^\circ) \\ i_3(t) &= 20\sin(100\pi t + 60^\circ) \end{aligned}$$

i_2 سے i_1 کتنی آگے ہے اور i_3 سے i_1 کتنی پیچھے ہے۔

جوابات: 80° ، -60° یا 300°

8.3 سائن نما اور مخلوط جبری تفاعل

گزشتہ باب میں دور پر مستقل جبری تفاعل مسلط کرتے ہوئے، دور کا جبری ردعمل بھی مستقل قیمت کا حاصل ہوا۔ تفرقی مساوات کا جبری ردعمل، مسلط جبری تفاعل اور اس کے تمام بلند رتبی تفرق کا مجموعہ ہوتا ہے۔یوں دور پر جبری دباو $v(t) = \sin\omega t$ مسلط کرنے سے رو کا جبری ردعمل $i(t) = c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t$ متوقع ہو گا۔پس جبری ردعمل کے مستقل c_1 اور c_2 معلوم کرنا باقی ہے۔

شکل 8.5: مثال 8.7 کا دور۔

مثال 8.7: شکل 8.5 میں رو $i_J(t)$ حاصل کریں۔

حل: دور کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=V_0\cos\omega t \tag{8.26}$$

دور پر مسلط جبری تفاعل اور اس تفاعل کے تمام بلند رتبی تفرق کا مجموعہ جبری حل کے برابر ہو گا۔

$$i_J(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$$

اس جبری حل کو مساوات 8.26 میں پُر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 مستقل دریافت کرتے ہیں۔

$$R(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)+L(-c_1\omega\sin\omega t+c_2\omega\cos\omega t)=V_0\cos\omega t$$

درج بالا مساوات میں دونوں اطراف $\cos\omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔اسی طرح دونوں اطراف $\sin\omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔

$$\begin{aligned}c_1R+c_2\omega L&=V_0\\-c_1\omega L+c_2R&=0\end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو c_1 اور c_2 کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\begin{aligned}c_1&=\frac{RV_0}{R^2+\omega^2L^2}\\c_2&=\frac{\omega LV_0}{R^2+\omega^2L^2}\end{aligned}$$

لہٰذا جبری حل

$$i_J(t)=\frac{RV_0}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t+\frac{\omega LV_0}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t \tag{8.27}$$

ہو گا۔

مثال 8.8: درج بالا مثال میں $R=100\,\Omega$ ، $L=5\,\mathrm{mH}$ ، $V_0=310\,\mathrm{V}$ اور $\omega=10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ کی صورت میں جبری حل کو مساوات 8.24 کی مدد سے $i(t)=I_0\cos(\omega t-\phi)$ کے طرز پر لکھیں۔

حل: مساوات 8.27 میں دی گئی قیمتیں پُر کرنے سے

$$i_J(t)=\frac{100\times310}{100^2+(10\,000\times0.005)^2}\cos\omega t+\frac{10\,000\times0.005\times310}{100^2+(10\,000\times0.005)^2}\sin\omega t$$

یعنی درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$i_J(t)=2.48\cos\omega t+1.24\sin\omega t \tag{8.28}$$

مساوات 8.24 سے جبری حل کی درکار صورت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i(t)=I_0\cos(\omega t-\phi)=I_0\cos\phi\cos\omega t+I_0\sin\phi\sin\omega t \tag{8.29}$$

مساوات 8.28 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.29 کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہیں۔

$$I_0\cos\phi=2.48 \tag{8.30}$$

$$I_0\sin\phi=1.24 \tag{8.31}$$

ان ہمزاد مساوات کے مربع جمع کرتے ہوئے

$$I_0^2\cos^2\phi+I_0^2\sin^2\phi=2.48^2+1.24^2$$

ملتا ہے جس میں مساوات 8.25 کے استعمال سے $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ پُر کرتے ہوئے

$$I_0 = \sqrt{2.48^2 + 1.24^2} = 2.7727$$

ملتا ہے۔اسی طرح مساوات 8.31 کو مساوات 8.30 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{1.24}{2.48} = \tan\phi$$

یعنی

$$\phi = \tan^{-1}\frac{1.24}{2.48} = \underline{/26.6^\circ}$$

ملتا ہے۔یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا

$$i_J(t) = 2.77\cos(\omega t - 26.6^\circ) = 2.77\cos(10\,000t - 26.6^\circ) \tag{8.32}$$

جہاں سے ظاہر ہے کہ دباو سے رو 26.6° درجے پیچھے ہے۔ مخلوط جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا جس کا حقیقی جزو درج بالا مساوات ہے۔

$$i_M(t) = 2.77e^{j(10\,000t - 26.6^\circ)} \tag{8.33}$$

مثال 8.9: مثال 8.8 کے طرز پر مثال 8.7 میں حاصل کئے گئے جبری حل کو $i_J(t) = I_0\cos(\omega t - \phi)$ کی صورت میں لکھیں۔

حل:مساوات 8.27 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.29 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I_0\cos\phi = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$
$$I_0\sin\phi = \frac{\omega L V_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

ان ہمزاد مساوات میں دوسری مساوات کو پہلی سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi = \frac{\omega L}{R}$$

یعنی

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \tag{8.34}$$

ملتا ہے جبکہ دونوں ہمزاد مساوات کے مربع کا مجموعہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
I_0^2\cos^2\phi + I_0^2\sin^2\phi = I_0^2 &= \left(\frac{RV_0}{R^2+\omega^2L^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega LV_0}{R^2+\omega^2L^2}\right)^2 \\
&= \frac{(R^2+\omega^2L^2)V_0^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2} \\
&= \frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}
\end{aligned}$$

یعنی

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \tag{8.35}$$

ملتا ہے۔یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i_J(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{8.36}$$

مساوات 8.36 سے ظاہر ہے کہ $L = 0$ کی صورت میں $\phi = 0$ ہو گا لہٰذا دباو اور رو ہم زاویہ ہوں گے جبکہ $R = 0$ کی صورت میں $\phi = 90°$ ہو گا لہٰذا دباو سے رو $90°$ درجے پیچھے ہو گی۔مزاحمت اور امالہ کے دیگر قیمتوں کی صورت میں دباو سے رو $0°$ تا $90°$ کے مابین کسی مخصوص درجے پر پیچھے رہے گی۔اسی لئے مزاحمت اور امالہ کے ادوار کو پیچھے رہنے والے ادوار کہا جاتا ہے۔

سلسلہ وار جڑے مزاحمت اور امالہ کے دور کا حل آپ نے دیکھا۔یقیناً اس دور کا حل سلسلہ وار جڑے دو عدد مزاحمتی دور کے حل سے کئی گنا مشکل تھا۔آپ خود تصور کر سکتے ہیں کہ زیادہ تعداد کے پرزوں کا دور حل کرنا کتنا مشکل ہو

گا۔اسی مشکل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم **مخلوط تفاعل**[23] کو پیش کرتے ہیں جس سے ادوار کا حل انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے۔

مخلوط تفاعل اور سائن نما تفاعل کا تعلق **یولر مساوات**[24]

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \qquad \text{یولر مساوات} \tag{8.37}$$

دیتی ہے جہاں $j=\sqrt{-1}$ خیالی عدد ہے۔یولر مساوات میں $\cos\omega t$ **حقیقی**[25] مقدار اور $\sin\omega t$ **خیالی**[26] مقدار ہیں۔

حقیقی دنیا میں مخلوط جبری تفاعل نہیں پایا جاتا۔اس کے باوجود، دور پر سائن نما جبری تفاعل کی جگہ مخلوط جبری تفاعل مسلط کرتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔مخلوط جبری تفاعل کو حقیقی جبری تفاعل اور خیالی جبری تفاعل کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔خطی ادوار میں مسئلہ خطی میل کے تحت تمام جبری تفاعل کی علیحدہ علیحدہ اثرات کا مجموعہ لیا جا سکتا ہے۔یوں جبری تفاعل کے حقیقی جزو سے حل کا حقیقی جزو جبکہ جبری تفاعل کے خیالی جزو سے حل کا خیالی جزو حاصل ہو گا۔یوں مخلوط حل کے خیالی جزو کو رد کرتے ہوئے حقیقی جزو کو سائن نما تفاعل کا رد عمل تسلیم کیا جاتا ہے۔اس ترکیب کو مثال کی مدد سے زیادہ آسانی سے سمجھا جا سکتا ہے۔

مثال 8.10: شکل 8.5 میں حقیقی جبری تفاعل $V_0\cos\omega t$ کی جگہ مخلوط جبری تفاعل نسب کرتے ہوئے حقیقی $i(t)$ کے لئے حل کریں۔

حل: حقیقی جبری تفاعل $v(t)=V_0\cos\omega t$ کی جگہ دور میں مخلوط جبری تفاعل $v(t)=V_0e^{j\omega t}$ نسب کرتے ہوئے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$Ri(t)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=V_0e^{j\omega t}$$

جبری تفاعل $e^{j\omega t}$ کا تفرق $j\omega e^{j\omega t}$ بھی جبری تفاعل ہی ہے لہٰذا درج بالا مساوات کا مخلوط حل $i_M(t)=I_0e^{j\omega t}$ فرض کرتے ہیں جہاں I_0 نا معلوم مخلوط مستقل ہے۔اس حل کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$RI_0e^{j\omega t}+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_0e^{j\omega t}\right)=V_0e^{j\omega t}$$

---

[23] complex function
[24] Euler's equation
[25] real
[26] imaginary

درکار تفرق کے بعد

$$RI_0e^{j\omega t} + j\omega LI_0e^{j\omega t} = V_0e^{j\omega t} \tag{8.38}$$

ملتا ہے جس کے دونوں اطراف کو $e^{j\omega t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$RI_0 + j\omega LI_0 = V_0 \tag{8.39}$$

اس سے I_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$I_0 = \frac{V_0}{R + j\omega L} \tag{8.40}$$

یوں مخلوط رو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} i_M(t) &= I_0e^{j\omega t} \\ &= \frac{V_0e^{j\omega t}}{R + j\omega L} \end{aligned} \tag{8.41}$$

ہمیں اس کا حقیقی جزو درکار ہے۔یولر مساوات کی مدد سے درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i_M(t) = \frac{V_0(\cos\omega t + j\sin\omega t)}{R + j\omega L}$$

دائیں ہاتھ کسر کے بالائی اور نچلے حصے کو $R - j\omega t$ سے ضرب دیتے ہیں

$$\begin{aligned} i_M(t) &= \frac{V_0(\cos\omega t + j\sin\omega t)(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} \\ &= \frac{V_0(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t) + jV_0(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t)}{R^2 + \omega^2L^2} \end{aligned}$$

جہاں دوسرا قدم ترتیب دیتے ہوئے لکھا گیا ہے۔اس کا حقیقی جزو درکار حل ہے

$$i(t) = \frac{V_0(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t)}{R^2 + \omega^2L^2} \tag{8.42}$$

جو عین مساوات 8.27 ہی ہے۔

ہم مساوات 8.40 کے مخلوط مستقل I_0 کو زاویائی شکل میں لکھ کر بھی آگے بڑھ سکتے ہیں۔مخلوط مستقل کو درج

ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{V_0}{R + j\omega L} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}\angle \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}\, e^{j\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}}} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{-j\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}}
\end{aligned}
$$

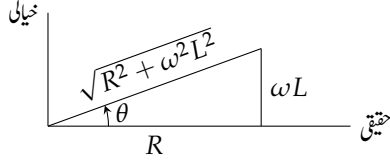
جہاں دوسری قدم پر کسر کے نچلی حصے کو مساوات 8.3 کی مدد سے زاویائی صورت میں لکھا گیا ہے اور تیسری قدم پر یولر مساوات کا استعمال کیا گیا ہے۔زاویہ $\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$ کو شکل 8.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں مخلوط رو درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$
\begin{aligned}
i_M &= I_0 e^{j\omega t} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{j\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)}
\end{aligned}
$$

اس مساوات میں $\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} = \theta$ لکھتے ہوئے حقیقی جزو لے کر حقیقی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \left.\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \theta)}\right|_{\text{حقیقی}} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \theta) \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} (\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta)
\end{aligned}
$$

شکل 8.6 سے $\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$ اور $\sin\theta = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$ پُر کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \left(\cos\omega t \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} + \sin\omega t \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\right) \\
&= \frac{V_0(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t)}{R^2+\omega^2 L^2}
\end{aligned}
$$

شکل 8.6: مثال 8.10 کا شکل۔

8.4 دوری سمتیہ

درج بالا حصے میں ہم نے دیکھا کہ حقیقی جبری تفاعل کی جگہ مخلوط جبری تفاعل نسب کرتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا جا سکتا ہے جس کا حقیقی جزو حقیقی جبری رد عمل ہو گا۔ اس ترکیب کو مثال 8.10 میں استعمال کیا گیا جہاں مساوات 8.38 کو $e^{j\omega t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 8.39 حاصل کی گئی۔ مساوات 8.39 سے I_0 حاصل کی گئی جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا گیا۔ مخلوط حل کا حقیقی جزو یعنی مساوات 8.42 درکار جواب ہے۔ مثال 8.8 میں مخصوص قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مخلوط رو کو مساوات 8.33 میں پیش کیا گیا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جزو $e^{j\omega t}$ جوں کا توں مخلوط جبری تفاعل اور مخلوط جبری حل میں پایا جاتا ہے۔

حقیقت میں کسی بھی خطی دور پر مخلوط جبری تفاعل مثلاً

$$v_M = V_0 e^{j\omega t} \tag{8.43}$$

مسلط کرنے سے دور میں تمام رو کی صورت $i_M(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi)}$ اور دباو کی صورت $v_M(t) = V_0 e^{j(\omega t+\phi)}$ ہو گی جہاں تمام رو اور دباو کی تعدد ω جبکہ ان کے انفرادی حیطے مختلف ہوں گے۔ ان کے انفرادی زاویہ ہٹاو بھی مختلف ہوں گے۔ یہاں حیطہ حقیقی مقدار ہے۔

یوں تعدد جانتے ہوئے کسی بھی مخلوط تفاعل مثلاً مخلوط رو کو اس کے حیطے I_0 اور زاویائی ہٹاو ϕ سے مکمل طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مخلوط تفاعل مثلاً

$$i_M(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi)} \tag{8.44}$$

سے حقیقی تفاعل درج ذیل

$$i(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi)}\Big|_{\text{حقیقی}} \tag{8.45}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 حقیقی مقدار ہے اور زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" لکھنے کا مطلب ہے کہ اس تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے یعنی

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \tag{8.46}$$

مساوات 8.45 حقیقی رو دیتی ہے۔اس طرز کے تمام مساوات میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور مساوات کا حقیقی جزو ہی حقیقی مقدار ہوتا ہے۔یوں ایسے مساوات میں لفظ "حقیقی" اور $e^{j\omega t}$ کو ذہن میں رکھتے ہوئے انہیں لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے۔مساوات 8.45 میں ایسا ہی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا

$$\hat{I} = I_0 e^{j\phi} \tag{8.47}$$

جہاں رو کو ٹوپی والے بڑے حرف سے ظاہر کیا گیا ہے۔دباو کی صورت میں تفاعل کو $\hat{V}$ لکھا جاتا۔ٹوپی والے بڑے حرف سے ظاہر کردہ تفاعل کو $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لینے سے حقیقی تفاعل حاصل کیا جاتا ہے۔

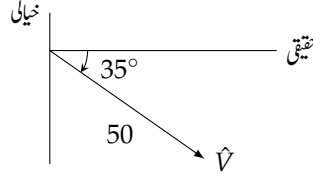
مساوات 8.47 کا صفحہ 458 پر مساوات 8.7 سے موازنہ کریں۔ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\hat{I}$ مخلوط عدد کو ظاہر کرتا ہے۔اگرچہ مساوات 8.47 درحقیقت میں مساوات 8.45 کو چھوٹا لکھنے کا طریقہ ہے لہٰذا $\hat{I}$ مخلوط عدد کو ظاہر نہیں کرتا لیکن دیکھا یہ گیا ہے کہ $\hat{I}$ کو مخلوط عدد تصور کر لینے سے ہمارے لئے آسانی پیدا ہوتی ہے۔آئیں $\hat{V}$ کو مخلوط عدد فرض کرتے ہوئے اس کو مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔

مثال 8.11: مخلوط دباو $v_M(t) = 50e^{j(100\pi t - 35^\circ)}$ سے $\hat{V}$ حاصل کرتے ہوئے $\hat{V}$ کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

حل: مخلوط دباو سے حقیقی دباو لکھتے ہیں۔

$$v(t) = 50e^{j(100\pi t - 35^\circ)}\Big|_{\text{حقیقی}}$$

اس مساوات کی تعدد $(\omega = 100\pi)$ کو ذہن نشین کرتے ہوئے لفظ "حقیقی" اور $e^{j100\pi t}$ لکھنے سے گریز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\hat{V} &= 50e^{-j35^\circ}\\ &= 50\underline{/-35^\circ}\end{aligned}$$

شکل 8.7: مثال 8.11 کی دوری سمتیہ۔

جسے شکل 8.7 میں مخلوط سطح پر دکھایا گیا ہے۔ حقیقی محدد سے گھڑی کی گردش کی جانب مثبت زاویہ ناپا جاتا ہے لہٰذا منفی زاویے کو گھڑی کی گردش کے الٹ جانب دکھایا گیا ہے۔ مخلوط اعداد اور $\hat{V}$ میں فرق رکھنے کی خاطر $\hat{V}$ کو مخلوط سطح پر تیر کی نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 8.11 میں $\hat{V}$ کو مخلوط سطح پر تیر کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے جسے دیکھ کر یوں معلوم ہوتا ہے جیسے $\hat{V}$ ایک سمتیہ ہے۔اسی حقیقت کی بنا پر $\hat{V}$ یا $\hat{I}$ کو **دوری سمتیہ**[27] کہتے ہیں اور شکل 8.7 کو **دوری سمتیہ شکل**[28] کہتے ہیں۔

مخلوط عدد لکھنے کے تمام طرز پر دوری سمتیہ کو لکھا جاتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= I_0 e^{j\phi} \\
&= I_0 \underline{/\phi} \\
&= I_x + jI_y
\end{aligned}
\tag{8.48}
$$

دوری سمتیہ کا حیطہ حقیقی اور مثبت مقدار ہوتا ہے۔یوں درج بالا مساوات میں I_0 حقیقی مثبت مقدار ہے۔

مساوات 8.46 کو تفاعل کی **وقتی دائرہ کار**[29] صورت کہتے ہیں جبکہ مساوات 8.48 کو تفاعل کی **تعددی دائرہ کار**[30] صورت کہتے ہیں۔

---

[27] phasor
[28] phasor diagram
[29] time domain
[30] frequency domain

مثال 8.12: درج ذیل تفاعل کے دوری سمتیہ دریافت کریں۔

$$v_1(t) = 20\cos(100t + 30^\circ), \quad v_2(t) = -40\sin(310t - 40^\circ), \quad i(t) = 22\cos(\omega t + 0.2\pi)$$

حل: دباو $v_1(t)$ کو مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھ کر

$$v_1(t) = 20e^{j(100t+30^\circ)}\Big|_{\text{حقیقی}}$$

تعدد کو ذہن نشین کرتے ہوئے، e^{j100t} نہ لکھتے ہوئے اور زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" نہ لکھتے ہوئے دوری سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\hat{V}_1 = 20e^{j30^\circ} = 20\underline{/30^\circ}$$

اسی طرح $v_2(t)$ کو $\cos$ کی صورت میں یوں لکھتے ہیں کہ حیطہ مثبت لکھا جائے۔

$$v_2 = -40\sin(310t - 40^\circ) = 40\cos(310t - 40^\circ + 90^\circ) = 40\cos(310t + 50^\circ)$$

اس کو مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھتے ہیں۔

$$v_2 = 40e^{j(310t+50^\circ)}\Big|_{\text{حقیقی}}$$

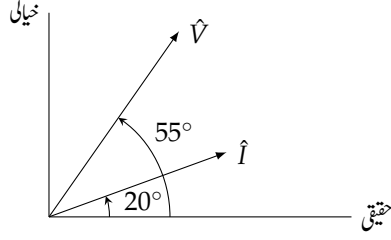
اس مساوات کے زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" نہ لکھتے ہوئے اور ساتھ ہی ساتھ e^{j310t} نہ لکھتے ہوئے دوری سمتیہ حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\hat{V}_2 = 40e^{j50^\circ}$$

جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_2 = 40\underline{/50^\circ}$$

رو کو بھی مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھ کر

$$i(t) = 22e^{j(\omega t+0.2\pi)}\Big|_{\text{حقیقی}}$$

شکل 8.8: دوری سمتیات کے اشکال۔

دوری سمتیہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I} = 22e^{j0.2\pi} = 22\underline{/0.2\pi}$$

مشق 8.4: درج ذیل کو تعددی دائرہ کار میں لکھیں جہاں $\omega = 400\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔

$$\hat{I} = 35\underline{/44°}, \quad \hat{V} = 12e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad \hat{I} = 33\underline{/-77°}$$

جوابات: $i(t) = 35\cos(400t + 44°)$ ، $v(t) = 12\cos(400t + \frac{\pi}{4})$ ، $i(t) = 33\cos(400t - 77°)$

شکل 8.8 میں $\hat{I} = 25\underline{/20°}$ اور $\hat{V} = 30e^{j55°}$ کھینچے گئے ہیں جہاں سے دوری سمتیات کا زاویائی تعلق بھی ظاہر ہوتا ہے۔ شکل 8.8 میں دباو سے رو $33°$ درجے پیچھے ہے۔

کسی بھی حقیقی تفاعل مثلاً حقیقی دباو کو $v(t) = V_0\cos(\omega t + \phi)$ صورت میں لکھتے ہوئے جہاں V_0 مثبت حقیقی مقدار ہو، V_0 اور ϕ استعمال کرتے ہوئے دوری سمتیہ فوراً

$$\hat{V} = V_0\underline{/\phi} \tag{8.49}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 8.13: درج ذیل کے دوری سمتیات فوراً لکھیں۔

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= 20\cos(132t - 27^\circ) \\
v_1(t) &= -100\cos(20t - 60^\circ) \\
i_2(t) &= -90\sin(450t - 100^\circ)
\end{aligned}
$$

حل: رو i_1 میں $I_0 = 20$ اور $\phi = -27^\circ$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$
\hat{I}_1 = 20\underline{/-27^\circ}
$$

دباو کا حیطہ منفی ہے لہٰذا مثبت حیطہ حاصل کرنے کی خاطر دباو کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$
v_1(t) = 100\cos(20t - 60^\circ + 180^\circ) = 100\cos(20t + 120^\circ)
$$

جس سے دوری سمتیہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\hat{V}_1 = 100\underline{/120^\circ}
$$

رو $i_2(t)$ کو $i(t) = I_0\cos(\omega t + \phi)$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$
i_2(t) = 90\cos(450t - 100^\circ + 90^\circ) = 90\cos(450t - 10^\circ)
$$

یوں دوری سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$
\hat{I}_2 = 90\underline{/-10^\circ}
$$

8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کے انفرادی دوری سمتی تعلق

شکل 8.9 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں۔ مزاحمت R پر مخلوط دباو $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)}$ مسلط کرنے سے مزاحمت میں مخلوط رو $i(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)}$ گزرے گی۔ اوہم کے قانون کے تحت

$$V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)} = R I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = R I_0 e^{j\phi_i}$$

ہو گا۔ اس کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$\hat{V} = R\hat{I} \tag{8.50}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\hat{V} = V_0 e^{j\phi_v}$$
$$\hat{I} = I_0 e^{j\phi_i}$$

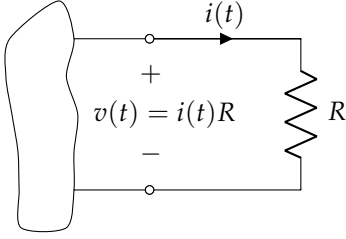
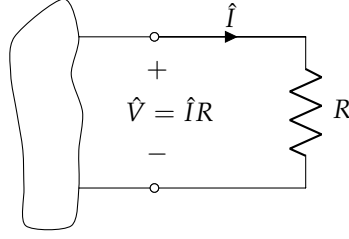
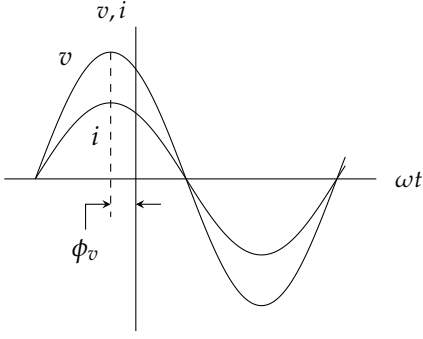
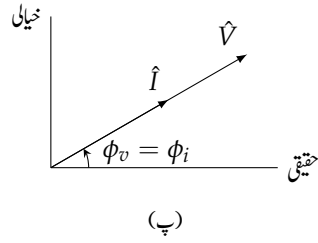
یعنی

$$\begin{aligned}\hat{V} &= V_0\underline{/\phi_v}\\ \hat{I} &= I_0\underline{/\phi_i}\end{aligned} \tag{8.51}$$

کے برابر ہیں۔ اس طرح مساوات 8.50 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$V_0\underline{/\phi_v} = R I_0\underline{/\phi_i}$$

یاد رہے کہ دوری سمتیات میں V_0 اور I_0 حقیقی اور مثبت مقدار ہیں۔ درج بالا مساوات میں بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ کے مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں یعنی

$$\begin{aligned}V_0 &= I_0 R\\ \phi_v &= \phi_i\end{aligned} \tag{8.52}$$

شکل 8.9: مزاحمت کے دباو اور رو کے تعددی اور وقتی تفاعل۔

اس طرح مزاحمت کی رو اور دباو ہم زاویہ ہیں۔ مساوات 8.52 کی مدد سے مساوات 8.51 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\hat{V} = V_0 \angle \phi_v$$
$$\hat{I} = \frac{V_0}{R} \angle \phi_v \tag{8.53}$$

شکل 8.9-پ میں مزاحمت کے $\hat{I}$ اور $\hat{V}$ دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جو تعددی تفاعل ہیں جبکہ شکل 8.9-ت میں مزاحمت کے $i(t)$ اور $v(t)$ دکھائے گئے ہیں جو وقتی تفاعل ہیں۔

مثال 8.14: شکل 8.9-ب میں $10\,\Omega$ کے مزاحمت پر $v(t) = 22\cos(30t - 66^\circ)$ دباو مسلط کی گئی ہے۔ مزاحمت کے رو کو وقتی دائرہ کار میں لکھیں۔ رو کی تعددی دائرہ کار صورت شکل 8.9-الف سے دریافت کریں۔

حل: اوہم کے قانون کی مدد سے رو کی وقتی دائرہ کار صورت معلوم کرتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{22\cos(30t - 66^\circ)}{10} = 2.2\cos(30t - 66^\circ)\,\mathrm{A}$$

آئیں اب رو کی تعددی دائرہ کار صورت حاصل کرتے ہیں۔ دوری دباو

$$\hat{V} = 22\angle{-66^\circ}\,\mathrm{V}$$

ہے لہٰذا دوری رو درج ذیل ہو گی۔

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R} = \frac{22\angle{-66^\circ}}{10} = 2.2\angle{-66^\circ}\,\mathrm{A}$$

مشق 8.5: بارہ اوہم کے مزاحمت میں دوری رو $\hat{I} = 37\angle{43^\circ}\,\mathrm{A}$ ہے جبکہ تعدد $\omega = 172\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ دباو کی وقتی دائرہ کار صورت لکھیں۔

جواب: $v(t) = 444\cos(172t + 43^\circ)\,\mathrm{V}$

شکل 8.10 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں۔ امالہ گیر کے دباو اور رو کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$v = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{8.54}$$

امالہ گیر پر مخلوط دباو $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)}$ مسلط کرنے سے اس میں مخلوط رو $i(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)}$ پیدا ہو گی۔ان قیمتوں کو درج بالا مساوات میں پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)} &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)}\right] \\ &= j\omega L I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)} \end{aligned}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = j\omega L I_0 e^{j\phi_i}$$

ملتا ہے جو دوری مساوات ہے۔یہ دوری مساوات درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\hat{V} = j\omega L\hat{I} \tag{8.55}$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات 8.54 جو تفرقی اور وقتی مساوات ہے سے مساوات 8.55 حاصل ہوتا ہے جو تعددی اور الجبرائی مساوات ہے۔دوری سمتیات کی مدد سے تفرقی مساوات سے الجبرائی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔آپ جانتے ہیں کہ الجبرائی مساوات حل کرنا نہایت آسان ہوتا ہے جبکہ تفرقی مساوات کو حل کرنا دشوار ہوتا ہے۔یہی وجہ ہے کہ دوری سمتیات اتنے مقبول ہیں۔

آپ جانتے ہیں کہ

$$\underline{/90^\circ} = e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j\sin 90^\circ = j \tag{8.56}$$

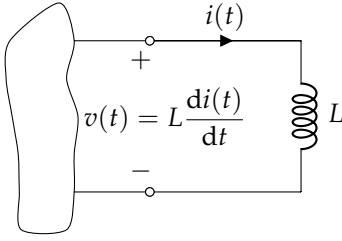
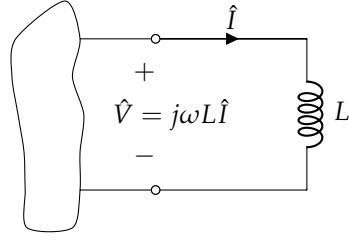
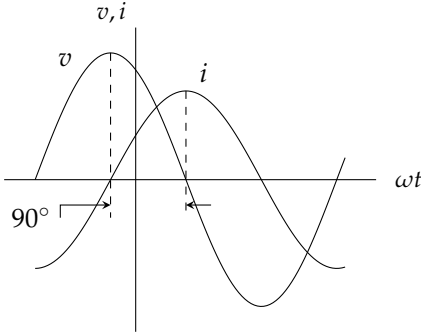
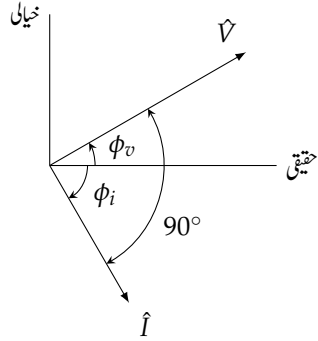
لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 8.55 کو

$$\hat{V} = \omega L\hat{I}e^{j90^\circ}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = \omega L I_0 e^{j(\phi_i+90^\circ)} \tag{8.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 8.57 میں دونوں ہاتھ کے مخلوط اعداد صرف اور صرف اس وقت برابر ہوں گے جب ان کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں لہٰذا اس مساوات کے تحت

$$\begin{aligned} V_0 &= \omega L I_0 \\ \phi_v &= \phi_i + 90^\circ \end{aligned} \tag{8.58}$$

شکل 8.10: امالہ کے دباو اور رو کے تعددی اور وقتی تفاعل۔

ہوں گے۔یوں دباو کا زاویہ، رو کے زاویے سے $90°$ درجے زیادہ ہے لہٰذا رو سے دباو $90°$ درجے آگے ہے یا دباو سے رو $90°$ پیچھے ہے۔شکل 8.10-پ میں دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جہاں دباو سے رو $90°$ درجے پیچھے دکھایا گیا ہے۔

مساوات 8.57 سے وقتی مساوات درج ذیل لکھی جائے گی جہاں مساوات 8.58 کے تحت $\phi_v = \phi_i + 90°$ ہو گا۔

$$V_0 \cos(\omega t + \phi_v) = \omega L I_0 \cos(\omega t + \phi_i + 90°) \tag{8.59}$$

درج بالا مساوات میں دیے دباو اور رو کو شکل 8.10-ت میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 8.15: شکل 8.10 میں $4\,\text{mH}$ امالہ گیر پر $v(t) = 12\cos(1000t + 22^\circ)$ دباو مسلط کی جاتی ہے۔امالہ گیر کی رو دریافت کریں۔

حل:دوری سمتیہ دباو درج ذیل ہے۔

$$\hat{V} = 12\underline{/22^\circ}$$

مساوات 8.55 کی مدد سے دوری سمتیہ رو حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{\hat{V}}{j\omega L} \\
&= \frac{12\underline{/22^\circ}}{j1000 \times 0.004} \\
&= \frac{12\underline{/22^\circ}}{4\underline{/90^\circ}} \\
&= 3\underline{/-68^\circ}\,\text{A}
\end{aligned}$$

جہاں مساوات 8.56 کا استعمال کرتے ہوئے $j = \underline{/90^\circ}$ لکھا گیا ہے۔یوں رو کی وقتی دائرہ کار صورت درج ذیل ہو گی۔

$$i(t) = 3\cos(1000t - 68^\circ)\,\text{A}$$

مشق 8.6: امالہ کی قیمت $10\,\text{mH}$ جبکہ اس میں رو $\hat{I} = 8\underline{/44^\circ}$ کی تعدد $500\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ ہے۔دباو کی وقتی دائرہ کار صورت دریافت کریں۔

جواب: $v(t) = 40\cos(500t + 134^\circ)\,\text{V}$

شکل 8.11 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں جہاں برق گیر پر دباو $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_v)$ مسلط کی گئی ہے۔ برق گیر کی تفرقی مساوات

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{8.60}$$

میں مخلوط دباو اور مخلوط رو پُر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)} &= C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)}\right] \\ &= j\omega C V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)} \end{aligned}$$

یعنی

$$I_0 e^{j\phi_i} = j\omega C e^{j\phi_v}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\hat{I} = j\omega C\hat{V} \tag{8.61}$$

مساوات 8.60 برق گیر کی تفرقی مساوات ہے جبکہ مساوات 8.61 برق گیر کی الجبرائی مساوات ہے۔

مساوات 8.61 میں $j = e^{j90^\circ}$ لکھنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I_0 e^{j\phi_i} = \omega C e^{j(\phi_v+90^\circ)} \tag{8.62}$$

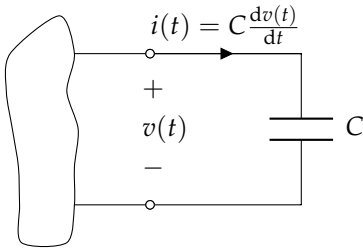
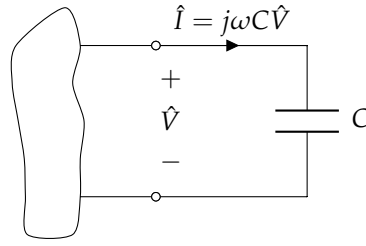
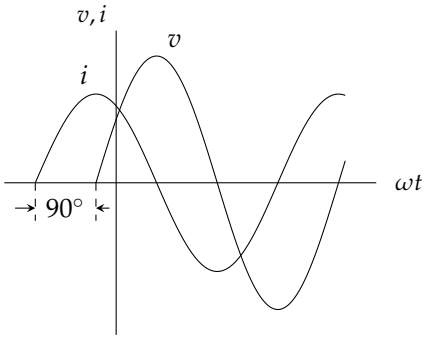
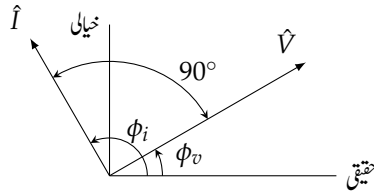
اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اور صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں اطراف کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں۔

$$\begin{aligned} I_0 &= \omega C V_0 \\ \phi_i &= \phi_v + 90^\circ \end{aligned} \tag{8.63}$$

درج بالا مساوات کے تحت دباو سے رو 90° درجے آگے ہے۔

مساوات 8.62 سے وقتی دائرہ کار صورت لکھتے ہیں جہاں درج بالا مساوات کے تحت $\phi_i = \phi_v + 90^\circ$ ہو گا۔

$$I_0 \cos(\omega t + \phi_i) = \omega C V_0 \cos(\omega t + \phi_v + 90^\circ) \tag{8.64}$$

شکل 8.11-پ میں دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جبکہ شکل-ت میں دباو اور رو کی وقتی دائرہ کار صورت دکھائی گئی ہے۔

شکل 8.11: برق گیر کے دباو اور رو کے تعددی اور وقتی تقاعل۔

مثال 8.16: شکل 8.11 میں $100\,\mu\mathrm{F}$ برق گیر پر $v(t) = 7\cos(5000t - 60^\circ)\,\mathrm{V}$ کا دباو مسلط کیا گیا ہے۔ رو حاصل کریں۔

حل: مسلط دباو کی دوری سمتیہ لکھتے ہیں۔

$$\hat{V} = 7\underline{/-60^\circ}$$

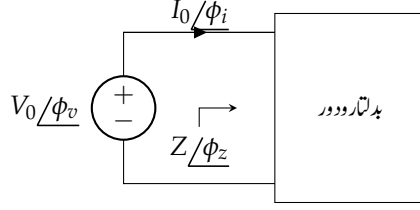
یوں رو درج ذیل ہو گی

$$\begin{aligned}\hat{I} &= j\omega C\hat{V}\\ &= j5000 \times 100 \times 10^{-6} 7\underline{/-60^\circ}\\ &= 3.5\underline{/-60^\circ + 90^\circ}\\ &= 3.5\underline{/30^\circ}\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

جس کی وقتی دائرہ کار صورت درج ذیل ہے۔

$$i(t) = 3.5\cos(5000t + 30^\circ)\,\mathrm{A}$$

مشق 8.7: شکل 8.11 میں $330\,\mu\mathrm{F}$ برق گیر کی رو $\hat{I} = 11\underline{/-12^\circ}\,\mathrm{A}$ ہے۔ رو کی تعدد $6000\,\mathrm{Hz}$ ہے۔ دباو کی وقتی دائرہ کار صورت حاصل کریں۔

جواب: $v(t) = 0.884\cos(12000\pi t - 102^\circ)\,\mathrm{V}$

شکل 8.12: برقی رکاوٹ کی تعریف۔

8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی

قانون اوہم کے تحت برقی مزاحمت کو $R=\frac{V}{I}$ لکھا جا سکتا ہے۔بالکل اسی طرح، شکل 8.12 میں دوری سمتیہ دباو اور دوری سمتیہ رو کی شرح کو برقی رکاوٹ[31] کہتے اور Z سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Z}=\frac{\hat{V}}{\hat{I}} \tag{8.65}$$

برقی رکاوٹ کو عموماً رکاوٹ کہا جاتا ہے۔چونکہ $\hat{V}$ اور $\hat{I}$ مخلوط اعداد ہیں لہٰذا $\boldsymbol{Z}$ بھی مخلوط عدد ہو گا۔

$$\boldsymbol{Z}=\frac{V_0\angle\phi_v}{I_0\angle\phi_i}=\frac{V_0}{I_0}\angle\phi_v-\phi_i=Z_0\angle\phi_z \tag{8.66}$$

چونکہ دباو اور رو کی شرح کو اوہم Ω میں ناپتے ہیں لہٰذا رکاوٹ کی اکائی بھی اوہم ہے۔یوں بدلتا رو دور کی رکاوٹ یک سمت رو دور کی مزاحمت کی مانند ہے۔رکاوٹ کو مستطیل طرز میں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{Z}(\omega)=R(\omega)+jX(\omega) \tag{8.67}$$

جہاں R حقیقی جزو یعنی مزاحمت[32] ہے جبکہ X خیالی جزو یعنی متعاملیت[33] ہے۔رکاوٹ مخلوط عدد ہے نا کہ دوری سمتیہ چونکہ دوری سمتیہ سائن نما تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ رکاوٹ سائن نما تفاعل نہیں ہے۔

کسی بھی مخلوط عدد کی طرح، رکاوٹ کو بھی مستطیل طرز اور زاویائی طرز میں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{Z}=Z\angle\phi_z=R+jX \tag{8.68}$$

---

impedance[31]
resistive[32]
reactance[33]

جہاں ایک طرز سے دوسری طرز میں تبادلہ درج ذیل مساوات سے کیا جاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
R &= Z\cos\phi_z \\
X &= Z\sin\phi_z \qquad \text{زاویائی سے مستطیل طرز}
\end{aligned} \tag{8.69}
$$

$$
\begin{aligned}
Z &= \sqrt{R^2+X^2} \\
\phi_z &= \tan^{-1}\frac{X}{R} \qquad \text{مستطیل سے زاویائی طرز}
\end{aligned} \tag{8.70}
$$

مساوات 8.65 رکاوٹ کی تعریف ہے۔اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.50، مساوات 8.55 اور مساوات 8.61 سے بالترتیب مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کی رکاوٹ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Z_R &= R \\
Z_L &= j\omega L = jX_L \\
Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -jX_C
\end{aligned} \tag{8.71}
$$

درج بالا میں برق گیر کی رکاوٹ لکھتے ہوئے $\frac{1}{j} = \frac{1\times j}{j\times j} = \frac{j}{-1} = -j$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یوں امالی متعاملیت اور برق گیری متعاملیت درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
X_L &= \omega L \\
X_C &= \frac{1}{\omega C}
\end{aligned} \tag{8.72}
$$

مشق 8.8: مزاحمت $R = 30\,\Omega$، امالہ $L = 20\,\text{mH}$ اور برق گیر $C = 2000\,\mu\text{F}$ کی رکاوٹ $100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$، $1000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ اور $9000\,\text{Hz}$ تعدد پر دریافت کریں۔

جوابات: پہلی تعدد پر $Z_R = 30\,\Omega$، $Z_L = j2\,\Omega$، $Z_C = -j5\,\Omega$ ہیں۔
دوسری تعدد پر $Z_R = 30\,\Omega$، $Z_L = j20\,\Omega$، $Z_C = -j0.5\,\Omega$ ہیں۔
تیسری تعدد پر $Z_R = 30\,\Omega$، $Z_L = j1131\,\Omega$، $Z_C = -j0.00884\,\Omega$ ہیں۔

قوانین کرخوف وقتی دائرہ کار کے علاوہ تعددی دائرہ کار میں بھی لاگو ہوتے ہیں۔ صفحہ 68 پر حصہ 2.5 میں سلسلہ وار جڑے مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت مساوات 2.33 میں حاصل کیا گیا۔اسی طرح صفحہ 73 پر حصہ 2.8 میں متعدد مساوی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت مساوات 2.46 میں پیش کیا گیا۔ بالکل اسی طرح متعدد سلسلہ وار جڑے رکاوٹ اور متعدد متوازی رکاوٹ کے مساوی رکاوٹ حاصل کی جا سکتی ہے۔ مشق میں آپ سے ایسا ہی کرنے کو کہا گیا ہے۔

مساوات 8.73 متعدد سلسلہ وار رکاوٹ کی مساوی رکاوٹ دیتی ہے جبکہ مساوات 8.74 متعدد متوازی رکاوٹوں کی مساوی رکاوٹ دیتی ہے۔

$$Z_s = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n \quad \text{سلسلہ وار رکاوٹوں کا مساوی رکاوٹ} \tag{8.73}$$

$$\frac{1}{Z_m} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \cdots + \frac{1}{Z_n} \quad \text{متوازی رکاوٹوں کا مساوی رکاوٹ} \tag{8.74}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات ہو بہو مزاحمتوں کی مساوات کی طرح ہیں۔

مشق 8.9: صفحہ 69 پر شکل 2.23 میں سلسلہ وار مزاحمت جڑے دکھائے گئے ہیں۔مزاحمتوں کی جگہ رکاوٹ نسب کرتے ہوئے، مخلوط دباو اور مخلوط رو کے استعمال سے مساوی رکاوٹ کی مساوات حاصل کریں۔ اسی طرح متعدد رکاوٹوں کو متوازی جوڑتے ہوئے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔

جوابات: مساوات 8.73 اور مساوات 8.74

مثال 8.17: متعدد برق گیر سلسلہ وار جڑے ہیں۔ان کی انفرادی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔ مساوی رکاوٹ سے مساوی برقی گیر دریافت کریں۔

حل: برق گیر C_1 تا C_n کی ω تعدد پر رکاوٹیں $\frac{1}{j\omega C_1}$ ، $\frac{1}{j\omega C_2}$ ، $\cdots$ ، $\frac{1}{j\omega C_n}$ ہوں گی۔ان کے مساوی برق گیر کو C_s کہتے ہوئے مساوی رکاوٹ $\frac{1}{j\omega C_s}$ لکھا جائے گا۔یوں مساوات 8.73 کے تحت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

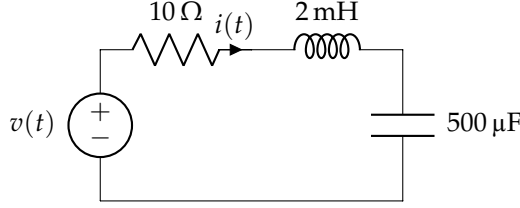
$$\frac{1}{j\omega C_s}=\frac{1}{j\omega C_1}+\frac{1}{j\omega C_2}+\frac{1}{j\omega C_3}+\cdots+\frac{1}{j\omega C_n}$$

اس مساوات کے دونوں اطراف کو $j\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جو عین مساوات 6.22 ہی ہے۔

$$\frac{1}{C_s}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

مشق 8.10: متعدد برق گیر متوازی جڑے ہیں۔ان کی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.74 کی مدد سے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔مساوی رکاوٹ سے مساوی برق گیر کی مساوات حاصل کریں۔متعدد متوازی برق گیر کا مساوی برق گیر دیتی ہے۔

مشق 8.11: متعدد امالہ گیر متوازی جڑے ہیں۔ان کی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.74 کی مدد سے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔مساوی رکاوٹ سے مساوی امالہ گیر کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: صفحہ 354 پر مساوات 6.29

شکل 8.13: مثال 8.18 کا دور۔

مشق 8.12: متعدد امالہ گیر سلسلہ جڑے ہیں۔ان کی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.73 کی مدد سے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔مساوی رکاوٹ سے مساوی امالہ گیر کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: صفحہ 352 پر مساوات 6.27

مثال 8.18: شکل 8.13 میں منبع دباو کو درپیش مساوی رکاوٹ $50\,\mathrm{Hz}$ اور $2000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ تعدد پر دریافت کریں۔دباو $v(t) = 30\cos(\omega t + 45^\circ)\,\mathrm{V}$ کی صورت میں دونوں تعدد پر وقتی دائرہ کار میں رو دریافت کریں۔

حل: مساوات 8.71 سے انفرادی پرزوں کی رکاوٹ $50\,\mathrm{Hz}$ تعدد پر حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Z_R &= 10\,\Omega\\
Z_L &= j2\pi \times 50 \times 2 \times 10^{-3} = j0.6283\,\Omega\\
Z_C &= \frac{1}{j2\pi \times 50 \times 500 \times 10^{-6}} = -j6.3662\,\Omega
\end{aligned}
$$

چونکہ تمام پرزے سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا ان کا مساوی رکاوٹ درج ذیل ہو گا۔

$$
\boldsymbol{Z}_s = 10 + j0.6283 - j6.3662 = 10 - j5.7379\,\Omega
$$

دباو کو دوری سمتیہ صورت میں لکھتے ہوئے تعددی دائرہ کار میں رو حاصل کرتے ہیں۔

$$
\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\boldsymbol{Z}_s} = \frac{30\underline{/45^\circ}}{10 - j5.7379} = \frac{30\underline{/45^\circ}}{11.5292\underline{/-29.85^\circ}} = 2.6\underline{/74.85^\circ}\,\mathrm{A}
$$

اس سے وقتی دائرہ کار میں رو لکھتے ہیں۔

$$i(t) = 2.6\cos(100\pi t + 74.85°)\,\text{A}$$

اب $2000\,\text{rad s}^{-1}$ پر قیمتیں دریافت کرتے ہیں۔انفرادی رکاوٹ درج ذیل ہیں

$$\begin{aligned} Z_R &= 10\,\Omega \\ Z_L &= j2000 \times 2 \times 10^{-3} = j4\,\Omega \\ Z_C &= \frac{1}{j2000 \times 500 \times 10^{-6}} = -j1\,\Omega \end{aligned}$$

جن سے مساوی رکاوٹ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{Z}_s = 10 + j4 - j1 = 10 + j3 = 10.44\underline{/16.7°}\,\Omega$$

یوں دوری رو درج ذیل ہو گی

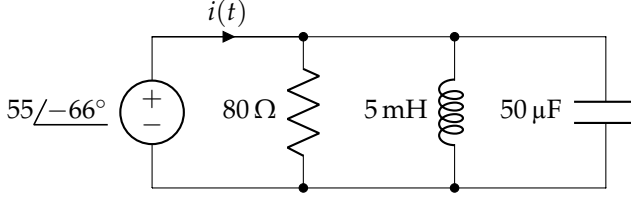
$$\hat{I} = \frac{30\underline{/45°}}{10.44\underline{/16.7°}} = 2.87\underline{/28.3°}$$

جس سے وقتی دائرہ کار میں رو لکھتے ہیں۔

$$i(t) = 2.87\cos(2000t + 28.3°)\,\text{A}$$

آپ نے دیکھا کہ $50\,\text{Hz}$ پر کل رکاوٹ برق گیر کی خاصیت رکھتا ہے یعنی $\boldsymbol{Z} = R - jX$ لکھا جاتا ہے جبکہ $2000\,\text{rad s}^{-1}$ پر $\boldsymbol{Z} = R + jX$ لکھا جاتا ہے جو امالی خاصیت کو ظاہر کرتا ہے۔

مشق 8.13: شکل 8.14 میں وقتی دائرہ کار میں رو حاصل کریں۔تعدد $1000\,\text{rad s}^{-1}$ ہے۔

جواب: $8.28\cos(1000t - 151.23°)\,\text{A}$

شکل 8.14: مشق 8.13 کا دور۔

بدلتا رو ادوار میں برقی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}$ کے علاوہ برقی فراوانی[34] $\boldsymbol{Y}$ بھی نہایت اہم ثابت ہوتی ہے۔رکاوٹ کے بالعکس تناسب کو فراوانی کہتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Y} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}} \tag{8.75}$$

مخلوط رکاوٹ کی صورت میں فراوانی بھی مخلوط ہو گی۔فراوانی کو سیمنز S میں ناپا جاتا ہے۔فراوانی کو مستطیل طرز درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$\boldsymbol{Y} = G + jB \tag{8.76}$$

جہاں G کو ایصالیت[35] اور B کو تاثریت[36] کہتے ہیں۔

رکاوٹ سے فراوانی کے اجزاء درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہوئے

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \tag{8.77}$$

حاصل کی جا سکتی ہے یعنی

$$\begin{aligned} G &= \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B &= \frac{-X}{R^2 + X^2} \end{aligned} \tag{8.78}$$

اسی طرح فراوانی کے اجزاء سے رکاوٹ کے اجزاء درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} R &= \frac{G}{G^2 + B^2} \\ X &= \frac{-B}{G^2 + B^2} \end{aligned} \tag{8.79}$$

---

[34] admittance
[35] conductance
[36] susceptance

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخلوط رکاوٹ کی صورت میں G اور R آپس میں بالعکس متناسب نہیں ہیں۔اسی طرح B اور X بھی آپس میں بالعکس متناسب نہیں ہیں۔اگر رکاوٹ میں $X=0$ ہو تب $G=\frac{1}{R}$ ہو گا۔

انفرادی پرزوں کی فراوانی درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
Y_R &= \frac{1}{R} = G \\
Y_L \frac{1}{j\omega L} &= \frac{1}{\omega L}\angle{-90^\circ} \\
Y_C &= j\omega C = \omega C\angle{90^\circ}
\end{aligned}
\tag{8.80}
$$

جہاں انفرادی مزاحمت کی صورت میں $\frac{1}{R}=G$ لکھا گیا ہے۔

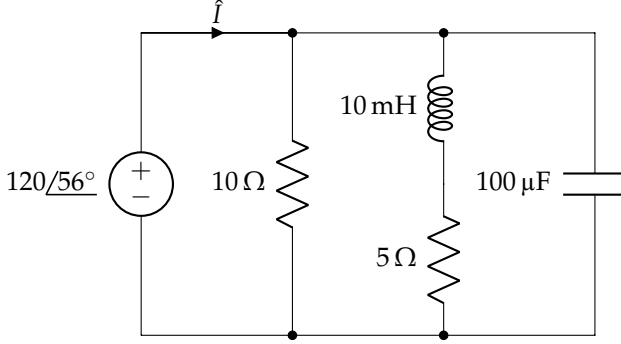
قوانین کرخوف فراوانی پر بھی لاگو ہوتے ہیں لہٰذا باب دوم کی طرز پر سلسلہ وار اور متوازی جڑے فراوانی کی مساوی فراوانی بالترتیب درج ذیل مساوات سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$
\frac{1}{\boldsymbol{Z}_s} = \frac{1}{\boldsymbol{Y}_1} + \frac{1}{\boldsymbol{Y}_2} + \frac{1}{\boldsymbol{Y}_3} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{Y}_n} \quad \text{سلسلہ وار جڑے}
\tag{8.81}
$$

$$
\boldsymbol{Y}_m = \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{Y}_2 + \boldsymbol{Y}_3 + \cdots + \boldsymbol{Y}_n \quad \text{متوازی جڑے}
\tag{8.82}
$$

مثال 8.19: شکل 8.15 میں منبع کے متوازی جڑے دور کی فراوانی $500\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر دریافت کرتے ہوئے رو $\hat{I}$ حاصل کریں۔

حل:دور میں تین متوازی حصوں کے انفرادی رکاوٹ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 10\,\Omega \\
Z_2 &= 5 + j500 \times 10 \times 10^{-3} = 5 + j5\,\Omega \\
Z_3 &= \frac{1}{j500 \times 100 \times 10^{-6}} = -j20\,\Omega
\end{aligned}
$$

شکل 8.15: مثال 8.19 کا دور۔

یوں تینوں حصوں کے فراوانی درج ذیل ہو گی۔

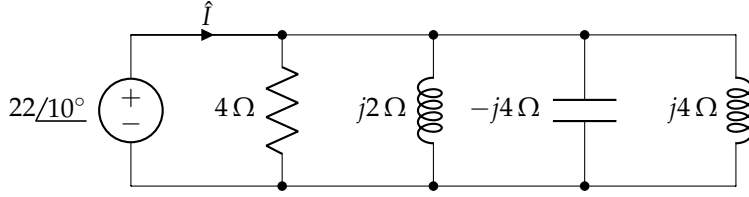
$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{10} = 0.1\,\mathrm{S}\\
Y_2 &= \frac{1}{5+j5} = 0.1 - j0.1\,\mathrm{S}\\
Y_3 &= \frac{1}{-j20} = j0.05\,\mathrm{S}
\end{aligned}
$$

یوں تینوں حصوں کو متوازی جوڑنے سے درج ذیل مساوی فراوانی حاصل ہو گی

$$
\boldsymbol{Y}_m = (0.1) + (0.1 - j0.1) + (j0.05) = 0.2 - j0.05\,\mathrm{S}
$$

جسے استعمال کرتے ہوئے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= \boldsymbol{Y}\hat{V}\\
&= (0.2 - j0.05)(120\angle 56^\circ)\\
&= 24.74\angle 41.96^\circ\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

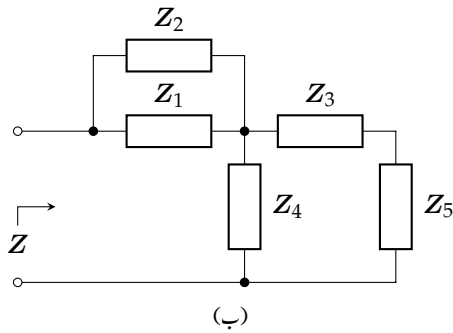
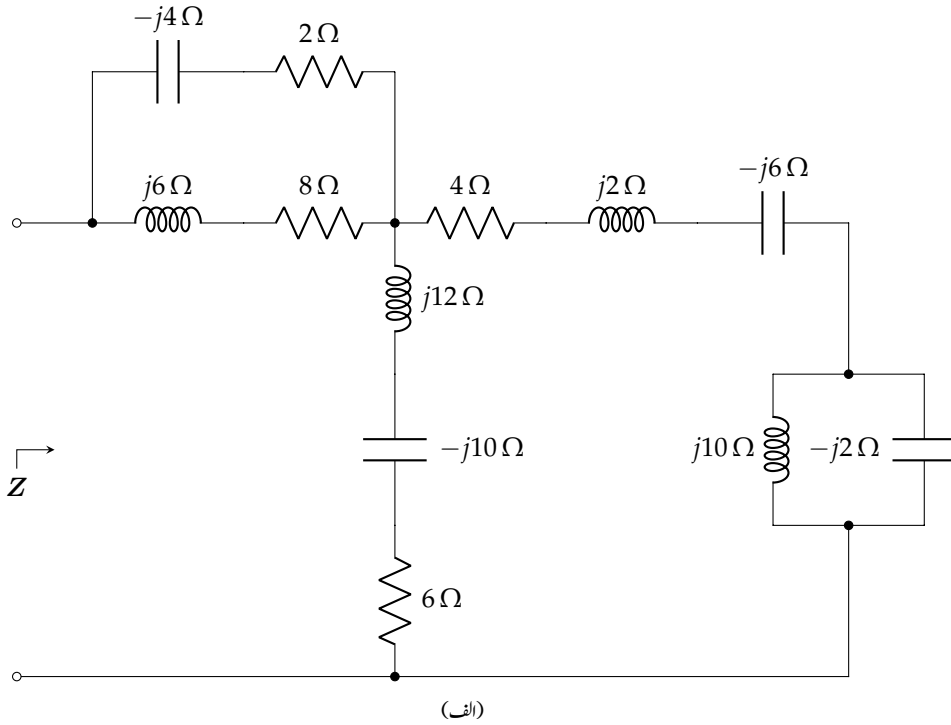
مشق 8.14: شکل 8.16 میں منبع کے متوازی دور کی فراوانی دریافت کرتے ہوئے $\hat{I}$ حاصل کریں۔

شکل 8.16: مشق 8.14 کا دور۔

جواب: $12.298\underline{/-53.4^\circ}\,\text{A}$

آئیں مختلف انداز میں جڑے متعدد پرزوں کی مساوی رکاوٹ حاصل کرنا ایک مثال کی مدد سے سیکھیں۔ مساوی رکاوٹ حاصل کرنے کا عمل بالکل ویسا ہی ہے جیسا مزاحمتی دور کا مساوی مزاحمت حاصل کرنے کا عمل۔ مزاحمتی دور میں حقیقی اعداد استعمال ہوتے ہیں جبکہ رکاوٹی دور میں مخلوط اعداد استعمال ہوتے ہیں۔

مثال 8.20: شکل 8.17-الف میں متعدد پرزے مختلف طرز پر جڑے دکھائے گئے ہیں۔ دور کے دو سروں پر مساوی رکاوٹ Z دریافت کریں۔

حل: شکل 8.17-ب میں دور کے مختلف حصوں کی نشاندہی کی گئی ہے جن کا مساوی رکاوٹ آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ان حصوں کی رکاوٹ دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_1 &= 8 + j6\,\Omega\\
\boldsymbol{Z}_2 &= 2 - j4\,\Omega\\
\boldsymbol{Z}_3 &= 4 + j2 - j6 = 4 - j4\,\Omega\\
\boldsymbol{Z}_4 &= 6 - j10 + j12 = 6 + j2\,\Omega
\end{aligned}$$

شکل 8.17: مثال 8.20 کا دور۔

اور

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\boldsymbol{Z}_5} &= \frac{1}{j10} + \frac{1}{-j2} \\
&= \frac{1}{j10} - \frac{1}{j2} \\
&= \frac{j2 - j10}{(j10)(j2)} \\
&= \frac{-j8}{-20}\,\mathrm{S}
\end{aligned}
$$

سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$
\boldsymbol{Z}_5 = \frac{20}{j8} = -j\frac{5}{2}\,\Omega
$$

رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_3$ اور $\boldsymbol{Z}_5$ سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا ان کا مساوی رکاوٹ درج ذیل ہو گا۔

$$
\boldsymbol{Z}_{35} = \boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_5 = 4 - j4 - j\frac{5}{2} = 4 - j7.5\,\Omega
$$

اب $\boldsymbol{Z}_4$ اور $\boldsymbol{Z}_{35}$ متوازی ہیں لہٰذا ان رکاوٹ کی فراوانی دریافت کرتے ہیں۔یوں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_4 &= \frac{1}{\boldsymbol{Z}_4} \\
&= \frac{1}{6 + j2} \\
&= \left(\frac{1}{6 + j2}\right)\left(\frac{6 - j2}{6 - j2}\right) \\
&= \frac{6 - j2}{36 + 4} \\
&= 0.15 - j0.05
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}_{35} &= \frac{1}{\boldsymbol{Z}_{35}} \\
&= \frac{1}{4 - j7.5} \\
&= \frac{4 + j7.5}{4^2 + 7.5^2} \\
&= 0.05536 + j0.10381
\end{aligned}
$$

حاصل کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_{435} &= \boldsymbol{Y}_4 + \boldsymbol{Y}_{35}\\ &= 0.15 - j0.05 + 0.05536 + j0.10381\\ &= 0.20536 + j0.05381\,\mathrm{S}\end{aligned}$$

جس سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{435} &= \frac{1}{\boldsymbol{Y}_{435}}\\ &= \frac{1}{0.20536 + j0.05381}\\ &= 4.55665 - j1.19397\,\Omega\end{aligned}$$

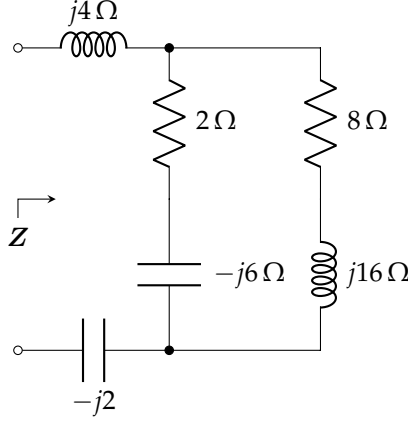
حاصل ہوتا ہے جو متوازی جڑے Z_4 اور Z_{35} کا مساوی رکاوٹ ہے۔رکاوٹ Z_1 اور Z_2 متوازی جڑے ہیں۔ان کا مساوی رکاوٹ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{12} &= \frac{\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2}\\ &= \frac{(8+j6)(2-j4)}{(8+j6)+(2-j4)}\\ &= 3.46154 - j2.69231\,\Omega\end{aligned}$$

یوں شکل 8.17 میں دیے دور کا مساوی مزاحمت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z} &= \boldsymbol{Z}_{12} + \boldsymbol{Z}_{435}\\ &= 3.46154 - j2.69231 + 4.55665 - j1.19397\\ &= 8.01819 - j3.88628\,\Omega\end{aligned}$$

مشق 8.15: شکل 8.18 میں Z حاصل کریں۔

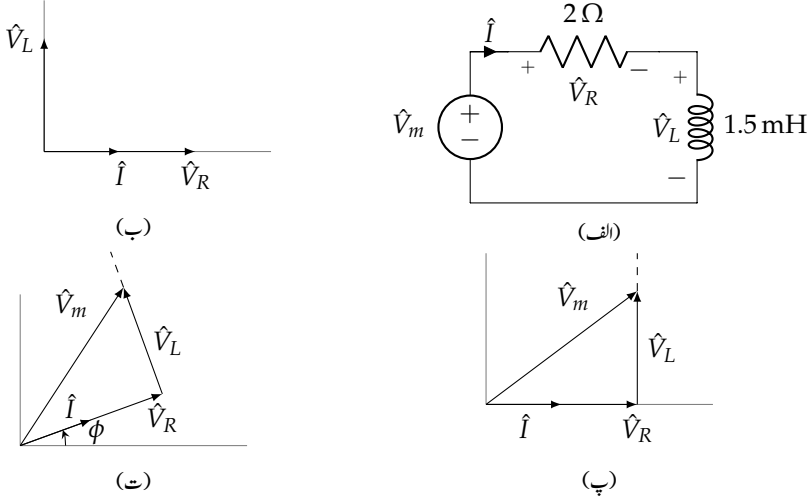
جواب: $\boldsymbol{Z} = \frac{24}{5} - j\frac{22}{5}\,\Omega$

شکل 8.18: مشق 8.15 کا دور۔

8.7 دوری سمتیات کے اشکال

رکاوٹ کی قیمت تعدد پر منحصر ہوتی ہے۔یوں دور میں رو اور دباو کا دارومدار بھی تعدد پر ہو گا۔دوری سمتی اشکال کی مدد سے رو اور دباو پر تعدد کے اثر پر غور کرنے میں مدد ملتی ہے۔آئیں اس پر چند مثال دیکھیں۔

مثال 8.21: شکل 8.19 میں $\hat{I}$ ، $\hat{V}_R$ ، $\hat{V}_L$ اور $\hat{V}_m$ کے دوری سمتیہ مختلف تعدد پر کھینچیں۔تعدد $\omega = 1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $\hat{I} = 5\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A}$ کی صورت میں $\hat{V}_m$ حاصل کریں۔

حل:دوری سمتیات کے خط کسی ایک دوری سمتیہ کے حوالے سے کھینچے جاتے ہیں۔ہم $\hat{I}$ کو حوالہ سمتیہ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔مزید، ہم اس دوری سمتیہ کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں یعنی ہم $\hat{I} = I_0\underline{/0^\circ}$ تصور کرتے ہیں۔تعدد ω پر مزاحمتی رکاوٹ $Z_R = R$ جبکہ امالی رکاوٹ $Z_L = \omega L\underline{/90^\circ}$ ہو گی لہٰذا ان پرزوں پر دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{V}_R = \hat{I}Z_R = I_0R\underline{/0^\circ}$$
$$\hat{V}_L = \hat{I}Z_L = I_0\omega L\underline{/90^\circ}$$

شکل 8.19: مثال 8.21 کے اشکال۔

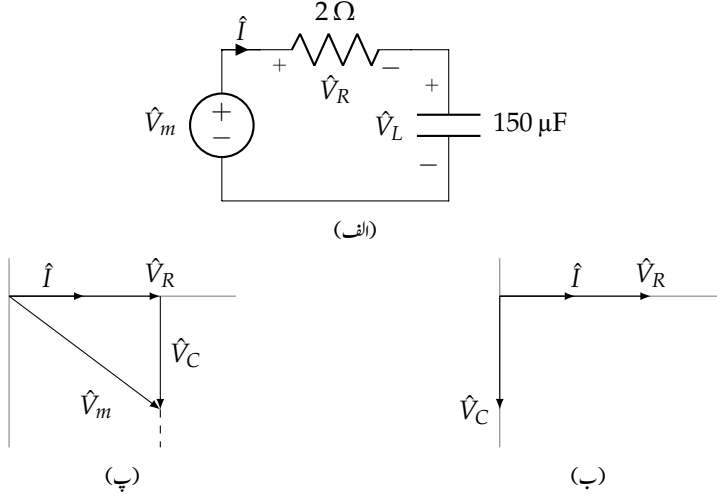
یوں مزاحمت پر دباو عین رو کے ہم زاویہ ہے جبکہ امالہ پر دباو، رو سے $90°$ آگے ہے۔ شکل 8.19-ب میں ان دوری سمتیات کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ مزاحمتی رکاوٹ کی قیمت پر تعدد کا کوئی اثر نہیں لہٰذا $\hat{V}_R$ کی قیمت اور زاویہ تعدد تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے۔ اس کے برعکس امالی رکاوٹ تعدد کے راست متناسب ہے لہٰذا تعدد بڑھانے سے Z_L کی قیمت بڑھے گی اور یوں $\hat{V}_L$ کا حیطہ بھی بڑھے گا جبکہ اس کا زاویہ جوں کا توں رہے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\omega = 0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $\hat{V}_L$ کی قیمت صفر ہو گی جبکہ تعدد بڑھانے سے $\hat{V}_L$ کی نوک خیالی محدد پر رہتے ہوئے مبدا سے دور ہو گی۔

شکل 8.19-الف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_L$$

شکل 8.19-پ میں اس سمتی جمع کو دکھایا گیا ہے جہاں دم سے سر جوڑنے کا طریقہ استعمال کیا گیا ہے۔ تعدد کو کم یا زیادہ کرنے سے $\hat{V}_L$ کا حیطہ کم اور زیادہ ہو گا لہٰذا شکل میں $\hat{V}_m$ کی نوک نقطہ دار لکیر پر حرکت کرے گی۔ صفر تعدد کی صورت میں $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ ہو گا جبکہ لامتناہی تعدد پر $\hat{V}_m$ کا زاویہ تقریباً $90°$ ہو گا۔

$\omega = 1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ اور $\hat{I} = 5\underline{/0°}\,\mathrm{A}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{V}_R = \hat{I}\boldsymbol{Z}_R = (5\underline{/0°})(2) = 10\underline{/0°}\,\mathrm{V}$$
$$\hat{V}_L = \hat{I}\boldsymbol{Z}_L = (5\underline{/0°})(1000 \times 1.5 \times 10^{-3}) = 7.5\underline{/90°}\,\mathrm{V}$$

شکل 8.20: مثال 8.22 کے اشکال۔

جس سے منبع کا دباو درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_m &= 10\underline{/0^\circ} + 7.5\underline{/90^\circ}\\ &= 10 + j7.5\\ &= 12.5\underline{/36.87^\circ}\end{aligned}$$

یہی جواب شکل 8.19-پ سے بھی ترسیمی طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حوالہ دوری سمتیہ کا زاویہ صفر درجے رکھنا ضروری نہیں ہے۔ہم $\hat{I} = I_0\underline{/\phi}$ لے سکتے ہیں۔ایسی صورت میں تمام سمتیات اسی زاویے سے گھوم جائیں گے۔شکل 8.19-ت میں ایسا ہی دکھایا گیا ہے۔

مثال 8.22: شکل 8.20 میں $\hat{I}$ ، $\hat{V}_R$ ، $\hat{V}_L$ اور $\hat{V}_m$ کے دوری سمتیہ مختلف تعدد پر کھینچیں۔

حل:رو کو حوالہ لیتے ہیں۔یوں $\hat{I} = I_0\underline{/0^\circ}$ ہو گا۔تعدد ω پر مزاحمتی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_R = R$ جبکہ برق گیر کی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_C = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ}$ ہو گی لہٰذا ان پرزوں پر دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{V}_R = \hat{I}\boldsymbol{Z}_R = I_0 R\underline{/0^\circ}$$
$$\hat{V}_C = \hat{I}\boldsymbol{Z}_C = \frac{I_0}{\omega C}\underline{/-90^\circ}$$

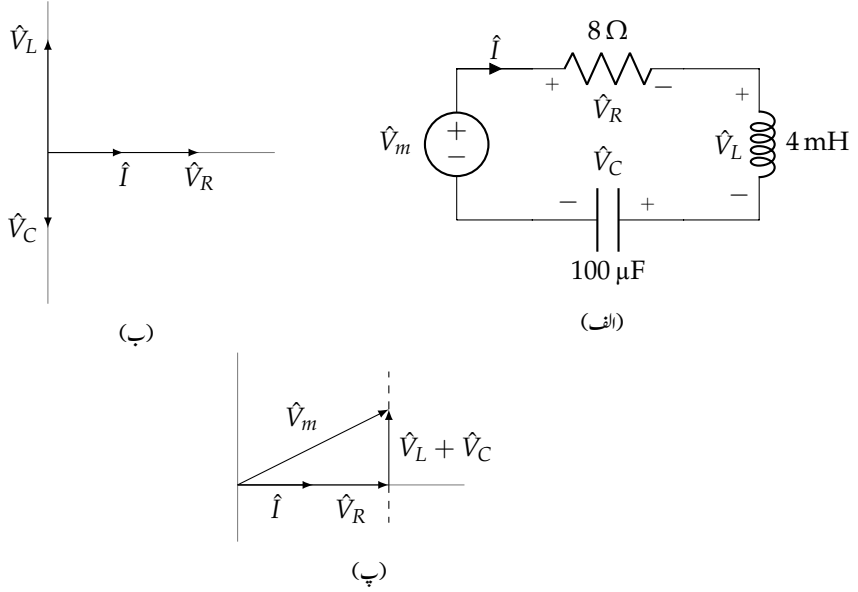
یوں مزاحمت پر دباو عین رو کے ہم زاویہ ہے جبکہ برق گیر پر دباو، رو سے 90° پیچھے ہے۔شکل 8.20-ب میں ان دوری سمتیات کو دکھایا گیا ہے۔چونکہ مزاحمتی رکاوٹ کی قیمت پر تعدد کا کوئی اثر نہیں لہٰذا $\hat{V}_R$ کی قیمت اور زاویہ تعدد تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے۔اس کے برعکس برق گیر رکاوٹ تعدد کے بالعکس متناسب ہے لہٰذا تعدد بڑھانے سے Z_C کی قیمت کم ہو گی اور یوں $\hat{V}_C$ کا حیطہ بھی کم ہو گا جبکہ اس کا زاویہ جوں کا توں رہے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی تعدد پر $\hat{V}_C$ کی قیمت صفر ہو گی جبکہ تعدد کم کرنے سے $\hat{V}_C$ کی نوک خیالی محدد پر رہتے ہوئے مبدا سے دور ہو گی۔

شکل 8.20-الف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_C$$

شکل 8.20-پ میں اس سمتی جمع کو دکھایا گیا ہے جہاں دم سے سر جوڑنے کا طریقہ استعمال کیا گیا ہے۔تعدد کو کم یا زیادہ کرنے سے $\hat{V}_C$ کا حیطہ زیادہ اور کم ہو گا لہٰذا شکل میں $\hat{V}_m$ کی نوک نقطہ دار لکیر پر حرکت کرے گی۔لامتناہی تعدد کی صورت میں $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ ہو گا جبکہ صفر تعدد پر $\hat{V}_m$ کا زاویہ تقریباً -90° ہو گا۔

مثال 8.23: شکل 8.21-الف میں دکھائے دور کے $\hat{I}$ ، $\hat{V}_R$ ، $\hat{V}_L$ ، $\hat{V}_C$ اور $\hat{V}_m$ دوری سمتیہ مختلف تعدد پر کھینچیں۔

حل:یہاں بھی رو کو حوالہ دوری سمتیہ $\hat{I} = I_0\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A}$ تصور کرتے ہیں۔مزاحمت کا دباو اسی سمت میں ہو گا جبکہ امالہ کا دباو 90° آگے اور برق گیر کا دباو 90° پیچھے ہو گا۔شکل 8.21-ب میں انہیں دکھایا گیا ہے۔

شکل 8.21: مثال 8.23 کے اشکال۔

جن تعدد پر $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ہو، ان تعدد پر امالہ کا دباو، برق گیر کے دباو سے زیادہ ہو گا لہٰذا $\hat{V}_L+\hat{V}_C$ کا زاویہ $90°$ ہو گا یعنی ان کا مجموعی تاثیر امالی ہو گا۔ شکل 8.21-پ میں ایسی ہی تعدد پر درج ذیل سمتی مجموعہ دکھایا گیا ہے۔

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_L + \hat{V}_C$$

جس تعدد پر $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ہو یعنی $(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}})$ اس تعدد پر $\hat{V}_L + \hat{V}_C = 0$ ہو گا لہٰذا درج بالا مجموعے سے $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ حاصل ہو گا۔ تعدد ω_0 سلسلہ وار جڑے LC کی قدرتی تعدد یا اس کی **گھمکی تعدد**[37] کہلاتی ہے۔ تعدد کم اور زیادہ کرنے سے $\hat{V}_m$ کی نوک نقطہ دار لکیر پر حرکت کرتی ہے۔ عین ω_0 پر $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ ہو گا۔ گھمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\hat{V}_m$ کی نوک، نقطہ دار لکیر پر رہتے ہوئے، افقی محدد سے اوپر ہو گی جبکہ ω_0 سے کم تعدد پر $\hat{V}_m$ کی نوک، نقطہ دار لکیر پر رہتے ہوئے، افقی محدد سے نیچے ہو گی۔ شکل 8.21-پ گھمکی تعدد سے زیادہ تعدد کی صورت حال دکھا رہا ہے۔

[37] resonant frequency

مثال 8.24: گزشتہ مثال میں $\hat{V}_m = 120\angle 40^\circ\,\mathrm{V}$ ہے۔ شکل 8.21-الف میں پرزوں کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے $\omega = 1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $\hat{V}_m$ اور $\hat{I}$ دوری سمتیوں کے خط کھینچیں۔

حل: اس مرتبہ ہم $\hat{V}_m$ کو حوالہ لیتے ہیں۔ دی گئی تعدد پر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_R &= 8\,\Omega\\
\boldsymbol{Z}_L &= 1000 \times 0.004\angle 90^\circ = 4\angle 90^\circ\,\Omega\\
\boldsymbol{Z}_C &= \frac{1}{1000 \times 100 \times 10^{-6}}\angle -90^\circ = 10\angle -90^\circ\,\Omega
\end{aligned}$$

شکل 8.21-الف کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_L + \hat{V}_C$$

جس میں قیمتیں پُر کرتے ہوئے

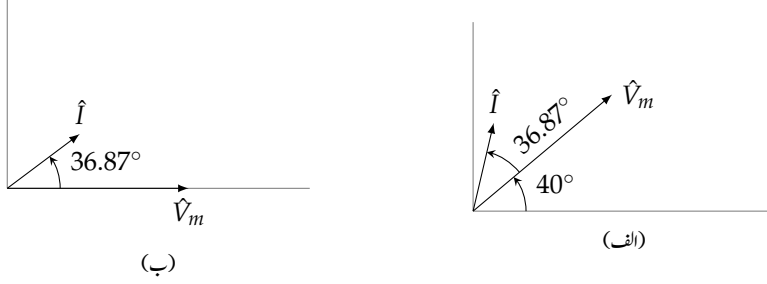
$$\begin{aligned}
120\angle 40^\circ &= \hat{I}\boldsymbol{Z}_R + \hat{I}\boldsymbol{Z}_L + \hat{I}\boldsymbol{Z}_C\\
&= \hat{I}\,(8 + 4\angle 90^\circ + 10\angle -90^\circ)\\
&= \hat{I}\,(8 + j4 - j10)\\
&= \hat{I}\,(8 - j6)\\
&= \hat{I}\,(10\angle -36.87^\circ)
\end{aligned}$$

ملتا ہے۔ اس مساوات سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{120\angle 40^\circ}{10\angle -36.87^\circ}\\
&= 12\angle 76.87^\circ
\end{aligned}$$

$\hat{V}_m$ اور $\hat{I}$ کو شکل 8.22-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں حیطوں کو درست تناسب سے نہیں دکھایا گیا ہے۔

دور کی قدرتی تعدد درج ذیل ہے

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.004 \times 100 \times 10^{-6}}} = 1581\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

شکل 8.22: مثال 8.24 کے دوری سمتیوں کے خط۔

جبکہ دور کو $1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر حل کیا گیا ہے۔یہی وجہ ہے کہ دور برق گیر تاثیر رکھتا ہے اور رو منبع کے دباو سے $37.87°$ درجے آگے ہے۔عین قدرتی تعدد پر

$$\boldsymbol{Z}_L = j1581 \times 0.004 = 6.32\underline{/90°}\,\Omega$$

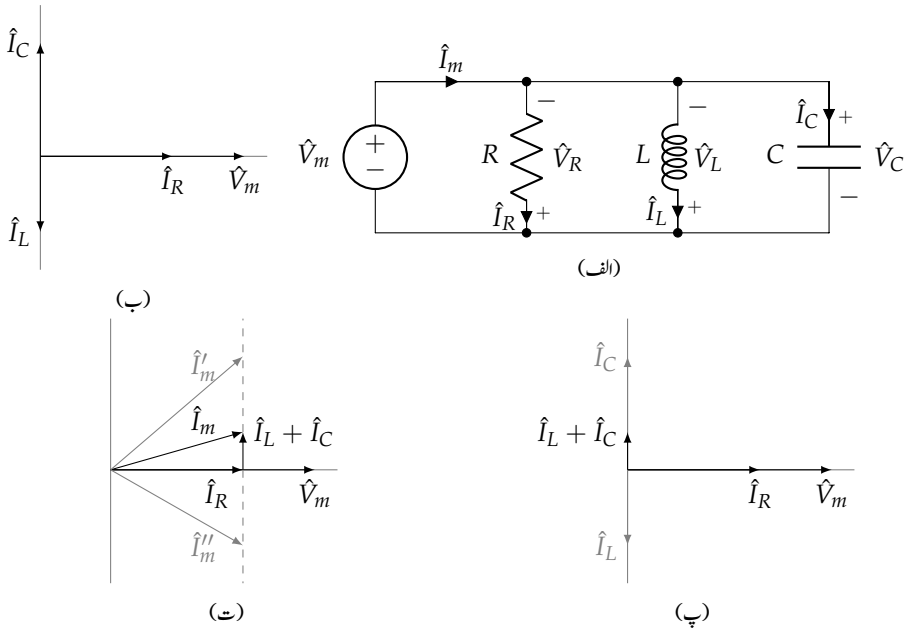
$$\boldsymbol{Z}_C = \frac{1}{j1581 \times 100 \times 10^{-6}} = 6.32\underline{/-90°}\,\Omega$$

حاصل ہوتے ہیں۔

عموماً حوالہ دوری سمتیہ کا زاویہ $0°$ رکھا جاتا ہے۔یوں اگر ہم منبع دباو کا زاویہ $40°$ کی جگہ $0°$ چنتے تب $\hat{V}_m = 120\underline{/0°}$ لکھا جاتا اور رو درج ذیل حاصل ہوتی۔

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}} = \frac{120\underline{/0°}}{10\underline{/-36.87°}} = 12\underline{/36.87°}\,\mathrm{A}$$

انہیں شکل 8.22-ب میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل-الف کو گھڑی کے گردش کی سمت میں $40°$ گھمانے سے شکل-ب ملتا ہے۔یوں حوالہ سمتیہ کا زاویہ تبدیل کرنے سے تمام دوری سمتیہ کی شکل گھوم جاتی ہے، البتہ انفرادی دوری سمتیات کے تعلق پر کوئی فرق نہیں پڑتا۔یوں شکل-الف اور شکل-ب دونوں میں رو $36.87°$ درجے دباو سے آگے ہے۔

مثال 8.25: شکل 8.23 کے دور میں دیے تمام دوری سمتیات کے خط کھینچیں۔

شکل 8.23: مثال 8.25 کے اشکال۔

حل: دباو $\hat{V}_m$ کو حوالہ دوری سمتیہ لیتے ہوئے اس کا زاویہ صفر درجے چنتے ہیں۔ تینوں پرزوں پر $\hat{V}_m$ دباو پایا جاتا ہے لہٰذا ان کی انفرادی رو درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\hat{I}_R &= \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}_R} = \frac{V_m\angle 0^\circ}{R} = \frac{V_m}{R}\angle 0^\circ \\
\hat{I}_L &= \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}_L} = \frac{V_m\angle 0^\circ}{\omega L\angle 90^\circ} = \frac{V_m}{\omega L}\angle -90^\circ \\
\hat{I}_C &= \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}_C} = \frac{V_m\angle 0^\circ}{\frac{1}{\omega C}\angle -90^\circ} = \omega C V_m\angle 90^\circ
\end{aligned}$$

انہیں شکل 8.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔

قدرتی تعدد $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ پر امالی رکاوٹ اور برق گیری رکاوٹ کے مقدار برابر $(\omega L = \frac{1}{\omega C})$ ہوتے ہیں۔ قدرتی تعدد پر $\hat{I}_m = \hat{I}_R$ ہو گا۔ قدرتی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\boldsymbol{Z}_L > \boldsymbol{Z}_C$ لہٰذا $I_C > I_L$ ہو گا۔ اس صورت حال کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔

کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

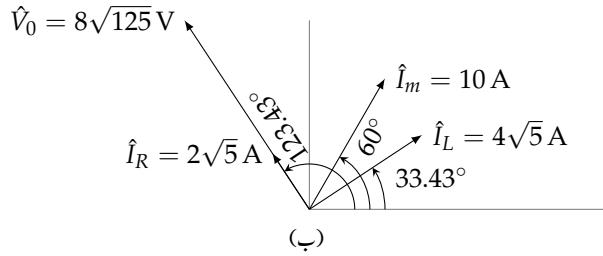
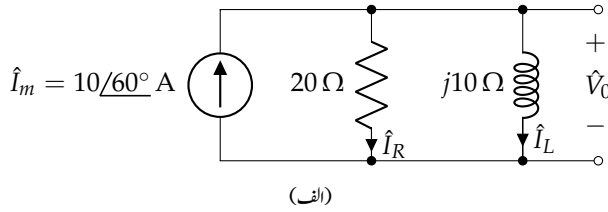
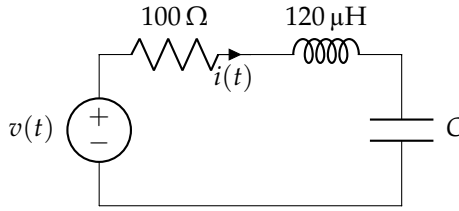
$$\hat{I}_m = \hat{I}_R + \hat{I}_L + \hat{I}_C$$

جسے $\omega > \omega_0$ کی صورت میں شکل-ت میں دکھایا گیا ہے۔ تعدد مزید بڑھانے سے $\hat{I}_m$ کی نوک نقطہ دار لکیر پر رہتے ہوئے افقی محدد سے مزید دور ہو گی۔ دوری سمتیہ $\hat{I}'_m$ ایسی صورت کو ظاہر کرتی ہے۔

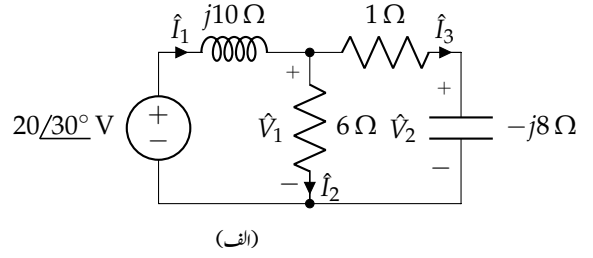
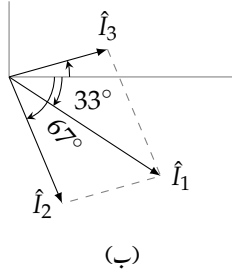
قدرتی تعدد سے کم تعدد $(\omega < \omega_0)$ پر $\boldsymbol{Z}_C > \boldsymbol{Z}_L$ اور $I_L > I_C$ ہو گا لہٰذا دوری سمتیہ کی نوک نقطہ دار لکیر پر افقی محدد سے نیچے کی طرف ہو گی۔ دوری سمتیہ $\hat{I}''_m$ ایسی صورت کو ظاہر کرتی ہے۔

مشق 8.16: شکل 8.24-الف میں تمام رو اور دباو کے دوری سمتیات کے خط کھینچیں۔ تقسیم رو کا کلیہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ جواب کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

(الف)

(ب)

شکل 8.24: مشق 8.16 کے اشکال۔

شکل 8.25: مشق 8.17 کا دور۔

مشق 8.17: شکل 8.25 میں برق گیر کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر $v(t) = 120\cos(5500t - 30^\circ)\,\mathrm{V}$ اور $i(t)$ ہم زاویہ ہوں گے۔اس تعدد پر $i(t)$ دریافت کریں۔

جواب: $C = 275.48\,\mu\mathrm{F}$ ، $i(t) = 1.2\cos(5500t - 30^\circ)\,\mathrm{A}$

شکل 8.26: مثال 8.26 کے اشکال۔

8.8 کرخوف مساوات

یک سمت رو ادوار کو کرخوف کے قوانین سے حل کرنا ہم گزشتہ بابوں میں دیکھ چکے ہیں۔قوانین کرخوف دوری سمتیات پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔یوں بدلتا رو ادوار کو کرخوف مساوات سے بالکل یک سمت رو ادوار کی طرح حل کیا جا سکتا ہے۔یک سمت رو ادوار حل کرنے کے تمام ترکیب یعنی مسئلہ تھونن، مسئلہ نارٹن، مسئلہ تبادلہ منبع، مسئلہ خطی میل، تقسیم رو اور تقسیم دباو کو بدلتا رو ادوار حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔بدلتا رو ادوار کی صورت میں مخلوط الجبرا کا استعمال کیا جاتا ہے۔متعدد منبع کی صورت میں اگر تمام منبع کی تعدد یکساں ہو تب درج بالا تمام ترکیب قابل استعمال ہوں گے البتہ مختلف تعدد کی صورت میں مسئلہ خطی میل کی مدد سے انفرادی منبع کے وقتی دائرہ کار میں جوابات کا مجموعہ لیتے ہوئے ادوار حل کئے جا سکتے ہیں۔ایسے ایک دور کو مثال 8.33 میں حل کیا گیا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے چند سادہ مثال اسی طرح حل کئے۔آئیں نسبتاً مشکل ادوار حل کریں۔

مثال 8.26: شکل 8.26 میں تمام نا معلوم دباو اور رو دریافت کریں۔

حل: ہم پہلے منبع سے جڑی کل رکاوٹ حاصل کرتے ہوئے $\hat{I}_1$ دریافت کرتے ہیں جسے جانتے ہوئے $j2\,\Omega$ امالہ کا دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس دباو کو $\hat{V}_m$ سے منفی کرتے ہوئے $\hat{V}_1$ حاصل کیا جائے گا۔اب $\hat{V}_1$ جانتے ہوئے $\hat{I}_2$ حاصل کیا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے $\hat{I}_3 = \hat{I}_1 - \hat{I}_2$ لکھا جا سکتا ہے۔آخر میں $\hat{V}_2 = \hat{I}_3(-j8)$ لکھتے ہوئے برق گیر کا دباو حاصل کیا جائے گا۔

منبع کو درج ذیل رکاوٹ نظر آتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} &= j10 + \frac{6(1-j8)}{6+1-j8} \\
&= j10 + \frac{6-j48}{7-j8} \\
&= j10 + \left(\frac{6-j48}{7-j8}\right)\left(\frac{7+j8}{7+j8}\right) \\
&= j10 + \frac{426-j288}{113} \\
&= 3.7699 + j7.4513 \\
&= 8.3507\underline{/63.163^\circ}\,\Omega
\end{aligned}
$$

یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_1 &= \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}} \\
&= \frac{20\underline{/30^\circ}}{8.3507\underline{/63.163^\circ}} \\
&= 2.395\underline{/-33.163^\circ}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

جس سے $\hat{V}_1$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_1 &= \hat{V}_m - \hat{I}_1(j2) \\
&= 20\underline{/30^\circ} - (2.395\underline{/-33.163^\circ})(2\underline{/90^\circ}) \\
&= 4.219 - j10.049 \\
&= 10.8987\underline{/-67.224^\circ}\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

آپ $\hat{V}_1$ کو یوں بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_1 &= \frac{6(1-j8)}{6+1-j8}\hat{I}_1 \\
&= 10.8987\underline{/-67.224^\circ}\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

اس کے علاوہ $\hat{V}_1$ کو تقسیم دباو کے کلیے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_1 &= \left(\frac{\frac{6(1-j8)}{6+1-j8}}{j10+\frac{6(1-j8)}{6+1-j8}}\right) 20\underline{/30^\circ} \\
&= 10.8987\underline{/-67.224^\circ}\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

دباو $\hat{V}_1$ جانتے ہوئے $\hat{I}_2$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &= \frac{\hat{V}_1}{6}\\ &= \frac{10.8987\underline{/-67.224^\circ}}{6}\\ &= 1.816\underline{/-67.224^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

یوں $\hat{I}_3$ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \hat{I}_1 - \hat{I}_2\\ &= 2.395\underline{/-33.163^\circ} - 1.816\underline{/-67.224^\circ}\\ &= (2.005 - j1.310) - (0.703 - j1.675)\\ &= 1.302 + j0.365\\ &= 1.352\underline{/15.65^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

آپ $\hat{I}_3$ کو درج ذیل سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \frac{\hat{V}_1}{1-j8}\\ &= 1.352\underline{/15.65^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

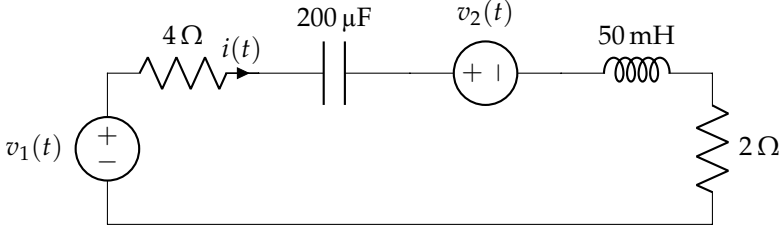
برق گیر کا دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= \hat{I}_3(-j8)\\ &= (1.352\underline{/15.65^\circ})(8\underline{/-90^\circ})\\ &= 10.816\underline{/-74.35^\circ}\,\text{V}\end{aligned}$$

اس دباو کو تقسیم دباو کے کلیے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= \left(\frac{-j8}{1-j8}\right)\hat{V}_1\\ &= 10.816\underline{/-74.35^\circ}\,\text{V}\end{aligned}$$

اس کے علاوہ $1\,\Omega$ مزاحمت میں $\hat{I}_3$ گزرتی ہے۔یوں $\hat{V}_1$ سے اس مزاحمت کا دباو منفی کرنے سے بھی برق گیر کا دباو حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= \hat{V}_1 - (\hat{I}_3)(1)\\ &= 10.816\underline{/-74.35^\circ}\,\text{V}\end{aligned}$$

شکل 8.27: مشق 8.18 کا دور۔

آپ نے دیکھا کہ آپ اپنے مرضی کی کوئی بھی ترکیب استعمال کرتے ہوئے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔ شکل-ب میں دوری رو دکھائے گئے ہیں جہاں نقطہ دار لکیر قانون متوازی الاضلاع سے $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 + \hat{I}_3$ دکھاتی ہے۔

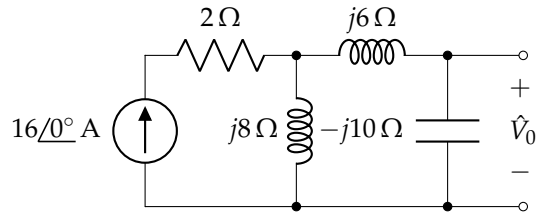
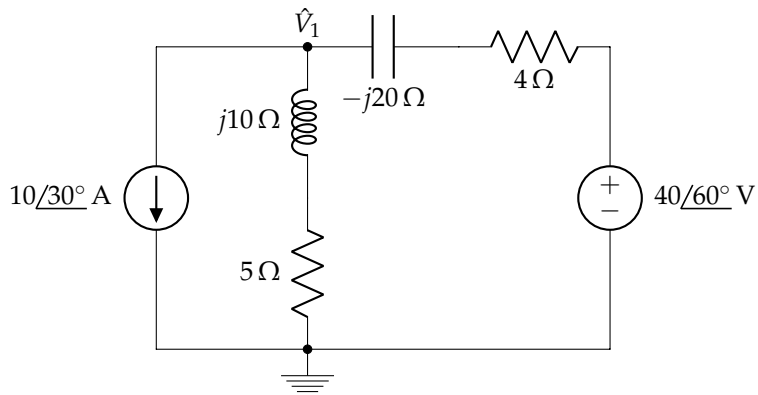
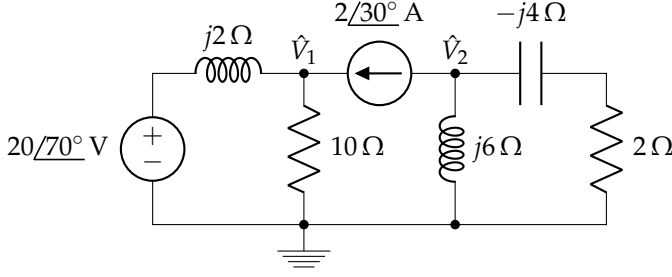
مشق 8.18: شکل 8.27 میں

$$v_1(t) = 10\cos(300t + 30^\circ)\,\text{V}$$
$$v_2(t) = 30\cos(300t + 60^\circ)\,\text{V}$$

ہیں۔ دوری سمتیات استعمال کرتے ہوئے $i(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $i(t) = 3.52\cos(300t - 91.3^\circ)\,\text{A}$

مشق 8.19: شکل 8.28 میں $\hat{V}_0$ دریافت کریں۔

جواب: $\hat{V}_0 = 320\underline{/-90^\circ}\,\text{V}$

شکل 8.28: مشق 8.19 کا دور۔

شکل 8.29: مشق 8.20 کا دور۔

شکل 8.30: مثال 8.27 کا دور۔

مشق 8.20: شکل 8.29 میں $\hat{V}_1$ دریافت کریں۔

جواب: $\hat{V}_1 = 182.88\underline{/-127.16^\circ}\,\text{V}$

8.9 تجزیاتی تراکیب

اس حصے میں ہم وہ تمام ترکیب استعمال کریں گے جن سے یک سمت ادوار حل کیے گئے۔ایسا مثالوں کی مدد سے کیا جائے گا۔

مثال 8.27: شکل 8.30 کو ترکیب جوڑ سے حل کرتے ہوئے $\hat{V}_1$ اور $\hat{V}_2$ دریافت کریں۔

حل: جوڑ $\hat{V}_1$ اور $\hat{V}_2$ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں۔

$$\frac{\hat{V}_1 - 20\underline{/70^\circ}}{j2} + \frac{\hat{V}_1}{10} - 2\underline{/30^\circ} = 0 \tag{8.83}$$

$$2\underline{/30^\circ} + \frac{\hat{V}_2}{j6} + \frac{\hat{V}_2}{2 - j4} = 0 \tag{8.84}$$

مساوات 8.83 سے درج ذیل ملتا ہے

$$\hat{V}_1\left(\frac{1}{j2}+\frac{1}{10}\right)=2\underline{/30^\circ}+\frac{20\underline{/70^\circ}}{j2}$$
$$=1.7321+j+9.3970-j3.4202$$

جسے حل کرتے ہیں۔

$$\hat{V}_1=\frac{11.1291-j2.4202}{0.1-j0.5}$$
$$=8.9347+j20.4713$$
$$=22.3361\underline{/66.42^\circ}\,\text{V}$$

مساوات 8.84 سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\hat{V}_2=\frac{-2\underline{/30^\circ}}{\frac{1}{j6}+\frac{1}{2-j4}}$$
$$=-18.5885-j3.8038$$
$$=18.97\underline{/-168.43^\circ}\,\text{V}$$

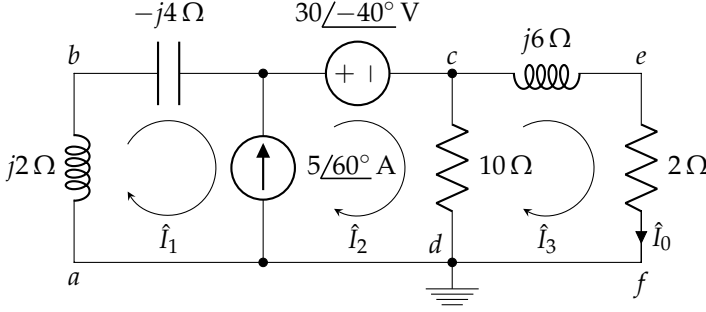
مثال 8.28: شکل 8.31 کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے $\hat{I}_0$ حاصل کریں۔

حل: تین خانوں میں رو فرض کرتے ہوئے دائرہ $abcda$ اور $dcefd$ پر کرخوف مساوات دباو لکھتے ہیں۔

$$(j2-j4)\hat{I}_1+30\underline{/-40^\circ}+10(\hat{I}_2-\hat{I}_3)=0 \tag{8.85}$$
$$10(\hat{I}_3-\hat{I}_2)+(2+6j)\hat{I}_3=0 \tag{8.86}$$

چونکہ $\hat{I}_1$ اور $\hat{I}_2$ منبع رو سے گزرتے ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\hat{I}_2-\hat{I}_1=5\underline{/60^\circ} \tag{8.87}$$

درج بالا تین ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے تینوں دائروں کی رو حاصل ہو گی۔

شکل 8.31: مثال 8.28 کا دور۔

مساوات 8.87 سے $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 - 5\angle{60^\circ}$ لیتے ہوئے مساوات 8.85 میں پُر کرتے اور ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}(10-j2)\hat{I}_2 - 10\hat{I}_3 &= -30\angle{-40^\circ} - (j2)(5\angle{60^\circ}) \\ &= -14.3211 + j14.2836\end{aligned} \tag{8.88}$$

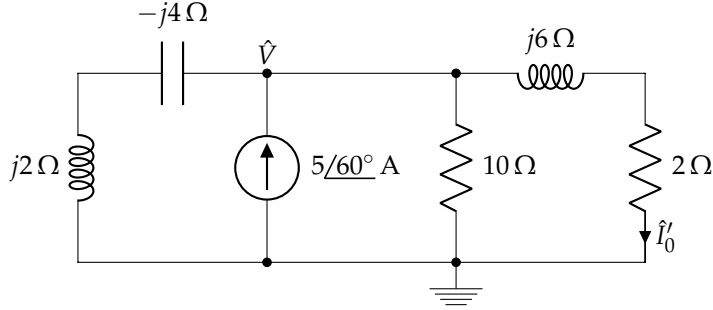
مساوات 8.86 سے $\hat{I}_2 = \left(\frac{12+6j}{10}\right)\hat{I}_3$ لیتے ہوئے مساوات 8.88 میں پُر کرتے ہیں۔

$$(10-j2)\left(\frac{12+6j}{10}\right)\hat{I}_3 - 10\hat{I}_3 = -14.3211 + j14.2836$$

اس کو حل کرنے سے

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \frac{-14.3211 + j14.2836}{3.2 + j3.6} \\ &= 0.2411 + j4.1924 \\ &= 4.1993\angle{86.71^\circ}\text{ A}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہی $\hat{I}_0$ ہے یعنی

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_3 = 4.1993\angle{86.71^\circ}\text{ A} \tag{8.89}$$

شکل 8.32: مثال 8.29 کا دور۔ منبع دباو کو قصر دور کیا گیا ہے۔

رو $\hat{I}_3$ جاننے کے بعد مساوات 8.86 سے $\hat{I}_2$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &= \left(\frac{12+6j}{10}\right)\hat{I}_3\\ &= \left(\frac{12+6j}{10}\right)(0.2411+j4.1924)\\ &= -2.2261+j5.1755\\ &= 5.63\underline{/113.27^\circ}\,\text{V}\end{aligned}$$

رو $\hat{I}_2$ جانتے ہوئے مساوات 8.87 سے $\hat{I}_1$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \hat{I}_2 - 5\underline{/60^\circ}\\ &= (-2.2261+j5.1755)-(2.5+j4.3301)\\ &= -4.7261+j0.8454\\ &= 4.8\underline{/169.86^\circ}\,\text{V}\end{aligned}$$

مثال 8.29: شکل 8.31 کو مسئلہ خطی میل سے حل کریں۔

حل:مسئلہ خطی میل میں تمام منبع کے انفرادی اثرات کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔شکل 8.31 میں منبع دباو کو قصر دور کرتے ہوئے شکل 8.32 حاصل ہوتا ہے۔منبع رو کے متوازی کل رکاوٹ Z_1 حاصل کرتے ہیں۔شکل کو دیکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_1} &= \frac{1}{j2-j4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{2+j6}\\ &= \frac{3}{20}+j\frac{7}{20}\end{aligned}$$

جس سے

$$\begin{aligned}Z_1 &= \frac{1}{\frac{3}{20}+j\frac{7}{20}}\\ &= \frac{30}{29}-j\frac{70}{29}\\ &= 2.6261\underline{/-66.8^\circ}\,\Omega\end{aligned}$$

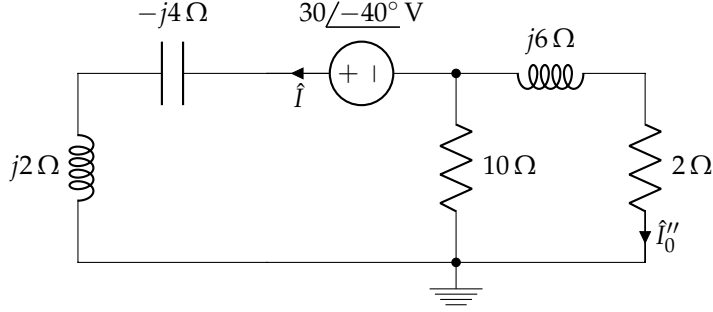
حاصل ہوتا ہے۔یوں دباو $\hat{V}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{V} = (5\underline{/60^\circ})(2.6261\underline{/-66.8^\circ}) = 13.13\underline{/-6.8^\circ}\,\text{V}$$

دباو جانتے ہوئے درکار رو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_0' &= \frac{\hat{V}}{2+j6}\\ &= \frac{13.13\underline{/-6.8^\circ}}{2+j6}\\ &= 2.076\underline{/-78.37^\circ}\,\text{A}\end{aligned}\tag{8.90}$$

آئیں اب منبع دباو سے پیدا رو حاصل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر منبع رو کو کھلا دور کرتے ہوئے شکل 8.33 حاصل کرتے ہیں۔اس شکل میں $\hat{I}$ جانتے ہوئے تقسیم رو کے کلیے سے $\hat{I}_0''$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔آئیں پہلے $\hat{I}$ حاصل کریں۔منبع رو کے ساتھ کل درج ذیل رکاوٹ جڑی ہے۔

$$\begin{aligned}Z_2 &= j2-j4+\frac{10(2+j6)}{10+2+j6}\\ &= \frac{10}{3}+j\frac{4}{3}\\ &= 3.59\underline{/21.8^\circ}\,\Omega\end{aligned}$$

شکل 8.33: مثال 8.28 کا دور۔ منبع رو کو کھلا دور کیا گیا ہے۔

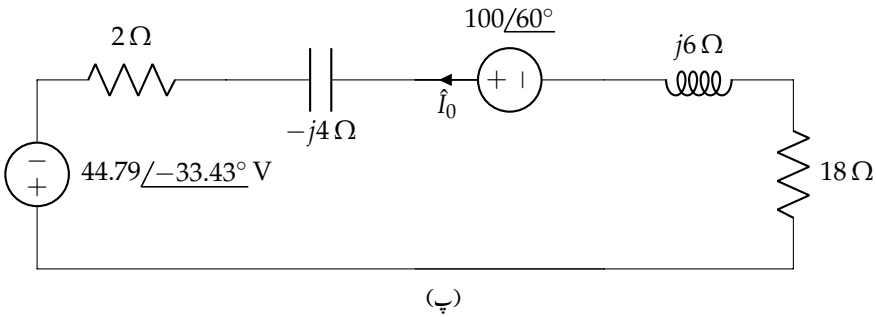
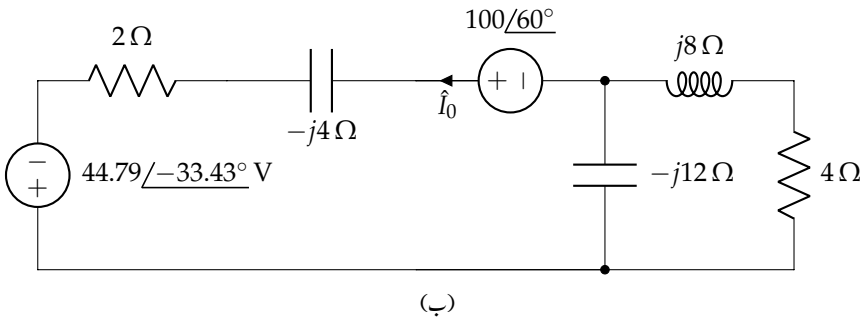
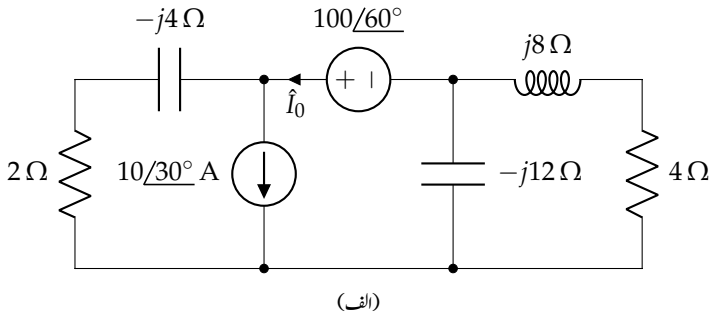
یوں رو $\hat{I}$ درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \frac{30\underline{/-40^\circ}}{3.59\underline{/21.8^\circ}}\\ &= 8.356\underline{/-61.8^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

رو $\hat{I}$ جانتے ہوئے تقسیم رو کے کلیے سے $\hat{I}_0''$ حاصل کرتے ہیں جہاں منفی کی علامت اس لئے استعمال کی گئی ہے کہ $\hat{I}$ اور $\hat{I}_0''$ کی سمتیں آپس میں الٹ ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_0'' &= -\left(\frac{10}{10+2+j6}\right)\hat{I}\\ &= -\left(\frac{10}{10+2+j6}\right)8.356\underline{/-61.8^\circ}\\ &= 6.23\underline{/91.63^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

شکل 8.32 اور شکل 8.33 میں حاصل کئے گئے رو کا مجموعہ درکار رو ہے یعنی

$$\begin{aligned}\hat{I}_0 &= \hat{I}_0' + \hat{I}_0''\\ &= 2.076\underline{/-78.37^\circ} + 6.23\underline{/91.63^\circ}\\ &= 4.1993\underline{/86.71^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

شکل 8.34: مثال 8.30 کا دور۔

مثال 8.30: شکل 8.34-الف کو تبادلہ منبع سے حل کرتے ہوئے $\hat{I}_0$ حاصل کریں۔

حل: منبع رو کے متوازی رکاوٹ $2 - j4$ جڑی ہے۔ان کو نارٹن مساوی دور تصور کرتے ہوئے ان کی جگہ تھونن مساوی دور نسب کرتے ہوئے شکل-ب ملتا ہے جہاں درج ذیل متبادل منبع دباو نسب کیا گیا ہے۔

$$(10\underline{/30^\circ})(2 - j4) = 44.72\underline{/-33.43^\circ}\,\text{V}$$

شکل 8.34-ب میں دائیں جانب مساوی رکاوٹ درج ذیل ہے

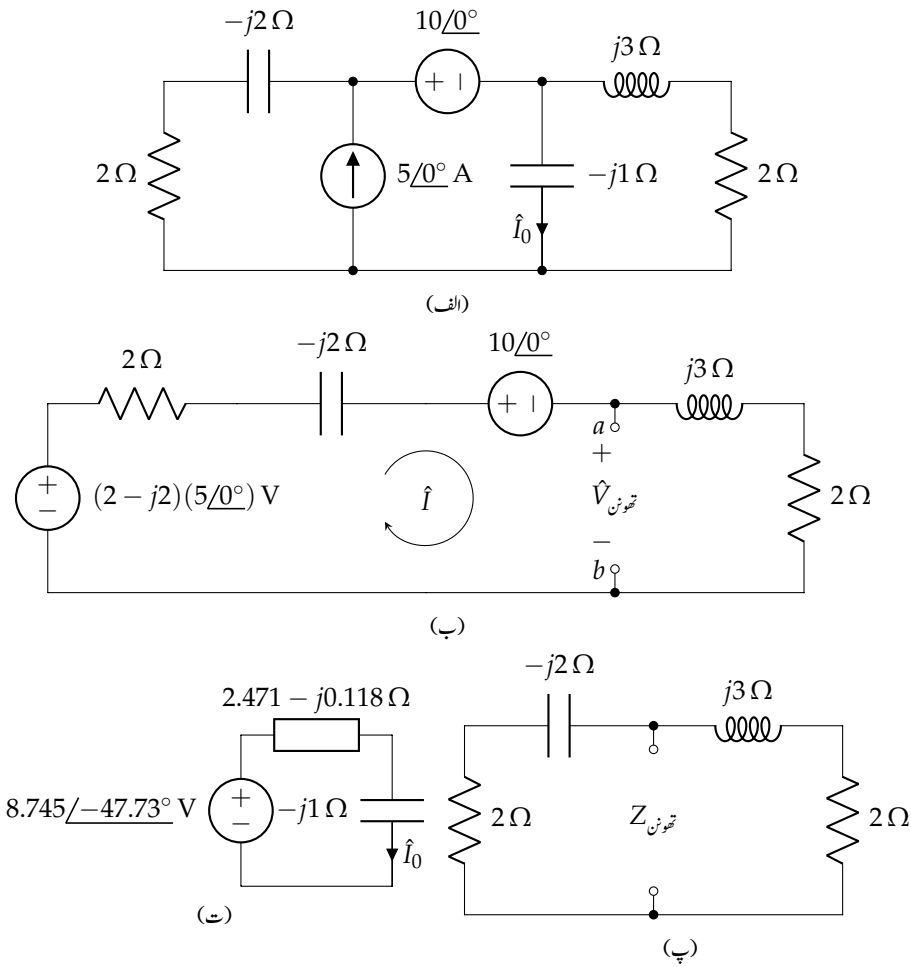
$$\frac{-j12(4 + j8)}{-j12 + 4 + j8} = 18 + j6$$

جسے استعمال کرتے ہوئے شکل-پ ملتی ہے۔شکل-پ کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_0 &= \frac{44.72\underline{/-33.43^\circ} + 100\underline{/60^\circ}}{2 - j4 + j6 + 18}\\ &= \frac{87.3205 + j61.9615}{20 + j2}\\ &= 5.33\underline{/29.65^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

مثال 8.31: شکل 8.35-الف میں مسئلہ تھونن کی مدد سے بوجھ کی رو $\hat{I}_0$ دریافت کریں۔

حل: تھونن دباو دریافت کرنے کی خاطر بوجھ کو کھلا دور کرنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے جہاں متوازی جڑے منبع رو اور رکاوٹ $2 - j2\,\Omega$ کا متبادل تھونن دور نسب کیا گیا ہے۔دور میں رو $\hat{I}$ تصور کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \frac{(2 - j2)(5\underline{/0^\circ}) - 10\underline{/0^\circ}}{2 - j2 + j3 + 2}\\ &= \frac{(10 - j10) - (10)}{4 + j1}\\ &= 2.425\underline{/-104^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

شکل 8.35: مثال 8.31 کا دور۔

یوں تھونن دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\text{تھونن}} &= (2+j3)\hat{I}\\ &= (2+j3)(2.425\underline{/-104^\circ})\\ &= 8.745\underline{/-47.73^\circ}\,\text{V}\end{aligned}$$

تھونن رکاوٹ حاصل کرنے کی خاطر شکل 8.35 میں منبع رو کو کھلے دور اور منبع دباو کو قصر دور کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتا ہے جہاں سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

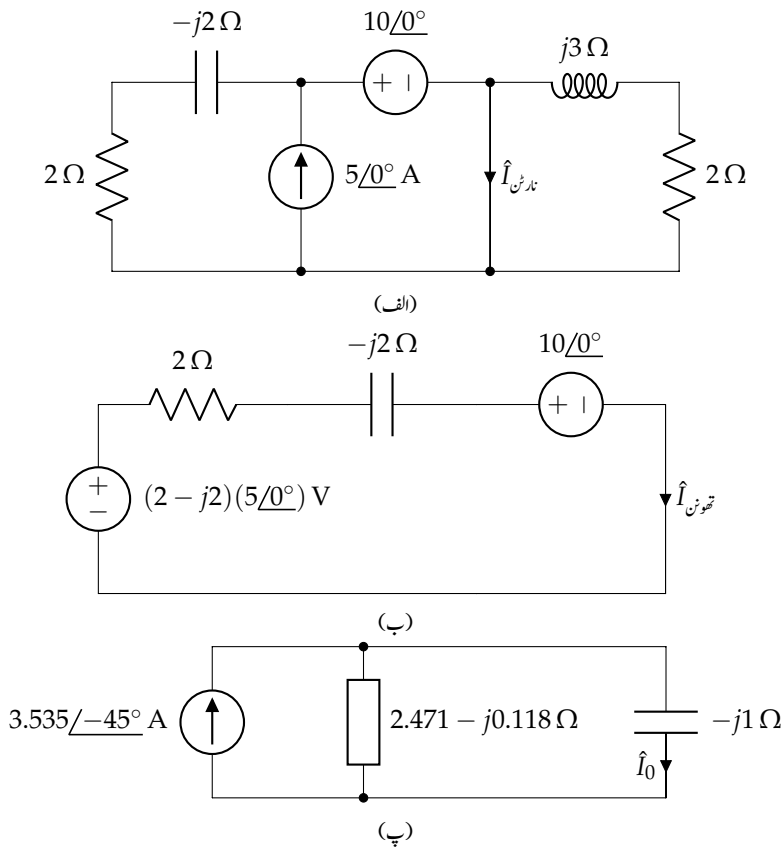
$$Z_{\text{تھونن}} = \frac{(2-j2)(2+j3)}{(2-j2)+(2+j3)} = 2.471 - j0.118\,\Omega$$

تھونن دباو اور تھونن رکاوٹ استعمال کرتے ہوئے شکل-ت حاصل ہوتی ہے جس سے بوجھ کی رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_0 &= \frac{8.745\underline{/-47.73^\circ}}{2.471 - j0.118 - j1}\\ &= \frac{8.745\underline{/-47.73^\circ}}{2.71163\underline{/-24.341^\circ}}\\ &= 3.22\underline{/-23.39^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

تھونن رکاوٹ کو شکل میں سلسلہ وار جڑے $2.471\,\Omega$ مزاحمت اور $-j0.118\,\Omega$ برق گیر سے بھی ظاہر کیا جا سکتا تھا البتہ دکھایا گیا طریقہ مجھے زیادہ پسند ہے۔

مثال 8.32: شکل 8.35-الف میں مسئلہ نارٹن کی مدد سے بوجھ کی رو $\hat{I}_0$ دریافت کریں۔

حل: نارٹن رو دریافت کرنے کی خاطر بوجھ کو قصر دور کرنے سے شکل 8.36-الف حاصل ہوتا ہے جہاں نارٹن رو کی نشاندہی کی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قصر دور کے دائیں جانب پرزوں میں صفر رو گزرے گی لہٰذا انہیں دور

شکل 8.36: مثال 8.32 کا دور۔

سے ہٹایا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے اور ساتھ ہی ساتھ متوازی جڑے منبع رو $2-j2\,\Omega$ رکاوٹ کی جگہ متبادل منبع نسب کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_{\text{نارٹن}} &= \frac{(2-j2)(5\underline{/0^\circ})}{2-j2}\\ &= 3.535\underline{/-45^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

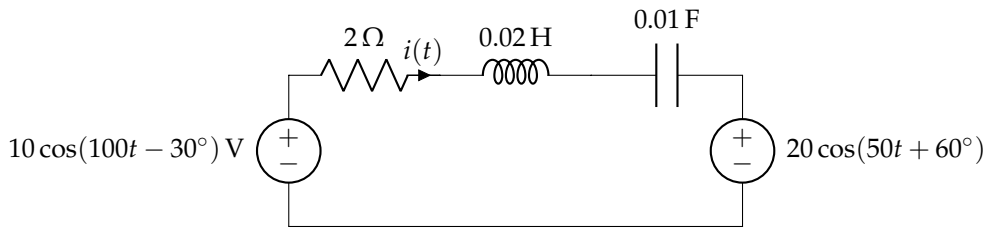
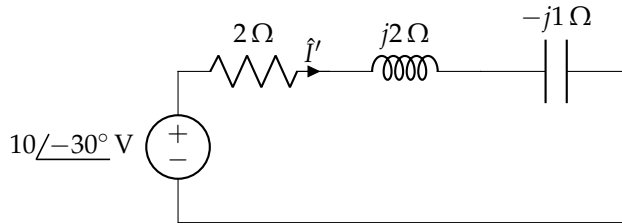
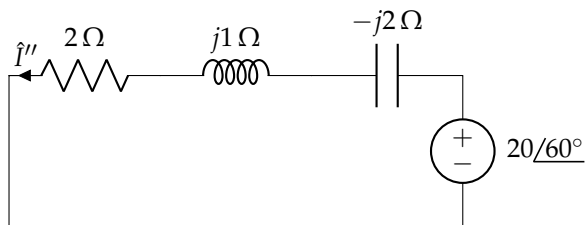
گزشتہ مثال میں ہم تھونن رکاوٹ $Z_{\text{تھونن}} = 2.471 - j0.118\,\Omega$ حاصل کر چکے ہیں۔شکل-پ میں بوجھ کے ساتھ نارٹن مساوی دور نسب کیا گیا ہے جہاں سے تقسیم رو کے کلیے سے $\hat{I}_0$ درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_0 &= \frac{2.471-j0.118}{2.471-j0.118-j1}(3.535\underline{/-45^\circ})\\ &= 3.22\underline{/-23.39^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

مثال 8.33: شکل 8.33 میں رو $i(t)$ حاصل کریں۔

حل: یہاں منبع دباو کی تعدد مختلف ہے لہٰذا دوری سمتیات استعمال کرتے ہوئے کون سی تعدد استعمال کی جائے گی؟ اس دور کو مسئلہ خطی میل سے حل کیا جا سکتا ہے۔یوں باری باری ایک ایک منبع نسب کرتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں جوابات حاصل کئے جائیں گے۔تمام جوابات کا مجموعہ درکار جواب ہو گا۔

شکل-ب میں صرف بائیں منبع استعمال کیا گیا ہے لہٰذا تعدد $\omega = 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ ہو گی۔یوں امالی رکاوٹ اور برق گیر رکاوٹ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}Z_L &= j\omega L = j100\times 0.02 = j2\,\Omega\\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j100\times 0.01} = -j1\,\Omega\end{aligned}$$

شکل 8.37: مثال 8.33 کا دور۔

شکل-ب میں یہی رکاوٹ دکھائے گئے ہیں۔یوں

$$\hat{I}' = \frac{10\angle{-30^\circ}}{2+j2-j1} = \frac{10\angle{-30^\circ}}{2.236\angle{26.565^\circ}} = 4.472\angle{-56.565^\circ}\,\text{A}$$

ہو گا جس سے وقتی دائرہ کار میں رو درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$i(t)' = 4.472\cos(100t - 56.565^\circ)\,\text{A}$$

اب دوسری منبع کو استعمال کرتے ہوئے حل کرتے ہیں لہٰذا تعدد $\omega = 50\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ ہو گی۔یوں امالی رکاوٹ اور برق گیر رکاوٹ بالترتیب درج ذیل ہوں گے جنہیں استعمال کرتے ہوئے شکل-پ حاصل کی گئی ہے۔

$$\boldsymbol{Z}_L = j50\times 0.02 = j1\,\Omega$$
$$\boldsymbol{Z}_C = \frac{1}{j50\times 0.01} = -j2\,\Omega$$

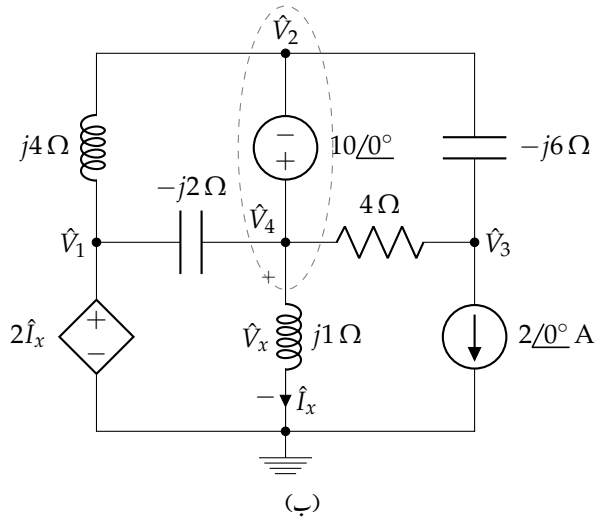
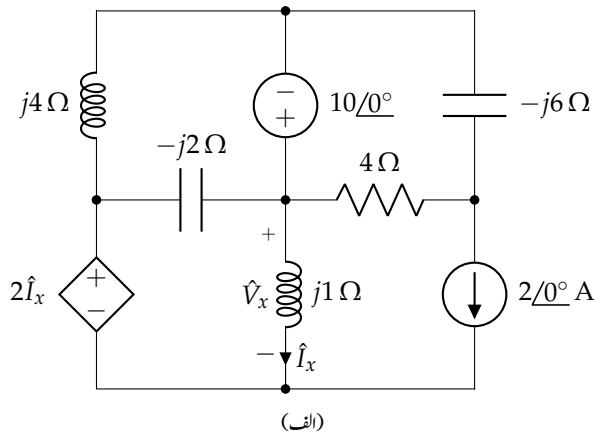
شکل-پ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\hat{I}' = \frac{20\angle{60^\circ}}{2+j1-j2} = 8.944\angle{86.565^\circ}\,\text{A}$$

لہٰذا وقتی دائرہ کار میں رو درج ذیل ہو گی۔

$$i(t)'' = 8.944\cos(50t + 86.565^\circ)\,\text{A}$$

چونکہ شکل-پ میں رو کی سمت درکار سمت کے الٹ چنی گئی ہے لہٰذا کل رو درج ذیل ہو گی۔

$$i(t) = i(t)' - i(t)'' \quad = 4.472\cos(100t - 56.565^\circ) - 8.944\cos(50t + 86.565^\circ)\,\text{A}$$

شکل 8.38: مثال 8.34 کا دور۔

مثال 8.34: شکل 8.38 کو ترکیب جوڑ سے حل کرتے ہوئے $\hat{V}_x$ دریافت کریں۔

حل: شکل-ب میں نچلے جوڑ کو زمین تصور کرتے ہوئے بقایا جوڑ کی نشاندہی کی گئی ہے جہاں $\hat{V}_2$ اور $\hat{V}_4$ مخلوط جوڑ کو نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔دور کو دیکھتے ہوئے قابو کرنے والی رو کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{I}_x = \frac{\hat{V}_2 + 10\underline{/0^\circ}}{j1}$$

اس قیمت کو استعمال کرتے ہوئے اور جوڑ پر خارجی رو فرض کرتے ہوئے، جوڑ $\hat{V}_1$ ، $\hat{V}_3$ اور مخلوط جوڑ پر بالترتیب کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
-2\left(\frac{\hat{V}_2 + 10\underline{/0^\circ}}{j1}\right) + \frac{\hat{V}_1 - \hat{V}_2}{j4} + \frac{\hat{V}_1 - (\hat{V}_2 + 10\underline{/0^\circ})}{-j2} &= 0 \\
2\underline{/0^\circ} + \frac{\hat{V}_3 - \hat{V}_2}{-j6} + \frac{\hat{V}_3 - (\hat{V}_2 + 10\underline{/0^\circ})}{4} &= 0 \\
\frac{\hat{V}_2 - \hat{V}_1}{j4} + \frac{\hat{V}_2 - \hat{V}_3}{-j6} + \frac{(\hat{V}_2 + 10\underline{/0^\circ}) - \hat{V}_1}{-j2} + \frac{(\hat{V}_2 + 10\underline{/0^\circ})}{j1} + \frac{(\hat{V}_2 + 10\underline{/0^\circ}) - \hat{V}_3}{4} &= 0
\end{aligned}
\tag{8.91}
$$

درج بالا مساوات میں $\hat{V}_4 = \hat{V}_2 + 10\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$ پر کیا گیا ہے۔درج بالا تین ہمزاد مساوات کو کسی بھی طریقے سے حل کرتے ہوئے $\hat{V}_1$ ، $\hat{V}_2$ اور $\hat{V}_3$ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

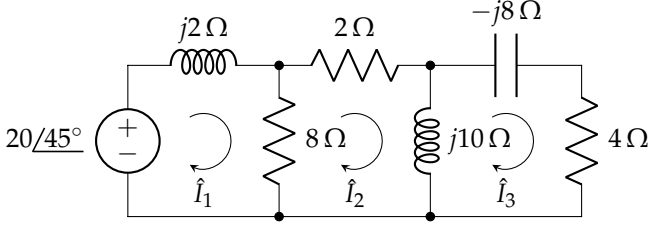
مساوات 8.91 میں پہلی مساوات سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_1 = -7\hat{V}_2 - 60 \tag{8.92}$$

مساوات 8.91 کی دوسری مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے لکھتے ہیں۔

$$\left(-\frac{1}{4} - \frac{j}{6}\right)\hat{V}_2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{j}{6}\right)\hat{V}_3 = \frac{1}{2} \tag{8.93}$$

مساوات 8.91 کی تیسری مساوات میں مساوات 8.92 پر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\left(\frac{1}{4} + j\frac{7}{6}\right)\hat{V}_2 - \left(\frac{1}{4} + j\frac{1}{6}\right)\hat{V}_3 = -\frac{5}{2} - j10 \tag{8.94}$$

شکل 8.39: مشق 8.21 کا دور۔

درج بالا دو ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\hat{V}_2 = -10 + j2\,\text{V}$$
$$\hat{V}_3 = -\frac{112}{13} + j\frac{14}{13}\,\text{V}$$

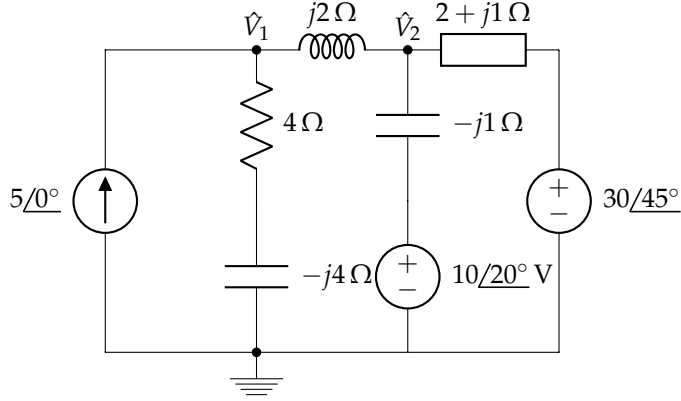
جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو درکار جواب ہے۔

$$\hat{V}_x = \hat{V}_4 = \hat{V}_2 + 10\underline{/0^\circ} = 2\underline{/90^\circ}\,\text{V}$$

مشق 8.21: شکل 8.39 میں دائری ترکیب سے تینوں خانوں کی رو دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_1 = 3.23\underline{/26.2^\circ}\,\text{A}$ ، $\hat{I}_2 = 0.86\underline{/26.2^\circ}\,\text{A}$ ، $\hat{I}_3 = 1.92\underline{/89.6^\circ}\,\text{A}$

مشق 8.22: شکل 8.40 کو ترکیب جوڑ سے حل کرتے ہوئے دونوں جوڑ کے دباو حاصل کریں۔

جوابات: $\hat{V}_1 = 21.91\underline{/-4.4^\circ}\,\text{V}$ ، $\hat{V}_2 = 17.78\underline{/-19.1^\circ}\,\text{V}$

شکل 8.40: مشق 8.22 کا دور۔

مشق 8.23: شکل 8.41 کو دائری ترکیب سے حل کرتے ہوئے $\hat{V}_x$ دریافت کریں۔اسی کو دوبارہ ترکیب جوڑ سے حل کریں۔

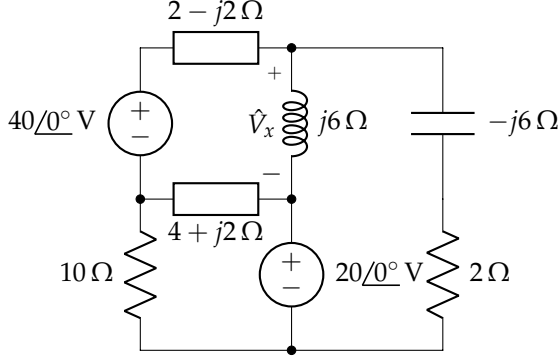
جواب: $\hat{V}_x = 24.61\underline{/-25.44^\circ}\,\mathrm{V}$

سوالات

سوال 8.1: برقی دباو $v(t) = 45\cos(100t - 42^\circ)\,\mathrm{V}$ کی تعدد، دوری عرصہ، زاویہ ہٹاو اور موثر دباو دریافت کریں۔

جوابات: $15.92\,\mathrm{Hz}$ ، $62.8\,\mathrm{ms}$ ، -42° ، $31.82\,\mathrm{V}$

سوال 8.2: درج ذیل امواج کا زاویائی فرق بیان کریں۔

$$v_1 = 310\cos(100t + 32^\circ)\,\mathrm{V}$$
$$v_2 = 202\cos(100t - 14^\circ)\,\mathrm{V}$$

شکل 8.41: مشق 8.23 کا دور۔

جواب: v_2 سے v_1 46° آگے ہے۔

سوال 8.3: درج ذیل امواج کا زاویائی فرق بیان کریں۔

$$i = 2\cos(55t - 80^\circ)\,\text{A}$$
$$v = 202\sin(55t - 30^\circ)\,\text{V}$$

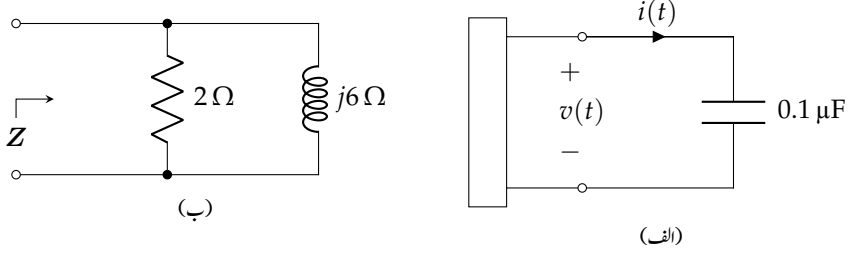
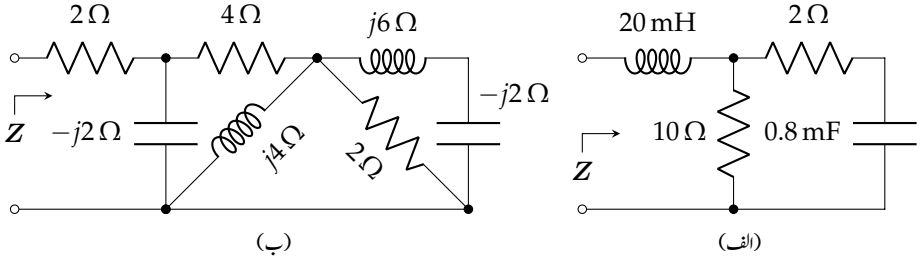
جواب: رو 40° آگے ہے۔

سوال 8.4: درج ذیل امواج کا زاویائی فرق بیان کریں۔

$$i = 2\cos(314t - 80^\circ)\,\text{A}$$
$$v = -54\sin(314t - 30^\circ)\,\text{V}$$

جواب: رو 140° پیچھے ہے۔

سوال 8.5: شکل 8.42-الف میں درج ذیل دباو کی صورت میں رو کو وقتی دائرہ کار اور تعددی دائرہ کار میں لکھیں۔

$$v(t) = 10\cos(314t - 30^\circ)$$
$$v(t) = 15\sin(314t + 60^\circ)$$

شکل 8.42: سوال 8.5 اور سوال 8.6 کے ادوار۔

شکل 8.43: سوال 8.7 اور سوال 8.8 کے ادوار۔

جوابات: (الف) $-0.314\sin(314t-30^\circ)\,\text{mA}$ ، $0.314\underline{/60^\circ}\,\text{mA}$ ؛
(ب) $0.511\cos(314t+60^\circ)\,\text{mA}$ ، $0.511\underline{/60^\circ}\,\text{mA}$

سوال 8.6: شکل 8.42-ب میں Z دریافت کریں۔

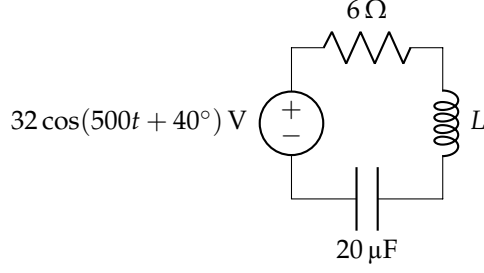
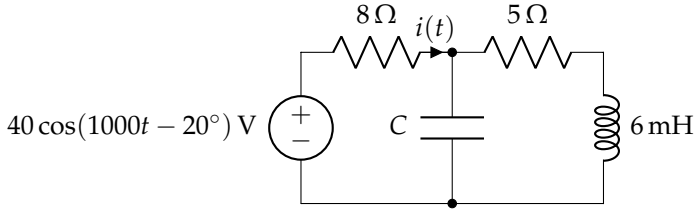
جواب: $Z=\frac{9}{5}+j\frac{3}{5}\,\Omega$

سوال 8.7: تعدد $50\,\text{Hz}$ پر شکل 8.43-الف کی رکاوٹ Z دریافت کریں۔

جواب: $2.492+j3.794\,\Omega$

سوال 8.8: شکل 8.43-ب کی رکاوٹ Z دریافت کریں۔

جواب: $Z=2.769-j1.846\,\Omega$

سوال 8.9: شکل 8.44 میں امالہ L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر دباو اور رو ہم قدم ہوں۔ایسی صورت میں منبع کو کیا رکاوٹ نظر آئے گی۔

شکل 8.44: سوال 8.9 کا دور۔

شکل 8.45: سوال 8.10 کا دور۔

جواب: $5.066\,\mathrm{mH}$ ، $6\,\Omega$

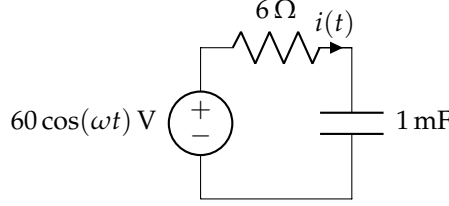
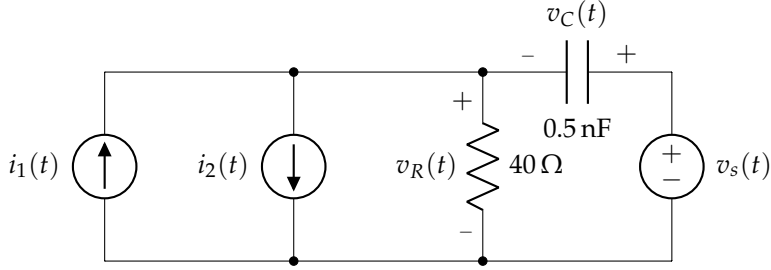
سوال 8.10: شکل 8.45 میں برق گیر C کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر دباو منبع اور رو $i(t)$ ہم قدم ہوں۔ایسی صورت میں منبع کو کیا رکاوٹ نظر آئے گی۔

جواب: $4.149\,\mu\mathrm{F}$

سوال 8.11: شکل 8.46 میں وہ تعدد دریافت کریں جس پر رو کی چوٹی $5\,\mathrm{A}$ ہو۔

جواب: $15.31\,\mathrm{Hz}$

سوال 8.12: شکل 8.47 میں منبع درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= 20\cos(10^8 t + 20^\circ)\,\mathrm{mA}\\
i_2(t) &= 15\sin(10^8 t + 40^\circ)\,\mathrm{mA}\\
v_s(t) &= 10\cos 10^8 t\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

شکل 8.46: سوال 8.11 کا دور۔

شکل 8.47: سوال 8.12 کا دور۔

اس دور کو تعددی دائرہ کار میں بنائیں اور $v_R(t)$ کے لئے حل کریں۔حاصل جواب اور دوری سمتیات کے استعمال سے $v_C(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_R(t) = 10.431\cos(10^8t - 0.84°)\,\mathrm{V}$ ، $v_C(t) = 0.456\cos(10^8t + 160.3°)\,\mathrm{V}$

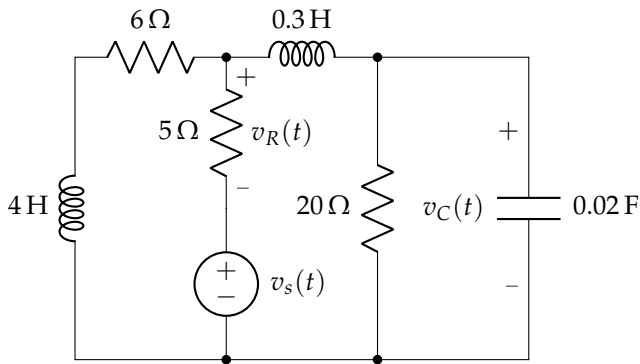
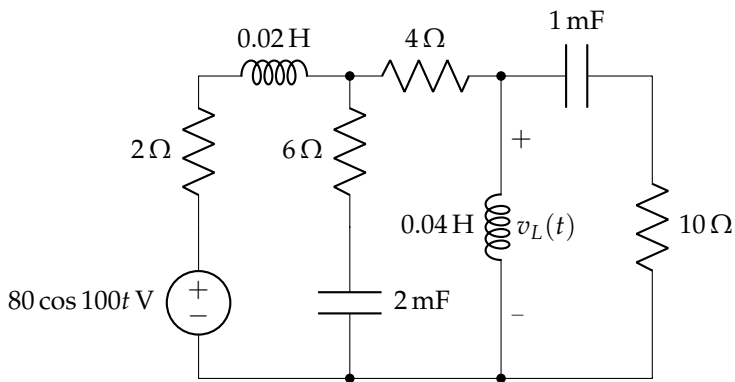
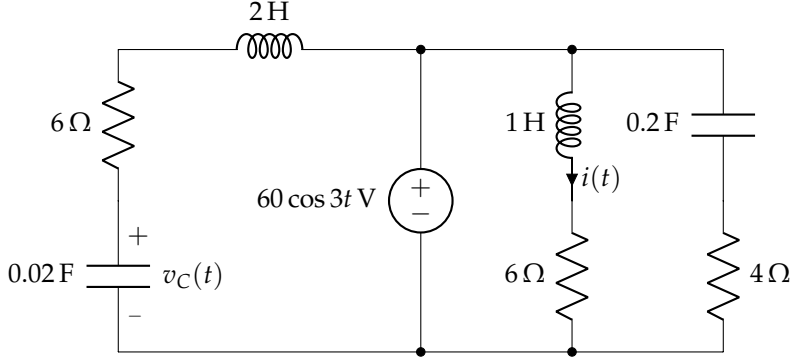
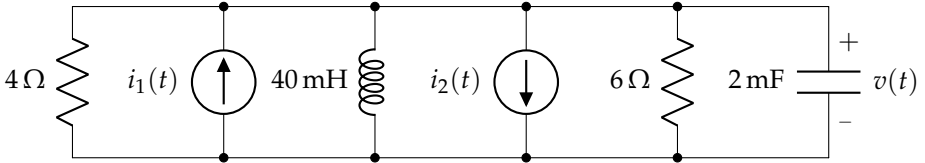
سوال 8.13: شکل 8.48 میں $v_R(t)$ اور $v_C(t)$ حاصل کریں۔منبع کا دباو $v_s(t) = 40\cos 15t\,\mathrm{V}$ ہے۔

جواب: $v_R = 35.35\cos(15t + 167.4°)\,\mathrm{V}$ ، $v_C(t) = 22.76\cos(15t - 92.7°)\,\mathrm{V}$

سوال 8.14: شکل 8.49 میں $v_L(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_L = 37.3\cos(100t + 18.9°)\,\mathrm{V}$

سوال 8.15: شکل 8.50 میں $v_C(t)$ اور $i(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $vC(t) = 81.7\cos(3t - 29.4°)\,\mathrm{V}$ ، $i(t) = 4\sqrt{5}\cos(3t - 26.6°)\,\mathrm{A}$

شکل 8.48: سوال 8.13 کا دور۔

شکل 8.49: سوال 8.14 کا دور۔

شکل 8.50: سوال 8.15 کا دور۔

شکل 8.51: سوال 8.16 کا دور۔

سوال 8.16: شکل 8.51 میں رو درج ذیل ہیں۔ دباو $v(t)$ دریافت کریں۔

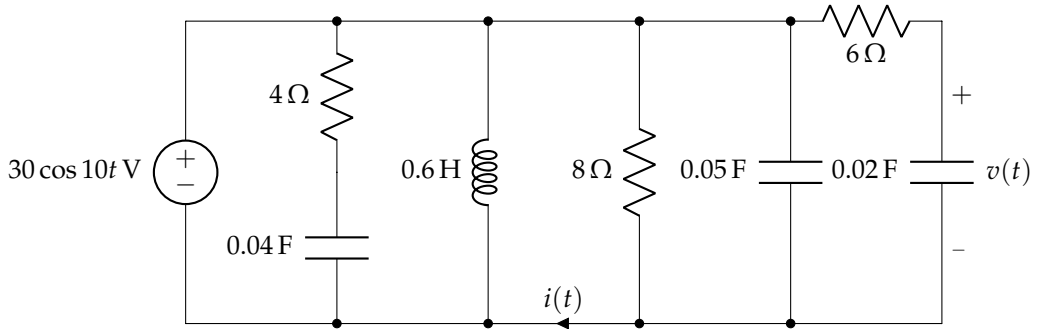
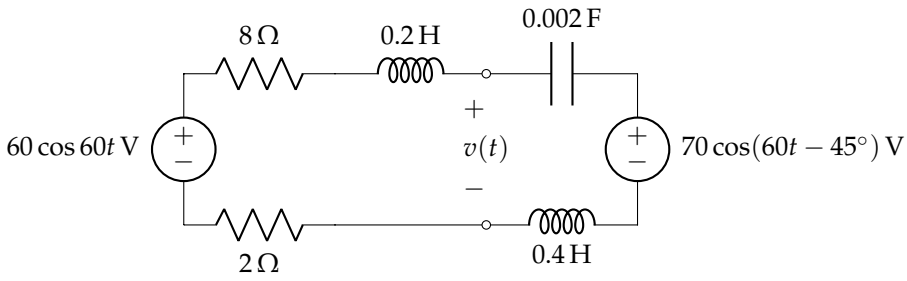
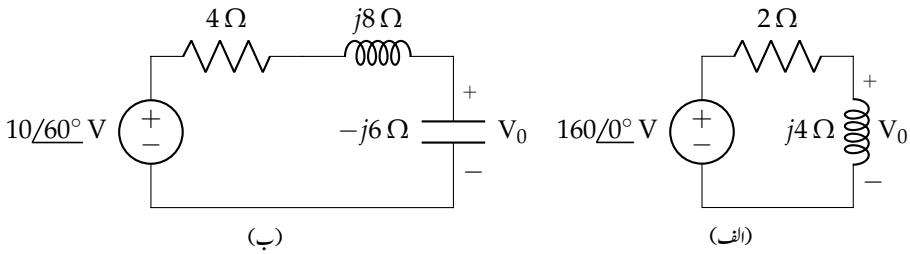
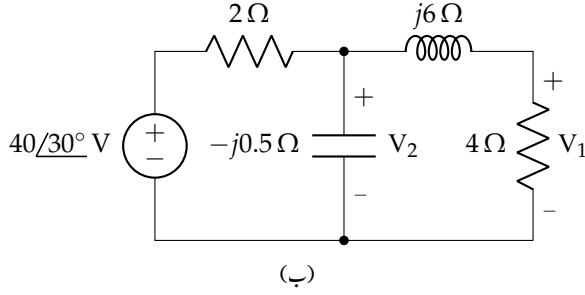
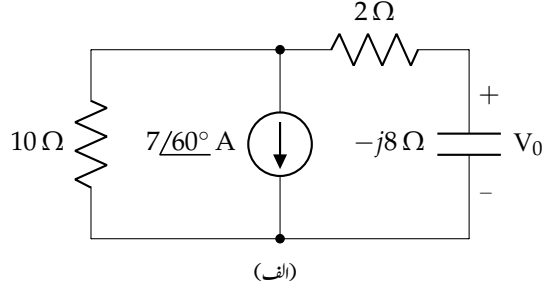
$$i_1(t) = 6\cos(100t + 22^\circ)\,\text{A}$$
$$i_2(t) = 4\cos(100t - 30^\circ)\,\text{A}$$

جواب: $v(t) = 11.29\cos(100t + 70.5^\circ)\,\text{V}$

سوال 8.17: شکل 8.52 میں $v(t)$ اور $i(t)$ دریافت کریں۔

جواب: $v = 19.2\cos(10t - 50.2^\circ)\,\text{V}$ ، $i(t) = 17.7\cos(10t + 80.4^\circ)\,\text{A}$

سوال 8.18: شکل 8.53 میں $v(t)$ دریافت کریں۔

جواب: $v(t) = 47.1\cos(60t - 22.5^\circ)\,\text{V}$

شکل 8.52: سوال 8.17 کا دور۔

شکل 8.53: سوال 8.18 کا دور۔

شکل 8.54: سوال 8.19 اور سوال 8.20 کے ادوار۔

شکل 8.55: سوال 8.21 اور سوال 8.22 کے ادوار۔

سوال 8.19: شکل 8.54-الف میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = 113.1\underline{/45^\circ}\,\text{V}$

سوال 8.20: شکل 8.54-ب میں V_0 دریافت کریں۔

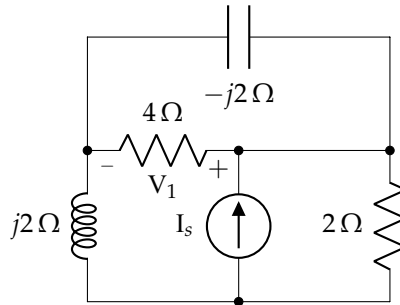
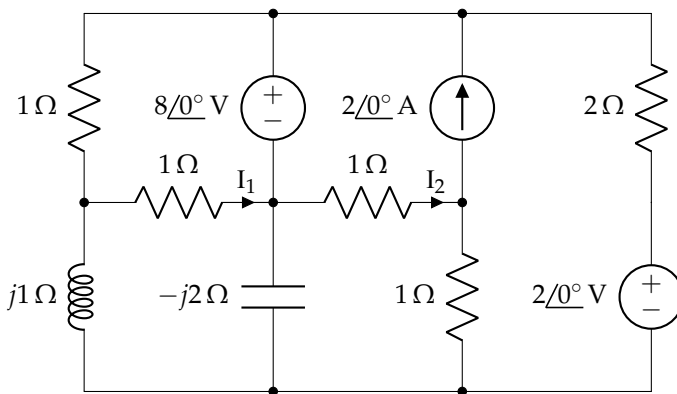
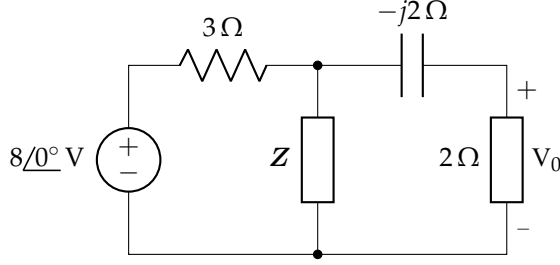
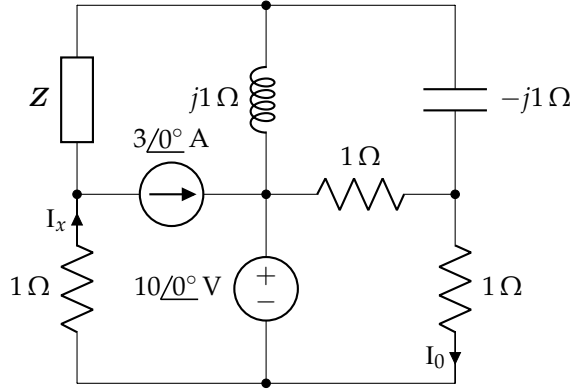
جواب: $V_0 = 13.4\underline{/-56.6^\circ}\,\text{V}$

سوال 8.21: شکل 8.55-الف میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = 38.8\underline{/183.7^\circ}\,\text{V}$

سوال 8.22: شکل 8.55-ب میں V_1 اور V_2 دریافت کریں۔

جوابات: $V_1 = 10.1\underline{/-43^\circ}\,\text{V}$ ، $V_2 = 5.6\underline{/261^\circ}\,\text{V}$

سوال 8.23: شکل 8.56 میں $V_1 = 6\underline{/0^\circ}\,\text{V}$ ہونے کی صورت میں I_s دریافت کریں۔

شکل 8.56: سوال 8.23 کا دور۔

شکل 8.57: سوال 8.24 کا دور۔

شکل 8.58: سوال 8.25 کا دور۔

شکل 8.59: سوال 8.26 کا دور۔

جواب: $I_s = 4.74\underline{/71.6^\circ}\,\text{A}$

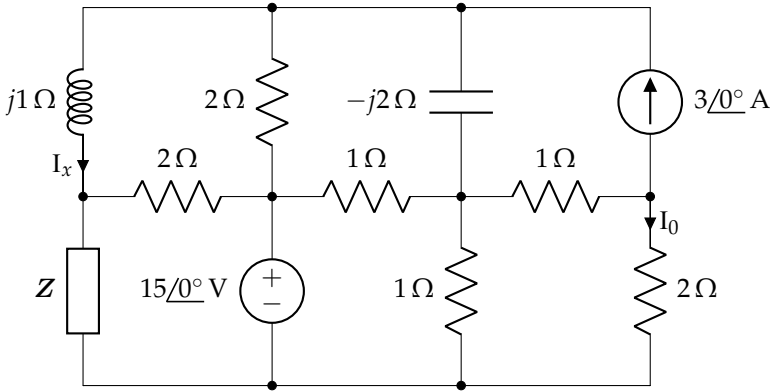
سوال 8.24: شکل 8.57 میں I_1 اور I_2 دریافت کریں۔

جواب: $I_1 = 3.1\underline{/1.8^\circ}\,\text{A}$ ، $I_2 = 0.95\underline{/119.2^\circ}\,\text{A}$

سوال 8.25: شکل 8.58 میں $V_0 = 2\underline{/30^\circ}\,\text{V}$ ہے۔ رکاوٹ Z حاصل کریں۔

جواب: $Z = 3.054 + j0.056\,\Omega$

سوال 8.26: شکل 8.59 میں $I_0 = 3\underline{/0^\circ}\,\text{A}$ ہے۔ رو I_x حاصل کریں۔

جواب: $I_x = 3 + j7\,\text{A}$

شکل 8.60: سوال 8.27 کا دور۔

سوال 8.27: شکل 8.60 میں $I_0 = 5/\underline{0^\circ}$ A ہے۔رو I_x حاصل کریں۔

جواب: $I_x = -32.5 + j35$ A

سوال 8.28: شکل 8.61 میں ترکیب جوڑ سے I_0 حاصل کریں۔

جواب: $I_0 = 0.67/\underline{108.9^\circ}$ A

سوال 8.29: شکل 8.62 میں ترکیب جوڑ سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = 8.46/\underline{14^\circ}$ V

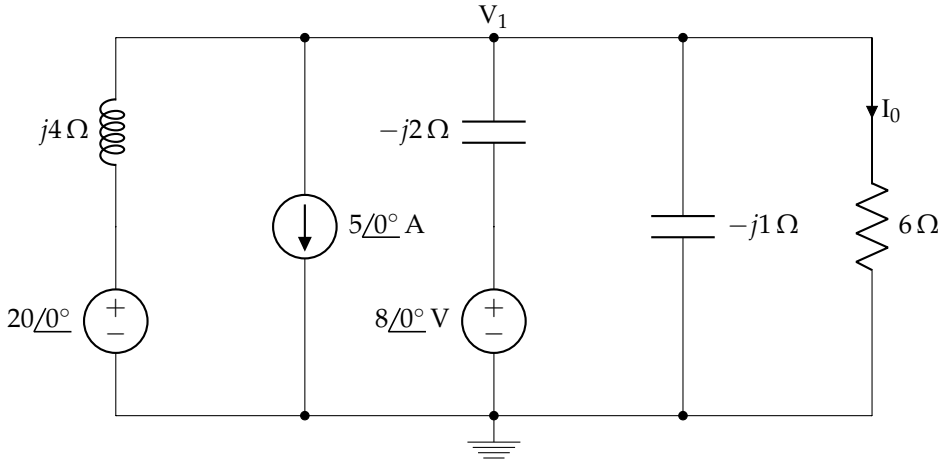
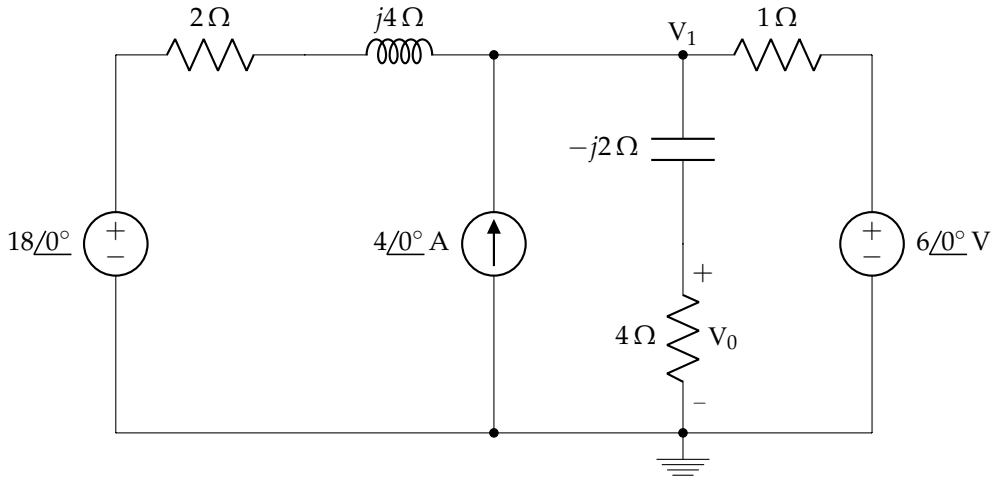
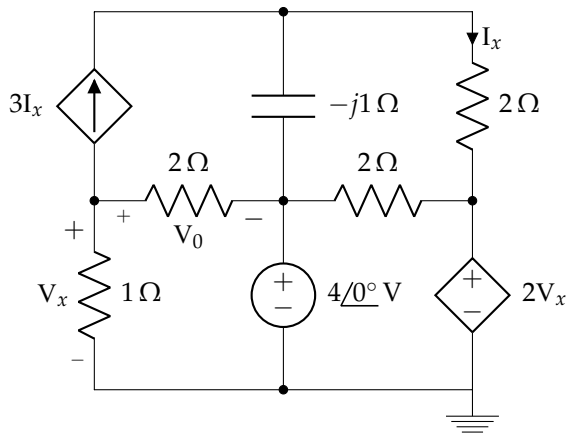
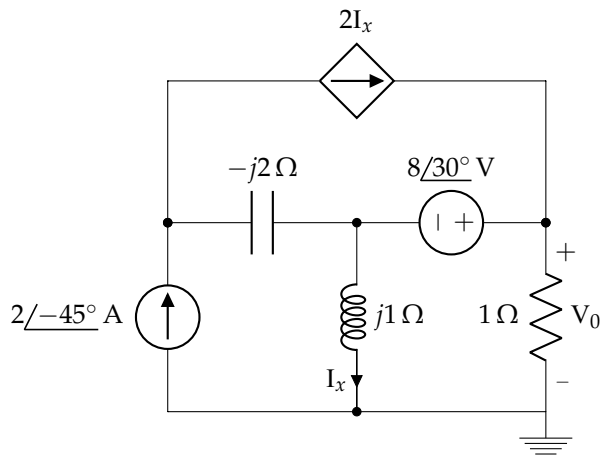
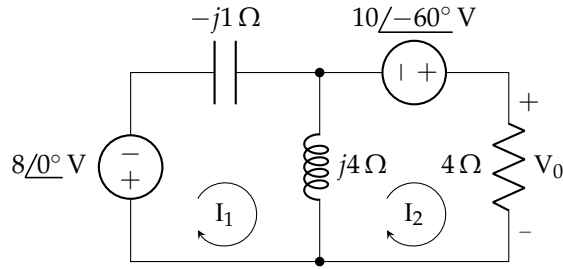
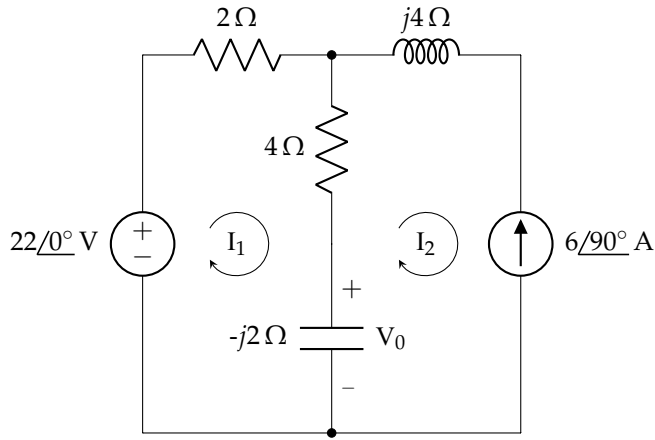
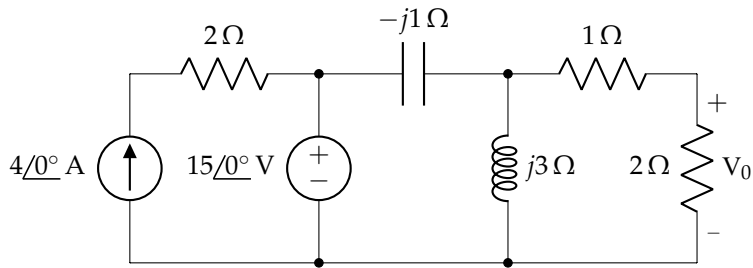
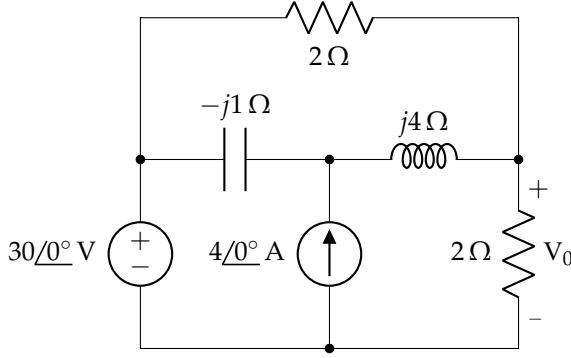
سوال 8.30: شکل 8.63 میں ترکیب جوڑ سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = 2.11/\underline{161.6^\circ}$ V

سوال 8.31: شکل 8.64 میں ترکیب جوڑ سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = 7.03/\underline{-12^\circ}$ V

سوال 8.32: شکل 8.65 میں دائری ترکیب سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = 9.82/\underline{255.2^\circ}$ V

شکل 8.61: سوال 8.28 کا دور۔

شکل 8.62: سوال 8.29 کا دور۔

شکل 8.63: سوال 8.30 کا دور۔

شکل 8.64: سوال 8.31 کا دور۔

شکل 8.65: سوال 8.32 کا دور۔

شکل 8.66: سوال 8.33 کا دور۔

شکل 8.67: سوال 8.34 کا دور۔

شکل 8.68: سوال 8.35 کا دور۔

سوال 8.33: شکل 8.66 میں دائری ترکیب سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = 7.92\angle 42.95^\circ$ V

سوال 8.34: شکل 8.67 میں دائری ترکیب سے V_0 حاصل کریں۔

جواب: $V_0 = 13.4\angle 26.6^\circ$ V

سوال 8.35: شکل 8.68 کو مسئلہ خطی میل سے حل کرتے ہوئے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = 16.1\angle -17.8^\circ$ V

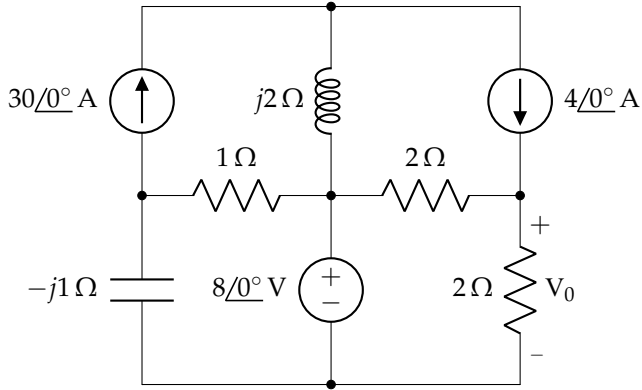
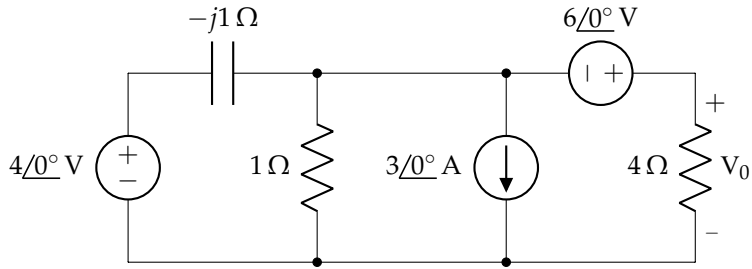
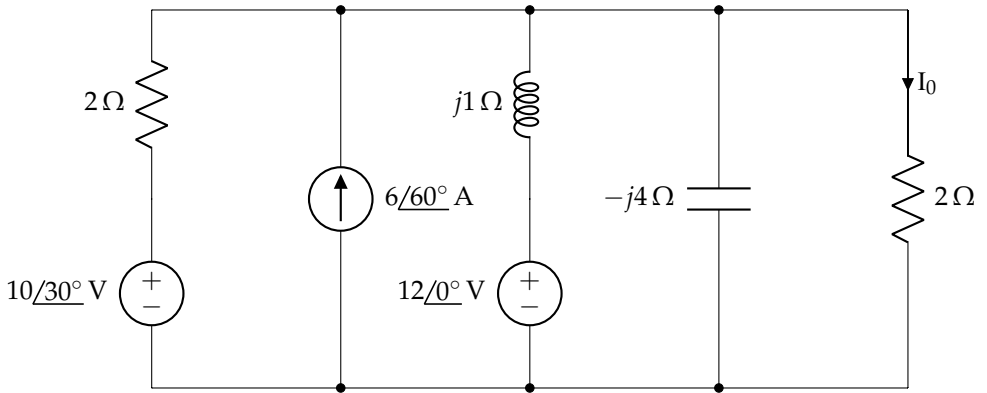
سوال 8.36: شکل 8.69 کو مسئلہ خطی میل سے حل کرتے ہوئے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = 8\angle 0^\circ$ V

سوال 8.37: شکل 8.70 کو تبادلہ منبع سے حل کرتے ہوئے V_0 دریافت کریں۔

جواب: $6.52\angle 34.6^\circ$ V

سوال 8.38: شکل 8.71 کو تبادلہ منبع سے حل کرتے ہوئے I_0 دریافت کریں۔

جواب: $I_0 = 3.4\angle 6.45^\circ$ A

شکل 8.69: سوال 8.36 کا دور۔

شکل 8.70: سوال 8.37 کا دور۔

شکل 8.71: سوال 8.38 کا دور۔

باب 9

برقرار برقی طاقت

9.1 لمحاتی طاقت

شکل 9.1 میں بوجھ Z کو بدلتا رو منبع طاقت فراہم کرتا ہے۔اس عمومی دور کے برقرار دباو اور برقرار رو درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v(t) &= V_0 \cos(\omega t + \theta_v) \\ i(t) &= I_0 \cos(\omega t + \theta_i) \end{aligned} \tag{9.1}$$

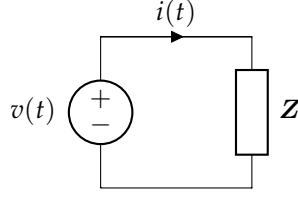
یوں کسی بھی لمحہ بوجھ کو منتقل طاقت درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= V_0 I_0 \cos(\omega t + \theta_v) \cos(\omega t + \theta_i) \end{aligned} \tag{9.2}$$

جس میں

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2} \tag{9.3}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$p(t) = \frac{V_0 I_0}{2}\left[\cos(\theta_v - \theta_i) + \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)\right] \tag{9.4}$$

شکل 9.1: بدلتا رو دور۔

ملتا ہے جہاں $\alpha = \omega t + \theta_v$ اور $\beta = \omega t + \theta_i$ لئے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لمحاتی طاقت دو اجزاء کا مجموعہ ہے۔پہلا جزو مستقل طاقت ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا جبکہ دوسرا جزو دگنی تعدد کا بدلتا رو طاقت ہے۔

مثال 9.1: شکل 9.1 میں برقرار دباو $v(t) = 15\cos(100t + 45^\circ)\,\mathrm{V}$ اور $\boldsymbol{Z} = 5\underline{/20^\circ}\,\Omega$ ہیں۔بوجھ کو منتقل لمحاتی طاقت دریافت کریں۔

حل: دوری سمتیات استعمال کرتے ہوئے

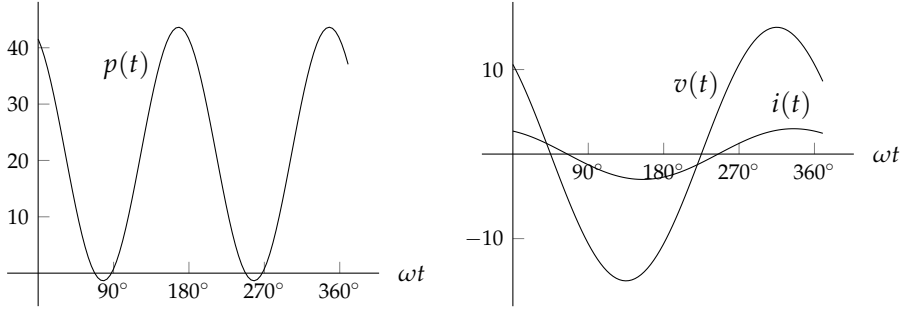
$$\begin{aligned}\hat{I} &= \frac{15\underline{/45^\circ}}{5\underline{/20^\circ}}\\ &= 3\underline{/25^\circ}\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

یعنی

$$i(t) = 3\cos(100t + 25^\circ)\,\mathrm{A}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 9.4 سے لمحاتی طاقت درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}p(t) &= 22.5\left[\cos 20^\circ + \cos(200t + 70^\circ)\right]\\ &= 21.143 + 22.5\cos(200t + 70^\circ)\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

دباو، رو اور طاقت کے خط شکل 9.2 میں دکھائے گئے ہیں۔درج بالا مساوات میں $21.143\,\mathrm{W}$ مستقل طاقت ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا جبکہ $22.5\cos(200t + 70^\circ)\,\mathrm{W}$ بدلتا رو طاقت ہے جس کی تعدد $200\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔

شکل 9.2: مثال 9.1 کے اشکال۔

مثال 9.2: شکل 9.1 میں $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta_v)\,\mathrm{V}$ اور $\boldsymbol{Z} = Z_0 \underline{/\theta_z}\,\Omega$ ہیں۔رو دریافت کریں۔

حل: دوری سمتیات استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{V_0 \underline{/\theta_v}}{Z_0 \underline{/\theta_z}} \\
&= \frac{V_0}{Z_0} \underline{/\theta_v - \theta_z}
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے وقتی دائرہ کار میں رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$
i(t) = \frac{V_0}{Z_0} \cos(\omega t + \theta_v - \theta_z) \tag{9.5}
$$

مساوات 9.1 میں دیے عمومی رو کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ θ_i درحقیقت میں $\theta_v - \theta_z$ کے برابر ہے جسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\theta_v - \theta_i = \theta_z \tag{9.6}
$$

9.2 اوسط طاقت

دہراتے تفاعل (مثلاً سائن نما تفاعل) کے ایک دوری عرصے پر تکمل کو دوری عرصے سے تقسیم کرنے سے تفاعل کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 9.1 میں دیے دباو اور رو کی صورت میں بوجھ کو منتقل اوسط طاقت درج ذیل ہو گی

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{V_0 I_0}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\omega t+\theta_v)\cos(\omega t+\theta_i)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{9.7}$$

جہاں t_0 کوئی بھی لمحہ ہو سکتا ہے جبکہ $T=\frac{2\pi}{\omega}$ دباو یا رو کا دوری عرصہ ہے۔حقیقت میں ہم ایک دوری عرصے کی بجائے n مکمل دوری عرصے پر تکمل لیتے ہوئے n دوری عرصے سے تقسیم کرتے ہوئے بھی اوسط قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔یوں اوسط طاقت درج ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے۔

$$P = \frac{V_0 I_0}{nT}\int_{t_0}^{t_0+nT} \cos(\omega t+\theta_v)\cos(\omega t+\theta_i)\,\mathrm{d}t \tag{9.8}$$

مساوات 9.4 کی مدد سے مساوات 9.7 درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} P &= \frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} \left[\cos(\theta_v-\theta_i)+\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\theta_v-\theta_i)\,\mathrm{d}t + \frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{9.9}$$

درج بالا تکمل کے دو اجزاء کو باری باری حل کرتے ہیں۔پہلا جزو مستقل ہے لہٰذا اس کو تکمل کے باہر لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\theta_v-\theta_i)\,\mathrm{d}t &= \frac{V_0 I_0}{2T}\cos(\theta_v-\theta_i)\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t \\ &= \frac{V_0 I_0}{2T}\cos(\theta_v-\theta_i)t\Big|_{t_0}^{t_0+T} \\ &= \frac{V_0 I_0}{2}\cos(\theta_v-\theta_i) \end{aligned}$$

اب مساوات 9.9 کے دوسرے جزو کو حل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)\,\mathrm{d}t &= \frac{V_0 I_0}{2T}\frac{\sin(2\omega t+\theta_v+\theta_i)}{2\omega}\bigg|_{t_0}^{t_0+T}\\ &=0\end{aligned}$$

جہاں $\sin\alpha=\sin(\alpha+T)$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یوں مساوات 9.9 سے درج ذیل اوسط طاقت حاصل ہوتا ہے۔

$$P=\frac{V_0 I_0}{2}\cos(\theta_v-\theta_i) \tag{9.10}$$

چونکہ $\cos(\alpha)=\cos(-\alpha)$ کے برابر ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں کوسائن کا دلیل $\theta_v-\theta_i$ یا $\theta_i-\theta_v$ لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 9.6 کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا مساوات کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$P=\frac{V_0 I_0}{2}\cos\theta_z \tag{9.11}$$

خالص مزاحمتی رکاوٹ $Z=R\underline{/0^\circ}$ کا زاویہ ہٹاو 0° ہوتا ہے لہٰذا $\cos 0^\circ=1$ لیتے ہوئے مزاحمتی بوجھ کا طاقت

$$P_{\text{مزاحمتی}}=\frac{V_0 I_0}{2} \tag{9.12}$$

ہو گا جہاں V_0 سے مراد مزاحمت کے دباو کا حیطہ ہے۔قانون اوہم سے درج بالا کو درج ذیل صورتوں میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$P_{\text{مزاحمتی}}=\frac{I_0^2 R}{2} \tag{9.13}$$

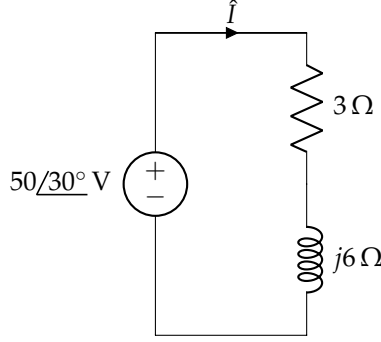
$$P_{\text{مزاحمتی}}=\frac{V_0^2}{2R} \tag{9.14}$$

درج بالا تینوں مساوات کا یک سمت رو میں مزاحمتی ضیاع کے مساوات کے ساتھ موازنہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ موجودہ تینوں مساوات کے نسب نما میں دو (2) کا اضافی عدد پایا جاتا ہے جس پر حصہ 9.4 میں تبصرہ کیا جائے گا۔

امالی متعاملیت کی رکاوٹ $Z_L=X_L\underline{/90^\circ}$ جبکہ برق گیر متعاملیت کی رکاوٹ $Z_C=X_C\underline{/-90^\circ}$ ہوتی ہے۔چونکہ $\cos(\mp 90^\circ)=0$ ہوتا ہے لہٰذا غیر مزاحمتی رکاوٹ کی طاقت صفر ہو گی۔

$$P_{\text{متعاملی}}=0 \tag{9.15}$$

چونکہ خالص متعامل پرزوں کو صفر اوسط طاقت منتقل ہوتی ہے لہٰذا انہیں بے ضیاع پرزے[1] کہتے ہیں۔دور کا متعامل

[1] lossless components

شکل 9.3: مثال 9.3 کا دور۔

حصہ، دوری عرصے کے کچھ حصے میں دور سے طاقت حاصل کرتے ہوئے ذخیرہ کرتا ہے جبکہ دوری عرصے کے کسی دوسرے حصے میں اسی طاقت کو دور کو واپس کرتا ہے۔

مثال 9.3: شکل 9.3 میں رکاوٹ کی اوسط طاقت دریافت کریں۔

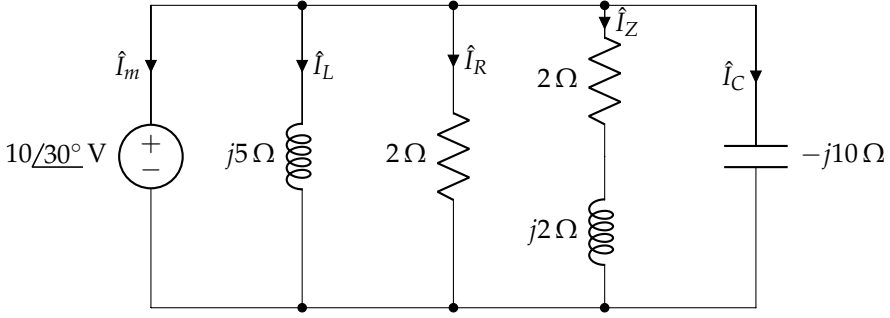
حل: رو درج ذیل ہے۔

$$\hat{I} = \frac{50\underline{/30^\circ}}{3+j6} = \frac{50\underline{/30^\circ}}{3+j6} = \frac{50\underline{/30^\circ}}{\sqrt{45}\underline{/63.435^\circ}} = 7.454\underline{/-33.435^\circ}\,\text{A}$$

یوں

$$\begin{aligned} P &= \frac{V_0 I_0}{2}\cos(\theta_v - \theta_i) \\ &= \frac{(50)(7.454)}{2}\cos[30^\circ - (-33.435^\circ)] \\ &= 83.34\,\text{W} \end{aligned}$$

ہو گا۔ چونکہ طاقت صرف مزاحمت میں ضائع ہوتی ہے لہٰذا یہی جواب مساوات 9.12 سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں V_0 سے مراد مزاحمت کے دباو کا حیطہ ہے۔ تقسیم دباو سے مزاحمت کا دباو درج ذیل ہے

$$\hat{V}_R = \left(\frac{3}{3+j6}\right) 50\underline{/30^\circ} = 22.361\underline{/-33.435^\circ}$$

شکل 9.4: مثال 9.4 کا دور۔

جس سے مزاحمت کا اوسط طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$P=\frac{V_0 I_0}{2}=\frac{(22.361)(7.454)}{2}=83.34\,\mathrm{W}$$

اسی طرح مساوات 9.13 اور مساوات 9.14 بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں

$$P=\frac{I_0^2 R}{2}=\frac{(7.454^2)(3)}{2}=83.34\,\mathrm{W}$$
$$P=\frac{V_0^2}{2R}=\frac{(22.361^2)}{(2)(3)}=83.34\,\mathrm{W}$$

مثال 9.4: شکل 9.4 میں منبع دباو کا اوسط طاقت حاصل کریں۔دور کے بقایا پرزوں کا اوسط طاقت بھی دریافت کریں۔

حل: پہلے تمام رو دریافت کرتے ہیں۔شکل میں دباو کو دیکھتے ہوئے غیر فعال رائج رو کے تحت رو کی سمتیں چنی گئی

ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_L &= \frac{10\angle 30^\circ}{j5} = \frac{10\angle 30^\circ}{5\angle 90^\circ} = 2\angle -60^\circ \\
\hat{I}_R &= \frac{10\angle 30^\circ}{2} = \frac{10\angle 30^\circ}{2\angle 0^\circ} = 5\angle 30^\circ \\
\hat{I}_Z &= \frac{10\angle 30^\circ}{2+j2} = \frac{10\angle 30^\circ}{\sqrt{8}\angle 45^\circ} = \frac{5}{\sqrt{2}}\angle -15^\circ \\
\hat{I}_C &= \frac{10\angle 30^\circ}{-j10} = \frac{10\angle 30^\circ}{10\angle -90^\circ} = 1\angle 120^\circ \\
\hat{I}_m &= -\left[\hat{I}_L + \hat{I}_R + \hat{I}_Z + \hat{I}_C\right] = 8.27647\angle -175.01689^\circ
\end{aligned}
$$

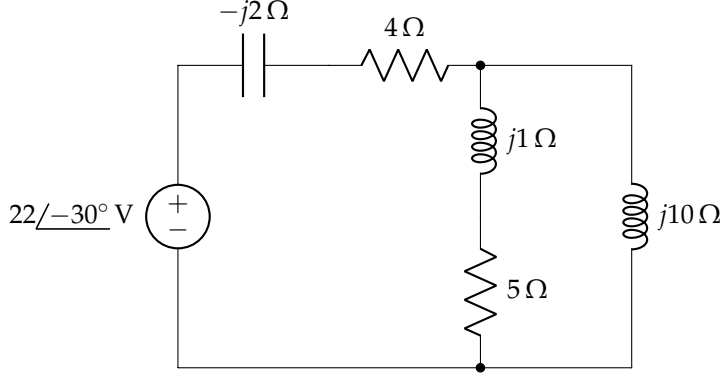
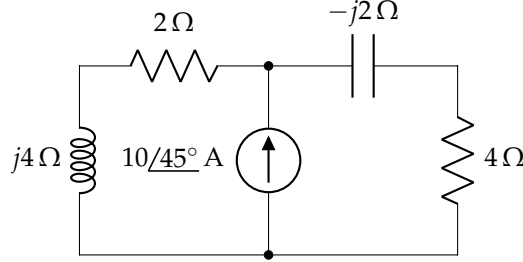
یوں انفرادی شاخوں کے اوسط طاقت مساوات 9.10 یا مساوات 9.11 سے درج ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
P_L &= \frac{(30)(2)}{2}\cos(90^\circ) &&= 0\,\text{W} \\
P_R &= \frac{(30)(5)}{2}\cos(0^\circ) &&= 75\,\text{W} \\
P_Z &= \frac{(30)(\frac{5}{\sqrt{2}})}{2}\cos(45^\circ) &&= 37.5\,\text{W} \\
P_C &= \frac{(30)(1)}{2}\cos(90^\circ) &&= 0\,\text{W} \\
P_m &= \frac{(30)(8.27647)}{2}\cos[(30^\circ + 175.01689^\circ)] &&= -112.5\,\text{W}
\end{aligned}
$$

مثبت جواب طاقت کا ضیاع ہے جبکہ منفی جواب طاقت کی پیداوار ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ منبع کی طاقتی پیداوار $112.5\,\text{W}$ ہے جو دور میں طاقت کے ضیاع

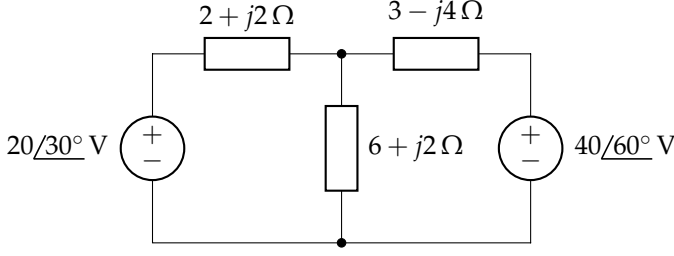
$$
P_L + P_R + P_Z + P_C = 0 + 75 + 37.5 + 0 = 112.5\,\text{W}
$$

کے عین برابر ہے۔

مشق 9.1: شکل 9.5 کے تمام مزاحمتوں میں ضائع ہونے والا اوسط طاقت دریافت کریں۔

شکل 9.5: مشق 9.1 کا دور۔

شکل 9.6: مشق 9.2 کا دور۔

جوابات: $P_{4\,\Omega} = 17.491\,\mathrm{W}$ ، $P_{5\,\Omega} = 14.975\,\mathrm{W}$

مشق 9.2: شکل 9.6 کے تمام مزاحمتوں میں ضائع ہونے والا اوسط طاقت دریافت کریں۔

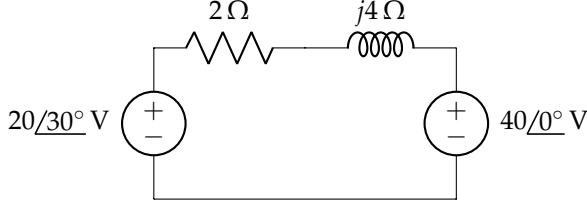
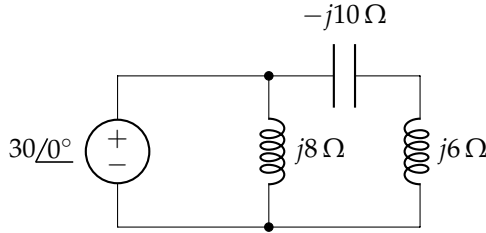
جوابات: $P_{2\,\Omega} = 50\,\mathrm{W}$ ، $P_{4\,\Omega} = 100\,\mathrm{W}$

شکل 9.7: مشق 9.3 کا دور۔

مشق 9.3: شکل 9.7 کے تمام مزاحمتوں میں ضائع ہونے والا اوسط طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $P_{2\,\Omega} = 22.72\,\mathrm{W}$ ، $P_{3\,\Omega} = 5.71\,\mathrm{W}$ ، $P_{6\,\Omega} = 11.42\,\mathrm{W}$

ایک سے زیادہ منبع کی صورت میں آپ کسی بھی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے شاخوں کی رو اور جوڑ کے دباو حاصل کرتے ہوئے طاقت دریافت کر سکتے ہیں۔البتہ یاد رہے کہ خطی میل سے طاقت کا تخمینہ نہیں لگایا جا سکتا چونکہ طاقت مربع دباو (یا مربع رو) کا تعلق رکھتا ہے جو غیر خطی تعلق ہے۔

مشق 9.4: شکل 9.8 میں اوسط طاقت کی پیداوار اور ضیاع معلوم کریں۔

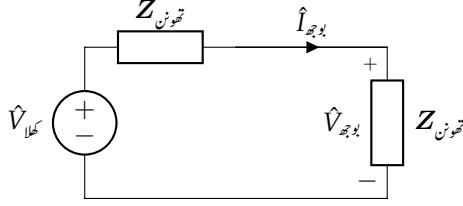
جوابات: $P_{20\underline{/30^\circ}} = -25.36\,\mathrm{W}$ ، $P_{40\underline{/0^\circ}} = -5.36\,\mathrm{W}$ ، $P_{2\,\Omega} = 30.72\,\mathrm{W}$

شکل 9.8: مشق 9.4 کا دور۔

شکل 9.9: مشق 9.5 کا دور۔

مشق 9.5: شکل 9.9 میں اوسط طاقت کی پیداوار اور ضیاع معلوم کریں۔

جواب: اوسط طاقت کی پیدا وار اور طاقت کا ضیاع صفر واٹ ہیں۔

9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ

یک سمت رو ادوار میں ہم زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کے مسئلے پر ہم حصہ 5.8 میں غور کر چکے ہیں۔آئیں بدلتا رو کی صورت میں اسی مسئلے پر دوبارہ غور کریں۔

کسی بھی دور کا تھونن مساوی حاصل کیا جا سکتا ہے۔شکل 9.10 میں تھونن مساوی دور کے ساتھ بوجھ جوڑا گیا ہے جہاں تھونن دباو کو $\hat{V}_{\text{کھلا}}$ کہا گیا ہے۔ہم جاننا چاہتے ہیں کہ بوجھ کو کس صورت میں زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔

شکل 9.10: زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ۔

شکل کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{I}_{\text{بوجھ}} = \frac{\hat{V}_{\text{کھلا}}}{\boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}} + \boldsymbol{Z}_{\text{بوجھ}}} \tag{9.16}$$

جہاں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}} &= R_{\text{تھونن}} + jX_{\text{تھونن}}\\ \boldsymbol{Z}_{\text{بوجھ}} &= R_{\text{بوجھ}} + jX_{\text{بوجھ}}\\ \hat{V}_{\text{کھلا}} &= V_{\text{کھلا}}\underline{/\theta_{\text{کھلا}}}\end{aligned}$$

ہیں۔درج بالا میں امالی رکاوٹ کی صورت میں X کی قیمت مثبت ہو گی جبکہ برق گیر رکاوٹ کی صورت میں اس کی قیمت منفی ہو گی۔یوں مساوات 9.16 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{I}_{\text{بوجھ}} = \frac{V_{\text{کھلا}}\underline{/\theta_{\text{کھلا}}}}{R_{\text{تھونن}} + jX_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}} + jX_{\text{بوجھ}}}$$

جس کی مطلق قیمت درج ذیل ہے۔

$$I_{\text{بوجھ}} = \frac{V_{\text{کھلا}}}{\sqrt{(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})^2 + (X_{\text{تھونن}} + X_{\text{بوجھ}})^2}}$$

بوجھ کو منتقل اوسط طاقت مساوات 9.13 کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}P_{\text{بوجھ}} &= \frac{1}{2}I_{\text{بوجھ}}^2R_{\text{بوجھ}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}V_{\text{کھلا}}^2R_{\text{بوجھ}}}{(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})^2 + (X_{\text{تھونن}} + X_{\text{بوجھ}})^2}\end{aligned} \tag{9.17}$$

ہم جانتے ہیں کہ X میں طاقت ضائع نہیں ہوتا لہٰذا اس کو اوسطاً صفر طاقت منتقل ہوتا ہے۔درج بالا مساوات میں کسر کے نسب نما میں $X_{\text{تھونن}} + X_{\text{بوجھ}}$ کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے طاقت بڑھائی جا سکتی ہے۔درج ذیل صورت میں اس قیمت کو صفر بنایا جا سکتا ہے۔

$$X_{\text{بوجھ}} = -X_{\text{تھونن}} \qquad \text{بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کا پہلا شرط} \tag{9.18}$$

مساوات 9.18 کے شرط پر پورا اترتے ہوئے مساوات 9.17 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P_{\text{بوجھ}} = \frac{V_{\text{کھلا}}^2 R_{\text{بوجھ}}}{2(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})^2} \tag{9.19}$$

آئیں جانتے ہیں کہ کس قیمت کے $R_{\text{بوجھ}}$ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گی۔یہ جاننے کے لئے درج بالا مساوات کے تفرق کو صفر کے برابر پُر کرتے ہوئے $R_{\text{بوجھ}}$ کی درکار قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}P_{\text{بوجھ}}}{\mathrm{d}R_{\text{بوجھ}}} = \frac{V_{\text{بوجھ}}^2 \left(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}\right)^2 - 2V_{\text{بوجھ}}^2 R_{\text{بوجھ}} \left(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}\right)}{2\left(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}\right)^4} = 0$$

اس سے

$$R_{\text{بوجھ}} = R_{\text{تھونن}} \qquad \text{بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کا دوسرا شرط} \tag{9.20}$$

حاصل ہوتا ہے۔اس نتیجے کے تحت بوجھ کو اس صورت زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گی جب بوجھ کی مزاحمت دور کے تھونن مزاحمت کے برابر ہو۔مساوات 9.18 اور مساوات 9.20 کو استعمال کرتے ہوئے، بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہونے کی شرط کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} R_{\text{بوجھ}} + jX_{\text{بوجھ}} &= R_{\text{تھونن}} - jX_{\text{تھونن}} \\ \boldsymbol{Z}_{\text{بوجھ}} &= \boldsymbol{Z}^*_{\text{تھونن}} \end{aligned} \tag{9.21}$$

مساوات 9.21 کی صورت میں زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت درج ذیل حاصل ہو گی۔

$$P_{\text{بلندتر}} = \frac{V_{\text{کھلا}}^2}{8R_{\text{بوجھ}}} \tag{9.22}$$

آخر میں یہ بھی بتلاتا چلوں کہ مزاحمتی بوجھ $(X_L = 0)$ کی صورت میں مساوات 9.17 کے تفرق کو صفر

$$\frac{\mathrm{d}P_{\text{بوجھ}}}{\mathrm{d}R_{\text{بوجھ}}} = 0$$

کے برابر پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$R_{\text{بوجھ}} = \sqrt{R^2_{\text{تھونن}} + X^2_{\text{تھونن}}} \tag{9.23}$$

مثال 9.5: شکل 9.11 میں بوجھ کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

حل:سب سے پہلے بوجھ کو ہٹاتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرنا ہو گا۔شکل-ب میں منبع دباو کو قصر دور کیا گیا ہے تا کہ تھونن مزاحمت حاصل کی جا سکے۔اسی طرح شکل-پ میں کھلے دور دباو کی نشاندہی کی گئی ہے۔ شکل-ب تھونن رکاوٹ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}} = -j4 + \frac{(6)(j2)}{6+j2} = \frac{3}{5} - j\frac{11}{5}\,\Omega$$

یوں بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ بوجھ کی رکاوٹ درج ذیل ہو۔

$$\boldsymbol{Z}_{\text{بوجھ}} = \frac{3}{5} + j\frac{11}{5}\,\Omega$$

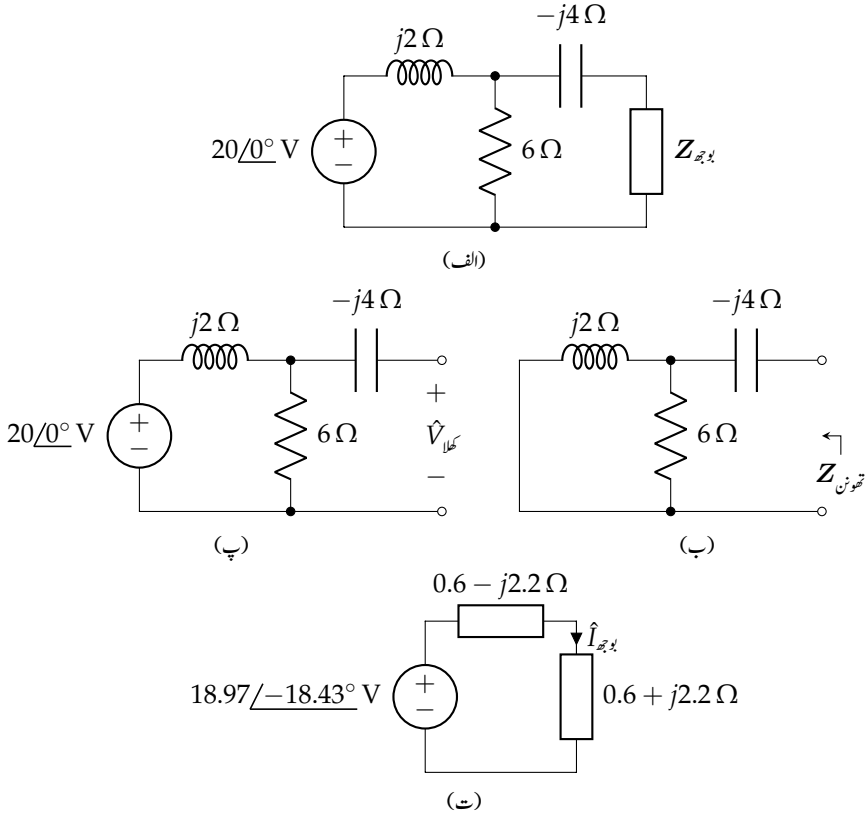
شکل-پ میں برق گیر میں صفر رو ہے لہٰذا اس پر دباو بھی صفر ہو گا۔اس طرح مزاحمت پر دباو ہی تھونن دباو ہے جسے تقسیم دباو کے کلیے سے لکھتے ہیں۔

$$\hat{V}_{\text{کھلا}} = \left(\frac{6}{6+j2}\right)(20\underline{/0^\circ}) = 18.97\underline{/-18.43^\circ}\,\text{V}$$

شکل-ت میں تھونن مساوی دور کو بوجھ کے ساتھ جوڑ کر دکھایا گیا ہے جہاں سے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_{\text{بوجھ}} &= \frac{18.97\underline{/-18.43^\circ}}{\frac{3}{5} - j\frac{11}{5} + \frac{3}{5} + j\frac{11}{5}}\\ &= 15.81\underline{/-18.43^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

یوں بوجھ کو منتقل اوسط طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$P_{\text{بوجھ}} = \frac{(15.81^2)(0.6)}{2} = 74.99\,\text{W}$$

شکل 9.11: مثال 9.5 کا دور۔

مثال 9.6: شکل 9.12 میں بوجھ کے رکاوٹ Z_L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر اس کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کو تخمینہ بھی لگائیں۔

حل:بوجھ کے ساتھ جڑے دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔شکل-ب سے نارٹن دباو $\hat{V}_{\text{کھلا}}$ حاصل ہو گا۔شکل-ب کے بائیں دائرے کی مساوات لکھتے ہیں

$$\hat{V}_x + 12\underline{/0^\circ} = \hat{I}_1(j6+2+j2)$$

جہاں

$$\hat{V}_x = -j2\hat{I}_1$$

کے برابر ہے۔درج بالا دو مساوات کو حل کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

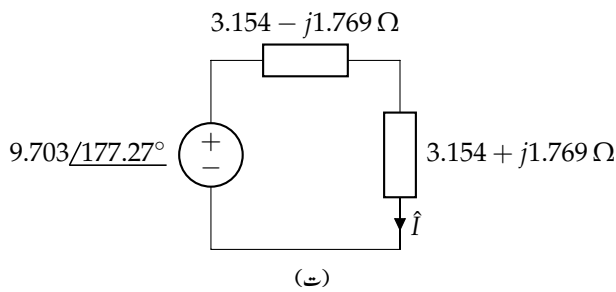
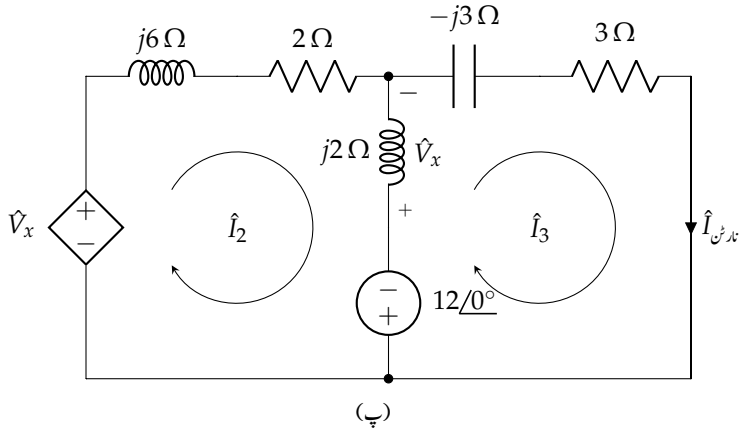
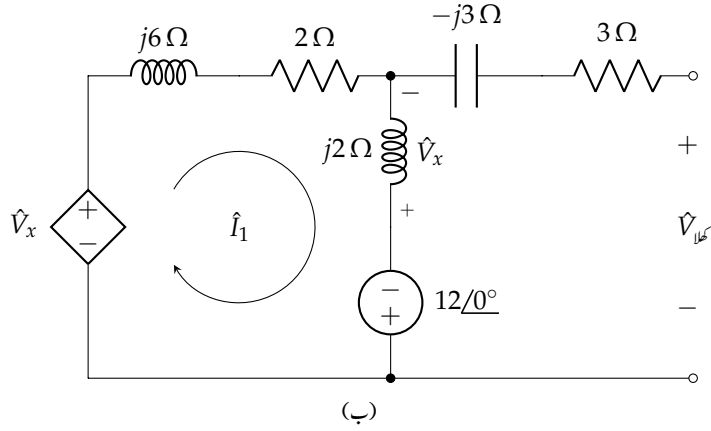
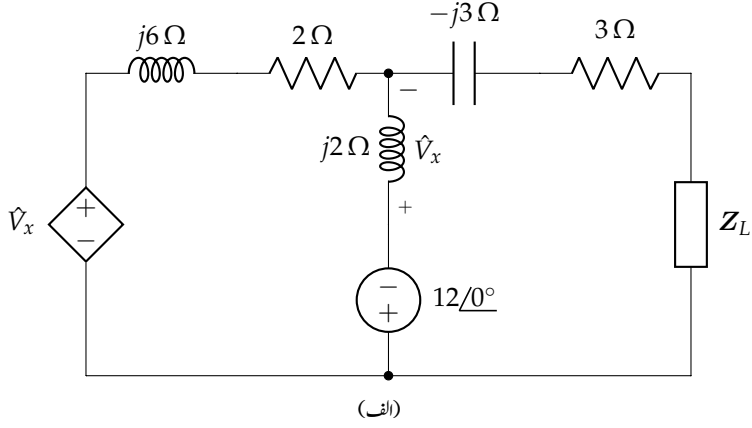
$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \frac{12\underline{/0^\circ}}{2+j10}\\ &= \frac{3}{13} - j\frac{15}{13}\\ &= 1.17669\underline{/-78.69^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

یوں تھونن دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\text{کھلا}} &= (j2)(\hat{I}_1) - 12\underline{/0^\circ}\\ &= 9.703\underline{/177.27^\circ}\,\text{V}\end{aligned}$$

شکل-پ سے نارٹن رو دریافت کرتے ہیں۔دونوں دائروں کے کرخوف مساوات اور $\hat{V}_x$ کی مساوات لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{V}_x + 12 &= \hat{I}_2(j6+2+j2) - \hat{I}_3(j2)\\ 12 + \hat{I}_3(j2-j3+3) - \hat{I}_2(j2) &= 0\\ \hat{V}_x &= (\hat{I}_3 - \hat{I}_2)(j2)\end{aligned}$$

شکل 9.12: مثال 9.6 کا دور۔

درج بالا تین ہمزاد مساوات کو $\hat{I}_3$ کے لئے حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\hat{I}_3 = \hat{I}_{\text{نارٹن}} = -\frac{12}{5} - j\frac{6}{5} = 2.683\underline{/-153.435^\circ}\,\text{A}$$

تھونن دباو اور نارٹن رو سے تھونن رکاوٹ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} Z_{\text{تھونن}} &= \frac{\hat{V}_{\text{کھلا}}}{\hat{I}_{\text{نارٹن}}} \\ &= \frac{9.703\underline{/177.27^\circ}}{2.683\underline{/-153.435^\circ}} \\ &= 3.616\underline{/-29.291^\circ} \\ &= 3.154 - j1.769\,\Omega \end{aligned}$$

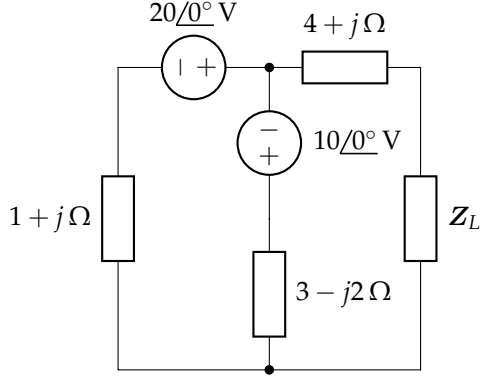
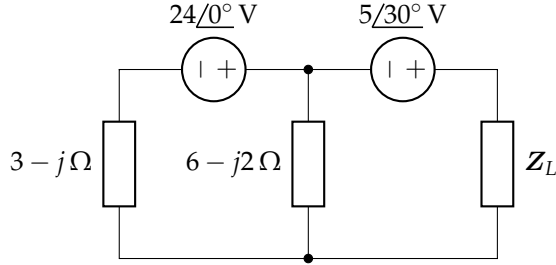
بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کی خاطر بوجھ کے رکاوٹ کی درکار قیمت $Z_{\text{بوجھ}} = 3.154 + j1.769\,\Omega$ ہے۔ شکل-ت میں تھونن دور کے ساتھ بوجھ جڑا ہوا دکھایا گیا ہے جہاں سے بوجھ کی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{9.703\underline{/177.27^\circ}}{3.154 - j1.769 + 3.154 + j1.769} \\ &= 1.538\underline{/177.27^\circ}\,\text{A} \end{aligned}$$

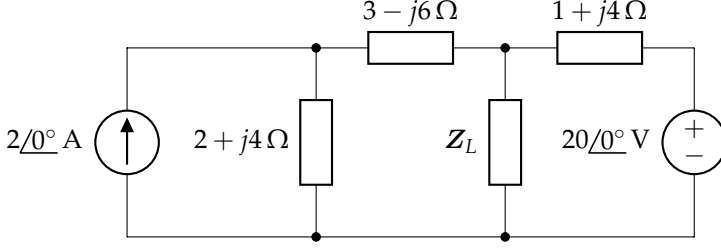
یوں بوجھ کو درج ذیل اوسط طاقت منتقل ہو گا۔

$$P_{\text{بلندتر}} = \frac{(1.538^2)(3.154)}{2} = 3.73\,\text{W}$$

مشق 9.6: شکل 9.13 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 5.1 - j1.53\,\Omega$ ، $7.18\,\text{W}$

شکل 9.13: مشق 9.6 کا دور۔

شکل 9.14: مشق 9.7 کا دور۔

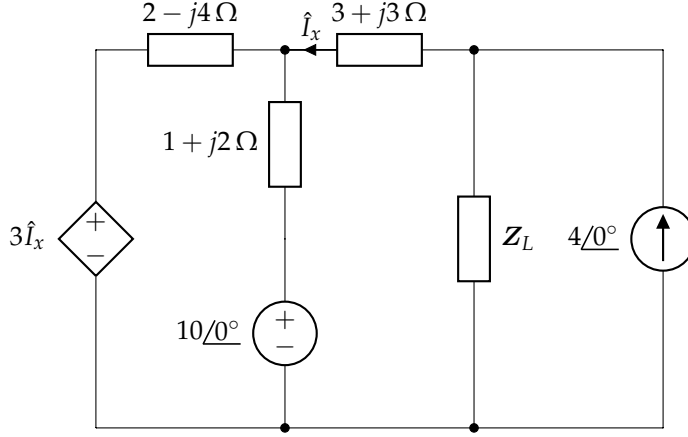
مشق 9.7: شکل 9.14 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 2 + j\frac{2}{3}\,\Omega$ ، $26.2\,\mathrm{W}$

شکل 9.15: مشق 9.8 کا دور۔

مشق 9.8: شکل 9.15 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 2.85 - j2.05\,\Omega$ ، $5.96\,\text{W}$

مشق 9.9: شکل 9.16 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 5.077j6.385\,\Omega$ ، $33.03\,\text{W}$

شکل 9.16: مشق 9.9 کا دور۔

9.4 موثر قیمت

یک سمت رو ادوار پر ہم تفصیلاً غور کر چکے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ مزاحمت R میں یک سمت رو I کے گزرنے سے مزاحمت میں I^2R طاقت کا ضیاع ہوتا ہے۔یک سمت رو کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا مزاحمت کو ہر لمحہ برقرار I^2R طاقت فراہم ہوتا ہے۔ غیر تغیر طاقت کا اوسط بھی I^2R ہو گا۔اس کے برعکس سائن نما رو کی صورت میں مزاحمت کو منتقل طاقت لمحہ بالمحہ تبدیل ہوتا ہے۔یوں $i(t) = I_0\cos(\omega t)\,\text{A}$ کی صورت میں لمحہ $t = 0$ پر مزاحمتی طاقت زیادہ سے زیادہ ہو گا جبکہ $t = \frac{\pi}{2\omega}$ پر مزاحمتی طاقت صفر کے برابر ہو گا۔اسی اتار چڑھاو کی وجہ سے سائن نما رو کی صورت میں مزاحمت کو منتقل اوسط طاقت $\frac{I_0^2R}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں I_0 حیطے کی سائن نما رو مزاحمت کو $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ قیمت کے یک سمت رو برابر طاقت فراہم کرتا ہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ I_0 حیطے کی سائن نما رو کی موثر قیمت $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ہے۔اسی طرح کسی بھی شکل کی دہراتی ہوئی رو کی موثر قیمت $I_{\text{موثر}}$ سے مراد وہ یک سمت رو ہے جو مزاحمت کو اس دہراتی ہوئی رو کے طاقت کے برابر طاقت منتقل کرتی ہو۔

ہم جانتے ہیں کہ رو $i(t)$ مزاحمت R کو $i^2(t)R$ لمحاتی طاقت منتقل کرتی ہے۔اگر اس رو کا دوری عرصہ T ہو تب مزاحمت کو اوسطاً

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)R\,\mathrm{d}t \tag{9.24}$$

طاقت منتقل ہو گا۔ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $I_{\text{موثر}}$ یک سمت رو اسی مزاحمت کو درج ذیل طاقت منتقل کرتی ہے۔

$$P = I_{\text{موثر}}^2 R \tag{9.25}$$

اگر مزاحمت کو دونوں رو ایک برابر طاقت منتقل کرتی ہوں تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$I_{\text{موثر}}^2 R = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) R \,\mathrm{d}t$$

جس سے

$$I_{\text{موثر}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{9.26}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 9.26 موثر رو $I_{\text{موثر}}$ کی تعریف ہے۔

موثر دباو کو بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔مزاحمت R کے متوازی دباو $v(t)$ نسب کرنے سے مزاحمت کو لمحاتی طور پر $\frac{v^2(t)}{R}$ طاقت منتقل ہو گا۔اگر دباو کا دوری عرصہ T ہو تب مزاحمت کو اوسطاً

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{v^2(t)}{R}\,\mathrm{d}t \tag{9.27}$$

طاقت منتقل ہو گا۔اسی مزاحمت کو یک سمت دباو $V_{\text{موثر}}$ اوسطاً درج ذیل طاقت فراہم کرتا ہے۔

$$P = \frac{V_{\text{موثر}}^2}{R} \tag{9.28}$$

دونوں طاقت برابر ہونے کی صورت میں موثر دباو کی مساوات درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$V_{\text{موثر}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{9.29}$$

آئیں ان مساوات کی مدد سے چند امواج کی موثر قیمتیں دریافت کریں۔درج بالا مساوات سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سائن نما موج کی موثر قیمت حاصل کرنے کی خاطر مربع حیطہ کی اوسط کا جذر لیا جاتا ہے۔دباو اور رو کے موثر قیمتوں کو عموماً V_{rms} اور I_{rms} لکھا جاتا ہے۔آخر میں یاد رہے کہ جذر کا مثبت جواب موثر قیمت لیا جاتا ہے۔

مثال 9.7: بدلتا رو $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \theta)$ کی موثر قیمت I_{rms} دریافت کریں۔

حل: اس موج کا دوری عرصہ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ہے۔ مساوات 9.26 سے رو کی موثر قیمت حاصل کرتے ہیں۔ فی الحال جذر کی نشان سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر مساوات کا مربع لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

$$I_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \cos^2(\omega t + \theta)\,\mathrm{d}t$$

یہاں $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$I_{\text{rms}}^2 = \frac{I_0^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \frac{I_0^2}{T}\int_0^T \frac{\cos 2(\omega t + \theta)}{2}\,\mathrm{d}t$$

جس میں دوسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔ پہلا تکمل حل کرتے ہوئے

$$I_{\text{rms}}^2 = \frac{I_0^2}{T}\frac{1}{2}t\bigg|_0^T$$

یعنی

$$I_{\text{rms}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \tag{9.30}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ $\sin(\omega t + \theta) = \cos(\omega t + \theta - 90°)$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سائن موج کی موثر قیمت بھی درج بالا ہو گی۔ اسی طرح V_0 حیطے کے سائن نما دباو کی موثر قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$V_{\text{rms}} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \tag{9.31}$$

مشق 9.10: درج بالا مثال میں دوسرے تکمل کو حل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ صفر کے برابر ہے۔

مثال 9.8: ہمارے ملک پاکستان میں $50\,\mathrm{Hz}$ تعدد اور $220\,\mathrm{V}$ تا $240\,\mathrm{V}$ موثر قیمت کا سائن نما برقی دباو گھریلو صارفین کو مہیا کا جاتا ہے۔دباو کا حیطہ دریافت کرتے ہوئے موج کی مساوات لکھیں۔

حل:دباو کی موثر قیمت کو $230\,\mathrm{V}$ لیتے ہوئے مساوات 9.31 سے حیطہ حاصل کرتے ہیں۔

$$V_0 = 230\sqrt{2} = 325\,\mathrm{V} \tag{9.32}$$

یوں موج کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$v(t) = 230\sqrt{2}\cos(2\pi 50t)\,\mathrm{V} \tag{9.33}$$

اب تک ہم دباو یا رو کا حیطہ لیتے ہوئے ان کے دوری سمتیات لکھتے رہے ہیں مثلاً $\hat{V} = V_0\angle\theta^\circ\,\mathrm{V}$ دوری سمتیہ V_0 حیطے اور θ زاویہ ہٹاو کے کوسائن دباو کو ظاہر کرتا ہے۔ہم دوری سمتیات کو موثر قیمت کی صورت میں بھی لکھ سکتے ہیں۔یوں $\hat{V}_{\mathrm{rms}} = 230\angle\theta\,\mathrm{V}$ میں $230\,\mathrm{V}$ دباو کے موثر قیمت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $\hat{V} = 325\angle\theta\,\mathrm{V}$ میں $325\,\mathrm{V}$ دباو کا حیطہ ہے۔تسلی کر لیں کہ یہ دونوں دوری سمتیات ایک ہی دباو کو ظاہر کرتی ہیں۔

دباو یا رو کی قیمتیں مختلف انداز میں بیان کی جا سکتی ہیں۔مثلاً مساوات 9.33 میں دباو کی چوٹی V_{p} یا مثبت اور منفی چوٹیوں کے درمیان قیمت V_{pp} اور یا پھر دباو کی موثر قیمت V_{rms} بیان کی جا سکتی ہے۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{p}} &= 325\,\mathrm{V} \\ V_{\mathrm{pp}} &= 650\,\mathrm{V} \\ V_{\mathrm{rms}} &= 230\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

بدلتا رو مشینوں کے دباو اور رو کی عموماً موثر قیمتیں بیان کی جاتی ہیں۔یوں $230\,\mathrm{V}$ پر چلنے والا گھریلو پنکھا در حقیقت $230\,\mathrm{V}$ کے موثر دباو پر چلے گا۔اس کتاب میں موثر قیمتیں استعمال کرتے ہوئے دباو اور رو کے ساتھ موثر یا rms لکھا جائے گا۔

سائن نما دباو اور سائن نما رو کی صورت میں مساوات 9.10 اوسط طاقت دیتی ہے۔اس مساوات کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} P &= \frac{V_0 I_0}{2}\cos(\theta_v-\theta_i) \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{2}}\frac{I_0}{\sqrt{2}}\cos(\theta_v-\theta_i) \end{aligned}$$

چونکہ $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ اور $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ بالترتیب موثر دباو V_{rms} اور موثر رو I_{rms} ہیں لہٰذا درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}\cos(\theta_v-\theta_i) \tag{9.34}$$

اسی طرح مزاحمتی بوجھ کی صورت میں اوسط طاقت کے مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

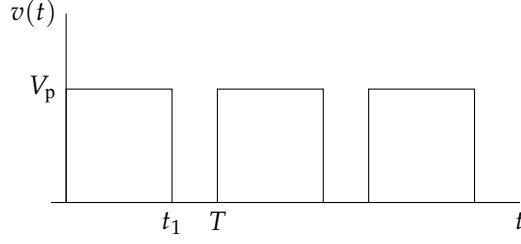
$$P = \frac{I_0^2 R}{2} = I_{\text{rms}}^2 R \tag{9.35}$$

$$P = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R} \tag{9.36}$$

جو ہوبہو یک سمت مساوات کی طرح ہیں۔یہی حقیقت موثر قیمت کی مقبولیت کی وجہ بنی ہے۔

مثال 9.9: شکل 9.17 میں دیے دباو کی موثر قیمت دریافت کریں۔اگر $D = 50\,\%$ اور $V_{\text{p}} = 60\,\text{V}$ ہوں تب یہ دباو $200\,\Omega$ مزاحمت کو کتنی طاقت مہیا کر سکتا ہے اور مزاحمت کی موثر رو کیا ہو گی۔

حل: یہاں دوری عرصہ T ہے جس میں t_1 مدت کے لئے دباو پایا جاتا ہے جبکہ $T-t_1$ مدت کے لئے دباو صفر کے برابر رہتا ہے۔یوں فعال عرصہ $D=\frac{t_1}{T}$ ہے۔مساوات 9.29 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} V_{\text{موثر}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,\mathrm{d}t} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{t_1} V_{\text{p}}^2\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{T} 0^2\,\mathrm{d}t\right]} \\ &= V_{\text{p}}\sqrt{\frac{t_1}{T}} \\ &= V_{\text{p}}\sqrt{D} \end{aligned}$$

شکل 9.17: مثال 9.9 کا دور۔

حاصل ہوتا ہے۔فعال عرصے کی قیمت $0 < D < 1$ ممکن ہے جس سے V_{rms} کی قیمت 0 تا V_p ممکن ہے۔

دی گئی معلومات کے مطابق موثر دباو درج ذیل ہے

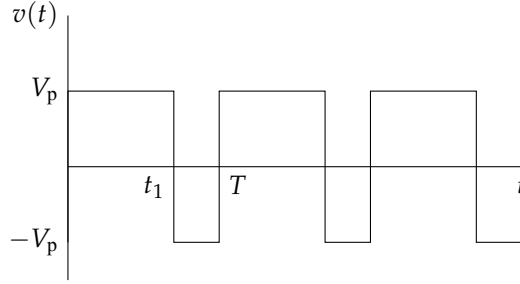
$$V_{rms} = 60\sqrt{0.5} = 42.4264\,\mathrm{V}$$

جسے $200\,\Omega$ کے متوازی لاگو کرنے سے مزاحمت کو درج ذیل طاقت مہیا ہو گی۔

$$P = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{42.4264^2}{200} = 9\,\mathrm{W}$$

مزاحمت کی موثر رو درج ذیل ہو گی۔

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{R} = \frac{42.4264}{200} = 0.212\,\mathrm{A}$$

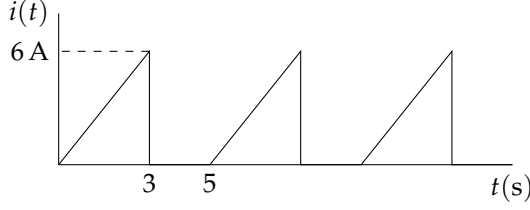
مثال 9.10: شکل 9.18 میں D کی قیمت $30\,\%$ ، $50\,\%$ اور $70\,\%$ کی صورت میں دباو کی موثر قیمت اور اوسط قیمت دریافت کریں جہاں $V_p = 10\,\mathrm{V}$ ہے۔

شکل 9.18: مثال 9.10 کا دور۔

حل: موثر قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_{\text{موثر}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{1}{T}\left[\int_0^{t_1} V_p^2\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{T}(-V_p)^2\,\mathrm{d}t\right]} \\
&= V_p\sqrt{\frac{t_1}{T}+\frac{T-t_1}{T}} \\
&= V_p
\end{aligned}
$$

یوں دی گئی تینوں فعال عرصوں کے لئے موثر دباو $10\,\mathrm{V}$ حاصل ہوتا ہے۔

آئیں اب اوسط دباو حاصل کریں۔

$$
\begin{aligned}
V_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\left[\int_0^{t_1} V_p\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{T}(-V_p)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= V_p\left(\frac{2t_1-T}{T}\right) \\
&= V_p(2D-1)
\end{aligned}
$$

شکل 9.19: مثال 9.11 کا دور۔

فعال عرصے کی دی گئی قیمتوں پر اوسط دباو درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

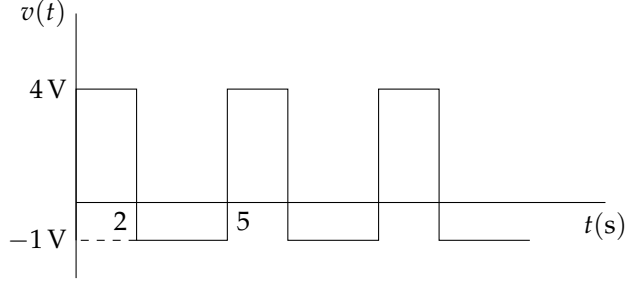
$$V_{\text{اوسط}}(D=0.3)=10\left[2(0.3)-1\right]=-4\,\mathrm{V}$$
$$V_{\text{اوسط}}(D=0.5)=10\left[2(0.5)-1\right]=0\,\mathrm{V}$$
$$V_{\text{اوسط}}(D=0.7)=10\left[2(0.7)-1\right]=4\,\mathrm{V}$$

مثال 9.11: شکل 9.19 میں رو کی موثر قیمت دریافت کریں۔

حل: یہاں دباو مسلسل تبدیل ہو رہا ہے لہٰذا اس کے خط کی مساوات درکار ہو گی۔ دباو کا سیدھا خط $(0,0)$ تا $(3,6)$ خطی تفاعل ہے جس کی شرح ڈھال درج ذیل ہے۔

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6-0}{3-0}=2$$

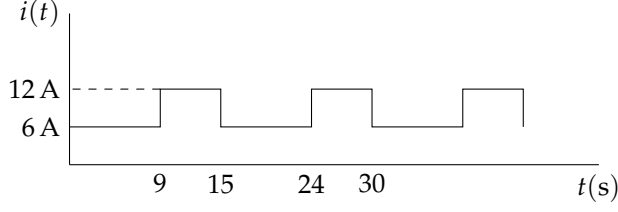
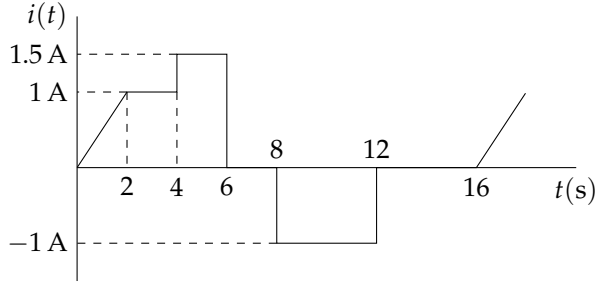
کارتیسی محدد پر $(0,0)$ سے گزرتے m شرح ڈھال کے خط کی مساوات $y=mx$ لکھی جاتی ہے لہٰذا دباو کے خط کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$v(t)=2t$$

شکل 9.20: مشق 9.11 کا دور۔

موثر دباو درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
v_{\text{rms}} &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,\mathrm{d}t} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5}\left[\int_0^3 (2t)^2\,\mathrm{d}t + \int_3^5 0^2\,\mathrm{d}t\right]} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{3}\right) t^3\Big|_0^3} \\
&= 2.68\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

مشق 9.11: شکل 9.20 میں دیے دباو کی موثر قیمت دریافت کریں۔

جواب: $\sqrt{7}\,\mathrm{V}$

شکل 9.21: مشق 9.12 کا دور۔

شکل 9.22: مشق 9.13 کا دور۔

مشق 9.12: شکل 9.21 میں $3\,\Omega$ مزاحمت کی رو دکھائی گئی ہے۔ مزاحمت میں اوسط طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔

جواب: $237.6\,\text{W}$

مشق 9.13: شکل 9.22 میں $7\,\Omega$ مزاحمت کی رو دکھائی گئی ہے۔ مزاحمت میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

جواب: $4.885\,\text{W}$

9.5 جزو طاقت

مساوات 9.34 اوسط طاقت دیتی ہے۔

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \tag{9.37}$$

اس مساوات میں $V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}$ کے حاصل ضرب کو **ظاہری طاقت**[2] کہا جاتا ہے جبکہ P کو **حقیقی طاقت**[3] کہا جاتا ہے۔ظاہری طاقت کو وولٹ ایمپیئر[4] VA میں ناپا جاتا ہے جبکہ حقیقی طاقت کو واٹ W میں ناپا جاتا ہے۔یاد رہے کہ $\cos(\theta_v - \theta_i)$ بے بعد مقدار ہے لہٰذا حقیقی طاقت کا بعد بھی حقیقت میں وولٹ ایمپیئر VA ہی ہے جسے واٹ W کا خصوصی نام دیا گیا ہے۔ حقیقی طاقت اور ظاہری طاقت میں فرق ظاہر کرنے اور انہیں پہچانے کی خاطر ان کی اکائیوں کو علیحدہ علیحدہ نام دیے گئے ہیں۔

حقیقی طاقت اور ظاہری طاقت کی شرح کو **جزو طاقت**[5] pf کہا جاتا ہے۔درج بالا مساوات کی مدد سے جزو طاقت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

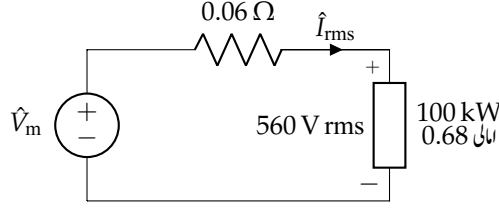
$$\text{جزو طاقت} = \text{pf} = \frac{P}{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}} = \cos(\theta_v - \theta_i) \tag{9.38}$$

جہاں

$$\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos\theta_z \tag{9.39}$$

کے برابر ہے۔زاویہ $\theta_v - \theta_i$ درحقیقت بوجھ کے رکاوٹ کا زاویہ ہٹاو θ_z ہے اور اسے **زاویہ جزو طاقت**[6] کہا جاتا ہے۔چونکہ $\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_v)$ کے برابر ہے لہٰذا جزو طاقت کو امالی بوجھ کی صورت میں **امالی جزو طاقت**[7] یا **پیچھے جزو طاقت**[8] کہا جاتا ہے جبکہ برق گیر بوجھ کی صورت میں اس کو **برق گیر جزو طاقت**[9] یا **آگے جزو طاقت**[10] کہا جاتا ہے۔اسی طرح امالی بوجھ کی صورت میں زاویہ جزو طاقت کو **امالی زاویہ جزو طاقت** یا **پیچھے زاویہ جزو طاقت** کہا جاتا ہے جبکہ برق گیر بوجھ کی صورت میں اس کو **برق گیر زاویہ جزو طاقت** یا **آگے زاویہ جزو طاقت** کہا جاتا ہے۔

مزاحمتی بوجھ کا $\theta_z = 0°$ ہوتا ہے لہٰذا مزاحمتی بوجھ کا جزو طاقت $\cos\theta_z = 1$ ہو گا۔امالہ گیر کا $\theta_z = 90°$ ہے لہٰذا اس کا $\cos\theta_z = 0$ ہے۔برق گیر کا $\theta_z = -90°$ ہے لہٰذا اس کا $\cos\theta_z = 0$ ہے۔مزاحمت

apparent power[2]
real power[3]
volt-ampere[4]
power factor, pf[5]
power factor angle[6]
inductive power factor[7]
lagging power factor[8]
capacitive power factor[9]
leading power factor[10]

شکل 9.23: اکائی جزو طاقت بہترین ہے۔

اور امالہ گیر پر مبنی دور کے رکاوٹ کا زاویہ $0°$ تا $90°$ ممکن ہے لہٰذا ایسے دور کا امالی جزو طاقت 1 تا 0 ممکن ہے۔اسی طرح برق گیر اور مزاحمت پر مبنی دور کے رکاوٹ کا زاویہ $0°$ تا $-90°$ ممکن ہے لہٰذا ایسے دور کا برق گیر جزو طاقت 1 تا 0 ممکن ہے۔مزاحمت، امالہ اور برق گیر پر مبنی دور کے رکاوٹ کا زاویہ $-90°$ سے $0°$ تا $90°$ ممکن ہے لہٰذا ایسے دور کا جزو طاقت تینوں اقسام کا ممکن ہے۔

آگے زاویہ اور پیچھے زاویہ سے مراد دباو کے لحاظ سے رو کا زاویہ ہے۔چونکہ امالی دور میں دباو سے رو پیچھے رہتی ہے لہٰذا ایسے ادوار پیچھے ادوار کہلاتے ہیں اور ان کا زاویہ اور جزو طاقت بھی پیچھے کہلاتے ہیں۔اس کے برعکس برق گیر دور میں دباو سے رو آگے رہتی ہے لہٰذا ان ادوار کو آگے ادوار کہتے ہیں اور ان کا زاویہ اور جزو طاقت بھی آگے کہلاتے ہیں۔یوں امالی بوجھ $Z_L = 2 + j6$ کا زاویہ $\tan^{-1}\frac{6}{2} = 71.57°$ اور پیچھے جزو طاقت $\cos 71.57° = 0.316$ ہے۔اسی طرح برق گیر بوجھ $Z_C = 3 - j4$ کا زاویہ $\tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = -53.13°$ اور آگے جزو طاقت $\cos(-53.13°) = 0.6$ ہے۔

مثال 9.12: ایک صنعت کو 560 V rms پر 100 kW طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔صنعتی بوجھ کا جزو طاقت 0.68 امالی ہے۔برقی طاقت کو منبع سے بوجھ تک ترسیلی تاروں[11] [12] کے ذریعہ پہنچایا جاتا ہے۔ترسیلی تار کی مزاحمت 0.06 Ω ہے۔ترسیلی تار میں طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔منبع طاقت کتنا طاقت پیدا کرے گا۔اگر صنعتی بوجھ کا جزو طاقت 0.95 امالی کر دیا جائے تب جوابات کیا ہوں گے۔

[11] transmission lines
[12] پاکستان میں بجلی کے کھمبوں پر ترسیلی تار آپ نے ضرور دیکھے ہوں گے۔ڈیم میں موجود بجلی گھر سے صارف تک طاقت انہیں ترسیلی تاروں کے ذریعہ پہنچتا ہے۔

حل: شکل 9.23 میں صورت حال دکھائی گئی ہے۔ مساوات 9.34 سے رو حاصل کرتے ہیں جہاں $\cos(\theta_v - \theta_i)$ جزو طاقت ہے۔

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \frac{P}{V_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i)} \\ &= \frac{100\,000}{(560)(0.68)} \\ &= 263\,\text{A rms} \end{aligned}$$

تار کی مزاحمت میں ضائع ہونے والے طاقت کا حساب کرتے ہیں۔

$$P_{\text{تار}} = (263^2)(0.06) = 4.138\,\text{W}$$

یوں منبع کو درج ذیل طاقت فراہم کرنا ہو گا

$$P_{\text{منبع}} = 100\,\text{kW} + 4.138\,\text{kW} = 104.138\,\text{kW}$$

جس میں سے $4.138\,\text{kW}$ مسلسل ضائع ہو رہا ہے۔

اس کے برعکس 0.95 امالی جزو طاقت کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} I_{\text{rms}} &= \frac{100\,000}{(560)(0.95)} = 188\,\text{A} \\ P_{\text{تار}} &= (188^2)(0.06) = 2.12\,\text{W} \\ P_{\text{منبع}} &= 100\,\text{kW} + 2.12\,\text{W} = 102.12\,\text{kW} \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صرف جزو طاقت تبدیل کرنے سے طاقت کا ضیاع $4.138\,\text{kW}$ سے کم ہو کر $2.12\,\text{kW}$ ہو گیا ہے۔

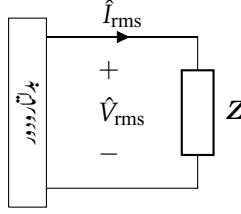
آپ نے مثال 9.12 میں دیکھا کہ جزو طاقت کی تبدیلی سے ترسیلی تاروں میں طاقت کے ضیاع تبدیل ہوتا ہے۔ مساوات 9.34 سے ظاہر ہے کہ جزو طاقت کی قیمت بڑھانے سے رو کی قیمت کم ہوتی ہے۔ جزو طاقت کی زیادہ سے زیادہ قیمت اکائی ہے۔ یوں اکائی جزو طاقت پر کم سے کم رو درکار ہو گی۔ کم سے کم رو کی صورت میں ترسیلی تاروں میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو گا۔ی

ہاں رک کر تسلی کر لیں کہ مثال 9.12 میں 0.68 آگے جزو طاقت پر بھی $I_{rms} = 263\,\mathrm{A}$ ہو گا لہٰذا مسائل اتنے ہی بُرے ہوں گے جتنے 0.68 پیچھے جزو طاقت پر ہیں۔

بجلی کا میٹر صارف کے ہاں نسب ہوتا ہے جو خرچ کیے توانائی کا حساب رکھتا ہے۔یہ میٹر ترسیلی تاروں میں ضائع توانائی کو نہیں ناپ سکتا۔برقی طاقت کے پیدا کار صنعت کو صارف کی درکار طاقت کے ساتھ ساتھ ترسیلی تاروں میں ضائع ہونے والا طاقت بھی پیدا کرنا پڑتا ہے لہٰذا ان کی دلچسپی اس بات میں ہو گی کہ ترسیلی تاروں میں طاقت کا ضیاع کم سے کم ہو۔یہی وجہ ہے کہ پیدا کار صنعت کوشش کرتی ہے کہ صارف کو مجبور کرے کہ اس کا جزو طاقت اکائی کے قریب ترین ہو۔اگر صارف اپنے جزو طاقت پر قابو نہیں پاتا تو پیدا کار اس پر جرمانہ عائد کرتا ہے۔اس کتاب کے لکھتے وقت پاکستان میں 0.9 سے کم جزو طاقت کی صورت میں صارف صنعت پر جرمانہ عائد کیا جاتا ہے البتہ گھریلو صارفین پر فی الحال کم جزو طاقت کی صورت میں کوئی جرمانہ عائد نہیں کیا جاتا۔عموماً صنعتوں میں بوجھ کا بیشتر حصہ مختلف اقسام کے موٹر پر مبنی ہوتا ہے جو امالی بوجھ ہے۔یہی وجہ ہے کہ جب بھی صنعتی بوجھ کی بات کی جائے تو امالی بوجھ کی بات کی جاتی ہے۔

حصہ 9.7 میں جزو طاقت پر قابو پانے پر غور کیا جائے گا۔

مشق 9.14: ایک صنعت کو 50 Hz تعدد اور 480 V rms دباو پر 60 kW طاقت 0.2 Ω مزاحمت کے ترسیلی تاروں کے ذریعہ فراہم کیا جاتا ہے۔ صارف اپنا جزو طاقت 0.64 امالی سے بہتر کرتے ہوئے 0.98 امالی کر دیتا ہے۔طاقت میں بچت دریافت کریں۔

جواب: 4.376 kW

شکل 9.24: طاقت کے اقسام پر غور کے لئے دور۔

9.6 مخلوط طاقت

برقرار حال بدلتا رو طاقت پر غور کرنے کے لئے **مخلوط طاقت**[13] کا جاننا ضروری ہے لہٰذا اس حصے میں مخلوط طاقت پر بحث کی جائے گی۔

شکل 9.24 میں عمومی دور دکھایا گیا ہے جہاں درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{\text{rms}} &= V_{\text{rms}}\underline{/\theta_v} = V_{\text{حقیقی}} + jV_{\text{خیالی}} \\
\hat{I}_{\text{rms}} &= I_{\text{rms}}\underline{/\theta_i} = I_{\text{حقیقی}} + jI_{\text{خیالی}} \\
\boldsymbol{Z} &= Z\underline{/\theta_z} = R + jX
\end{aligned}$$

رو $\hat{I}^*_{\text{rms}}$ سے مراد $\hat{I}_{\text{rms}}$ کا جوڑی دار مخلوط ہے۔

$$\hat{I}^*_{\text{rms}} = I_{\text{rms}}\underline{/-\theta_i} = I_{\text{حقیقی}} - jI_{\text{خیالی}}$$

مخلوط طاقت $\boldsymbol{S}$ کی تعریف

$$\boldsymbol{S} = \hat{V}_{\text{rms}}\hat{I}^*_{\text{rms}} \tag{9.40}$$

ہے جس میں دباو اور رو کی قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= V_{\text{rms}}\underline{/\theta_v} I_{\text{rms}}\underline{/-\theta_i} \\
&= V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}\underline{/\theta_v - \theta_i} \\
&= V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) + jV_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i)
\end{aligned} \tag{9.41}$$

---

[13] complex power

ملتا ہے جہاں $\theta_z = \theta_v - \theta_i$ کے برابر ہے۔مساوات 9.41 کا حقیقی جزو درحقیقت **حقیقی اوسط طاقت** P ہے جبکہ اس کے خیالی جزو Q کو **متعاملی طاقت**[14] یا **تربیعی طاقت**[15] کہا جاتا ہے۔یوں مخلوط طاقت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{S} = P + jQ \tag{9.42}$$

جہاں

$$P = \boldsymbol{S}|_{\text{حقیقی}} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(\theta_v - \theta_i) \tag{9.43}$$

$$Q = \boldsymbol{S}|_{\text{خیالی}} = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(\theta_v - \theta_i) \tag{9.44}$$

ہیں۔مساوات 9.41 سے ظاہر ہے کہ مخلوط طاقت کے حیطے کو ہم ظاہری طاقت کہتے ہیں جبکہ مخلوط طاقت کے زاویہ کو ہم زاویہ جزو طاقت کہتے ہیں۔ مخلوط طاقت کو ظاہری طاقت کی طرح وولٹ ایمپیئر VA میں ناپا جاتا ہے، حقیقی طاقت کو واٹ W میں ناپا جاتا ہے جبکہ متعاملی طاقت Q کو، شناخت کی خاطر، متعاملی وولٹ ایمپیئر var میں ناپا جاتا ہے۔یاد رہے کہ ان تمام اقسام کے طاقتوں کا بعد وولٹ ایمپیئر VA ہی ہے۔

مثال 9.13: رو $\hat{I}_{\text{rms}} = I_h + jI_k$ کی مقدار I_{rms} حاصل کریں۔رو $\hat{I}^*_{\text{rms}} = I_h - jI_k$ کی مقدار بھی حاصل کریں۔ان رو کا حاصل ضرب دریافت کریں۔

حل: دی گئی رو کی مقداریں درج ذیل ہیں۔

$$\left|\hat{I}_{\text{rms}}\right| = \sqrt{I_h^2 + I_k^2} = I_{\text{rms}}$$
$$\left|\hat{I}^*_{\text{rms}}\right| = \sqrt{I_h^2 + (-I_k)^2} = I_{\text{rms}}$$

دونوں کا حاصل ضرب درج ذیل ہے۔

$$\hat{I}_{\text{rms}} \hat{I}^*_{\text{rms}} = (I_h + jI_k)(I_h - jI_k) = I_h^2 + I_k^2 = I^2_{\text{rms}} \tag{9.45}$$

---

[14] reactive power
[15] quadrature power

آئیں مساوات 9.43 اور مساوات 9.44 پر مزاحمت، امالہ اور برق گیر کے نقطہ نظر سے مزید غور کریں۔مزاحمت کا $\theta_v - \theta_i = 0^\circ$ ہیں۔یوں مزاحمت $\sin(\theta_v - \theta_i) = 0$ اور $\cos(\theta_v - \theta_i) = 1$ ہے لہٰذا اس کے حقیقی طاقت جذب $(P > 0)$ کرتا ہے جبکہ یہ متعاملی طاقت کو جذب نہیں کرتا لہٰذا $Q = 0$ ہے۔امالہ کا $\theta_v - \theta_i = 90^\circ$ لہٰذا

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos 90^\circ = 0 \tag{9.46}$$

$$Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin 90^\circ > 0 \tag{9.47}$$

ہیں۔امالہ گیر متعاملی طاقت کو جذب کرتا ہے جبکہ یہ حقیقی طاقت کو جذب نہیں کرتا۔برق گیر کا $\theta_v - \theta_i = -90^\circ$ لہٰذا

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \cos(-90^\circ) = 0 \tag{9.48}$$

$$Q = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} \sin(-90^\circ) < 0 \tag{9.49}$$

ہیں۔برق گیر حقیقی طاقت جذب نہیں کرتا جبکہ یہ متعاملی طاقت مہیا کرتا ہے۔

ہم نے دیکھا کہ مزاحمت حقیقی طاقت جذب کرتا ہے جبکہ امالہ گیر اور برق گیر بالترتیب متعاملی طاقت جذب اور مہیا کرتے ہیں۔ ان پرزوں میں بنیادی فرق یہ ہے کہ مزاحمت میں طاقت ضائع ہوتا ہے جبکہ امالہ گیر اور برق گیر طاقت ذخیرہ کرتے ہوئے اسے دور کو واپس منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتے ہیں۔ان حقائق سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ متعاملی طاقت کا تعلق طاقت ذخیرہ کرنے سے ہے۔

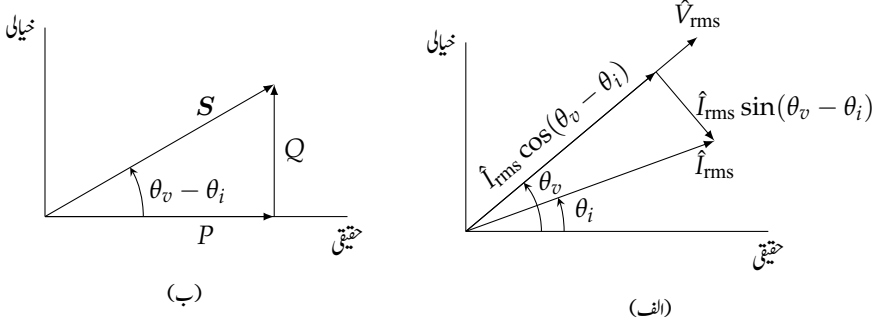
آئیں مساوات 9.40 میں $\hat{V}_{\text{rms}} = \hat{I}_{\text{rms}} \boldsymbol{Z}$ پر کریں

$$\boldsymbol{S} = \hat{V}_{\text{rms}} \hat{I}^*_{\text{rms}} = \hat{I}_{\text{rms}} \boldsymbol{Z} \hat{I}^*_{\text{rms}} = I^2_{\text{rms}} \boldsymbol{Z} = I^2_{\text{rms}} (R + jX) = P + jQ \tag{9.50}$$

جہاں مساوات 9.45 اور مساوات 9.42 کا سہارا لیا گیا ہے۔اسی طرح مساوات 9.40 میں دباو کی بجائے رو کے لئے پر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{S} = \hat{V}_{\text{rms}} \left(\frac{\hat{V}_{\text{rms}}}{\boldsymbol{Z}} \right)^* = \frac{V^2_{\text{rms}}}{\boldsymbol{Z}^*} = V^2_{\text{rms}} \boldsymbol{Y}^* = V^2_{\text{rms}} (B + jG)^* = P + jQ \tag{9.51}$$

اس مساوات کے تحت جوڑی دار مخلوط فراوانی کو دباو کی موثر قیمت سے ضرب دیتے ہوئے فراوانی کی طاقت حاصل کی جا سکتی ہے۔یہ وہ طاقت ہے جو فراوانی جذب کرتا ہے۔یوں اگر شکل 9.24 میں برق گیر بطور بوجھ $\boldsymbol{Z}$ نسب ہوتا تب فراوانی $j\omega C$ کے برابر ہوتی جسے درج بالا مساوات میں پر کرتے ہوئے

$$\boldsymbol{S} = V^2_{\text{rms}} (j\omega C)^* = -j\omega C V^2_{\text{rms}} \tag{9.52}$$

شکل 9.25: طاقتی تعلق۔

ملتا ہے۔آپ نے دیکھا کہ مخلوط طاقت کی قیمت منفی ہے۔یوں برق گیر متعاملی طاقت فراہم کرتا ہے۔

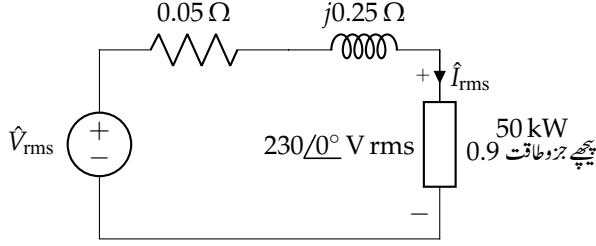
شکل 9.25 طاقت کے تعلقات پر مزید روشنی ڈالتا ہے۔شکل-الف کے تحت رو کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے۔پہلا ٹکڑا $\hat{V}_{\text{rms}}$ کے ہم زاویہ ہے جبکہ دوسرا ٹکڑا دباو کے ساتھ $90°$ کا زاویہ بناتا ہے۔مساوات 9.43 کے تحت دباو اور اس کے ہم زاویہ رو مل کر حقیقی طاقت P پیدا کرتے ہیں۔اسی طرح مساوات 9.44 کے تحت دباو اور دباو کے عمودی رو مل کر متعاملی طاقت Q پیدا کرتے ہیں۔انہیں دو مساوات سے درج ذیل تعلق بھی حاصل ہوتا ہے

$$\tan(\theta_v - \theta_i) = \frac{Q}{P} \tag{9.53}$$

جس کو شکل-ب کے **طاقتی تکون**[16] سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ شکل-ب امالی بوجھ کے لئے دکھایا گیا ہے جہاں $\theta_v - \theta_i > 0$ ہے۔چونکہ زاویہ افقی محور سے گھڑی کی گردش کے الٹ جانب گھومتے ہوئے ناپا جاتا ہے لہٰذا مثبت زاویہ حقیقی محور سے اوپر کو ہو گا۔یوں امالی بوجھ کا Q مثبت ہے۔برق گیر بوجھ کی صورت میں $\theta_v - \theta_i < 0$ ہو گا لہٰذا S کا خط حقیقی محور سے نیچے کو ہو گا لہٰذا Q کی قیمت منفی ہو گی۔مزاحمتی بوجھ کی صورت میں $\theta_v - \theta_i = 0$ ہو گا لہٰذا S کا خط عین حقیقی محور پر ہو گا لہٰذا مخلوط طاقت اور حقیقی طاقت برابر ہوں گے جبکہ متعاملی طاقت صفر ہو گا۔

آخر میں بتلاتا چلوں کہ دور میں حقیقی طاقت کی طرح مخلوط طاقت پر بھی بقائے توانائی کا قانون لاگو ہوتا ہے۔

---

[16] power triangle

شکل 9.26: مثال 9.14 کا دور۔

مثال 9.14: امالی بوجھ کو 50 kW طاقت فراہم کی جا رہی ہے۔ بوجھ پر موثر دباو 230 V ، تعدد 50 Hz اور پیچھے جزو طاقت 0.9 ہے۔ ترسیلی تاروں کی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_{\text{تار}} = 0.05 + j0.25\,\Omega$ ہے۔ منبع طاقت پر دباو، جزو طاقت اور طاقت کا تخمینہ لگائیں۔

حل: دور کو شکل 9.26 میں دکھایا گیا ہے جہاں ترسیلی تار کی رکاوٹ صرف بالائی تار پر دکھائی گئی ہے۔ حقیقت میں بالائی اور نچلی تار کی رکاوٹیں سلسلہ وار جڑی ہیں۔ ان کا مجموعہ کل رکاوٹ ہے جسے عموماً ایک تار پر دکھایا جاتا ہے۔

بوجھ کے دباو کو حوالہ دوری سمتیہ لیتے ہوئے اس کا زاویہ صفر چنا گیا ہے۔ مخلوط طاقت

$$S = \frac{P}{\text{pf}} = \frac{50\,000}{0.9} = 55\,556\,\text{V A}$$

ہے جبکہ بوجھ پر $\theta_v - \theta_i = \cos^{-1}(0.9) = 25.84°$ ہے لہٰذا بوجھ پر

$$\boldsymbol{S}_L = 55\,556\underline{/25.84°} = 50\,000 + j24\,216\,\text{V A}$$

ہو گا۔ چونکہ $\boldsymbol{S}_L = \hat{V}_{\text{rms}}\hat{I}^*_{\text{rms}}$ ہو لہٰذا

$$\hat{I}_{L,\text{rms}} = \left(\frac{55\,556\underline{/25.84°}}{230\underline{/0°}}\right)^* = 241.55\underline{/-25.84°}\,\text{A rms}$$

تار میں مخلوط طاقت کا ضیاع

$$\boldsymbol{S}_{\text{تار}} = I^2_{L,\text{rms}}\boldsymbol{Z}_{\text{تار}} = 241.55^2(0.05 + j0.25) = 2917 + j14\,586\,\text{V A}$$

ہے۔بقائے توانائی کے تحت یوں منبع طاقت پر مخلوط طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{\text{منبع}} &= \boldsymbol{S}_L + \boldsymbol{S}_{\text{تار}} \\
&= 50\,000 + j24\,216 + 2917 + j14\,586 \\
&= 52\,917 + j38\,802 \\
&= 65\,619\underline{/36.25^\circ}\,\text{V A}
\end{aligned}$$

اس طرح منبع کا دباو

$$V_{\text{rms}} = \frac{\left|\boldsymbol{S}_{\text{منبع}}\right|}{I_{L,\text{rms}}} = \frac{65\,619}{241.55} = 272\,\text{V}$$

اور منبع پر پیچھے جزو طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$\text{pf} = \cos 36.25^\circ = 0.806$$

آئیں اسی کو دوبارہ کرخوف مساوات سے حل کریں۔پیچھے جزو طاقت 0.9 سے رو کا زاویہ حاصل کرتے ہیں جہاں امالی بوجھ کی وجہ سے زاویہ منفی ہو گا۔

$$\theta_i = \cos^{-1} 0.9 = -25.84^\circ$$

بوجھ کی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$I_{\text{rms}} = \frac{P}{V_{\text{rms}} \cos\theta_i} = \frac{50\,000}{(230)(0.9)} = 241.55\,\text{A}$$

یوں $\hat{I}_{\text{rms}} = 241.55\underline{/-25.84^\circ}$ ہو گا۔شکل کو دیکھتے ہوئے کرخوف کی مساوات سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{\text{rms}} &= 230\underline{/0^\circ} + (241.55\underline{/-25.84^\circ})(0.05 + j0.25) \\
&= 272\underline{/10.41^\circ}\,\text{V}
\end{aligned}$$

یوں منبع طاقت پر دباو سے رو

$$10.41^\circ - (-25.84^\circ) = 36.25^\circ$$

پیچھے ہے لہٰذا منبع پر پیچھے جزو طاقت $\cos(36.25^\circ) = 0.806$ ہو گا۔

مثال 9.15: گزشتہ مثال کے شکل 9.26 میں بقایا تمام معلومات وہی ہیں البتہ بوجھ پر جزو طاقت پیچھے کی بجائے آگے ہے۔ منبع طاقت کا دباو حاصل کریں۔

حل: گزشتہ مثال میں عین ہمارے توقع کے مطابق منبع طاقت کا دباو، بوجھ کے دباو سے زیادہ تھا۔ یک سمت ادوار میں ہم یہی توقع کرتے ہیں کہ زیادہ دباو کے نقطے سے طاقت کم دباو کے نقطے کو فراہم ہوتا ہے۔ اس مثال میں ہم دیکھیں گے کہ کبھی کبھار ہمارے توقعات غلط ثابت ہوتی ہیں۔

اس مسئلے کو کرخوف مساوات سے حل کرتے ہیں۔ آگے جزو طاقت 0.9 سے رو کا زاویہ حاصل کرتے ہیں۔ آگے جزو طاقت برق گیر بوجھ کی نشاندہی کرتا ہے لہٰذا بوجھ کے رکاوٹ کا زاویہ مثبت ہو گا۔

$$\theta_i = \cos^{-1} 0.9 = 25.84^\circ$$

بوجھ کی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$I_{\text{rms}} = \frac{P}{V_{\text{rms}} \cos \theta_i} = \frac{50\,000}{(230)(0.9)} = 241.55\,\text{A}$$

یوں $\hat{I}_{\text{rms}} = 241.55\underline{/25.84^\circ}$ ہو گا۔ شکل کو دیکھتے ہوئے کرخوف کی مساوات سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\text{rms}} &= 230\underline{/0^\circ} + (241.55\underline{/25.84^\circ})(0.05 + j0.25) \\ &= 223\underline{/15.53^\circ}\,\text{V}\end{aligned}$$

یوں منبع طاقت پر دباو سے رو

$$(25.84^\circ) - 15.53^\circ = 10.31^\circ$$

آگے ہے لہٰذا منبع پر آگے جزو طاقت $\cos(-10.31^\circ) = 0.98$ ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بوجھ پر موثر دباو $230\,\text{V}$ ہے جبکہ منبع طاقت کا موثر دباو $223\,\text{V}$ ہے جو کہ بوجھ کے دباو سے کم ہے۔

مشق 9.15: شکل 9.26 میں بقایا تمام معلومات وہی ہیں البتہ آگے جزو طاقت 0.8 ہے۔ منبع طاقت کا موثر دباو اور جزو طاقت حاصل کریں۔ منبع کتنا طاقت پیدا کر رہا ہے۔

جوابات: $210\,\mathrm{V\,rms}$ ، آگے $\mathrm{pf} = 0.94$ ، $53.69\,\mathrm{kW}$

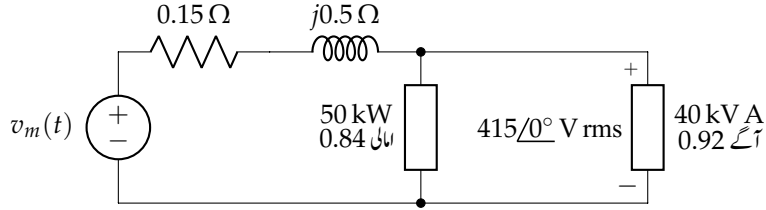
مشق 9.16: ایک صنعتی بوجھ کو $30\,\mathrm{kW}$ طاقت 0.82 پیچھے جزو طاقت پر درکار ہے۔ بوجھ پر موثر دباو $230\,\mathrm{V}$ اور تعدد $50\,\mathrm{Hz}$ ہے۔ منبع سے صنعت تک طاقت کو ترسیلی تاروں کے ذریعہ پہنچایا جاتا ہے۔ ان ترسیلی تاروں کی رکاوٹ $Z_{\text{تار}} = 0.08 + j0.3\,\Omega$ ہے۔ ترسیلی تاروں میں حقیقی اور متعاملی طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔ ترسیلی تار کے داخلی سر پر درکار حقیقی اور متعاملی طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $P_{\text{تار}} = 2024\,\mathrm{W}$ ، $Q_{\text{تار}} = 7590\,\mathrm{var}$ ، $P_{\text{منبع}} = 32\,\mathrm{kW}$ ، $Q_{\text{منبع}} = 28.53\,\mathrm{kvar}$

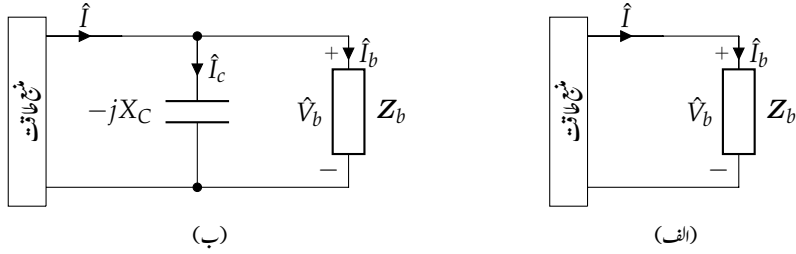
مشق 9.17: صنعتی بوجھ کو 0.86 امالی جزو طاقت پر $25\,\mathrm{kW}$ طاقت $230\,\mathrm{V\,rms}$ اور $50\,\mathrm{Hz}$ تعدد پر فراہم کی جا رہی ہے۔ ترسیلی تار کی رکاوٹ $Z_{\text{تار}} = 0.1 + j0.2\,\Omega$ ہے۔ تاروں کے داخلی سروں پر موثر دباو اور جزو طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $254\underline{/3.4^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ، 0.83 امالی

مشق 9.18: شکل 9.27 میں منبع طاقت کا دباو اور جزو طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $v_m(t) = 674\cos(100\pi t + 11.9^\circ)\,\mathrm{V}$ ، امالی 0.922

شکل 9.27: مشق 9.18 کا دور۔

(ب)

(الف)

شکل 9.28: جزو طاقت کی درستگی۔

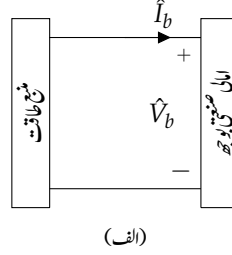
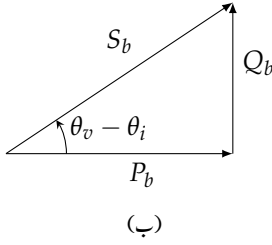
9.7 جزو طاقت کی درستگی

آپ نے مثال 9.12 میں دیکھا کہ جزو طاقت نہایت اہم معلومات فراہم کرتا ہے۔ایک مثال کے بعد جو طاقت کی درستگی پر غور کریں گے۔

مثال 9.16: شکل 9.28-الف میں منبع طاقت پر $Z_b = 2j2\,\Omega$ کا بوجھ لدا ہوا ہے ۔شکل-ب میں بوجھ کے متوازی $Z_c = -j5\,\Omega$ جوڑا گیا ہے۔دونوں اشکال میں جزو طاقت دریافت کریں۔ حل: شکل-الف میں بوجھ کی رکاوٹ کو زاویائی صورت میں لکھتے ہوئے

$$Z_b = 2 + j2 = \sqrt{8}\underline{/45^\circ}$$

امالی جزو طاقت لکھتے ہیں۔

$$\text{pf} = \cos 45^\circ = 0.7071$$

شکل 9.29: صنعتی بوجھ کا طاقتی تکون۔

شکل-ب میں کل رکاوٹ لکھتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} &= \frac{-j5(2+j2)}{-j5+2+j2} \\
&= \frac{50}{13} + j\frac{10}{13} \\
&= 3.922\underline{/11.31^\circ}
\end{aligned}
$$

جس سے امالی جزو طاقت درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\text{pf} = \cos 11.31^\circ = 0.981
$$

درج بالا مثال میں آپ نے دیکھا کہ امالی بوجھ کے متوازی برق گیر جوڑنے سے جزو طاقت میں بہتری پیدا ہوتی ہے۔ جیسا ہم پہلے بھی بتلا چکے ہیں، صنعتی بوجھ عموماً امالی جزو طاقت رکھتا ہے۔ شکل 9.29 میں عمومی صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں صنعتی بوجھ پر $\hat{V}_{\text{rms}}$ دباو مسلط کیا گیا ہے۔ صنعتی بوجھ منبع طاقت سے $\hat{I}_{\text{rms}}$ رو لیتا ہے۔ شکل-ب میں طاقتی تکون دکھایا گیا ہے۔ زاویہ $\theta_v - \theta_i$ کم کرتے ہوئے جزو طاقت بہتر بنایا جا سکتا ہے۔ شکل-ب سے واضح ہے کہ Q کو برقرار رکھتے ہوئے P کے بڑھانے سے یہ زاویہ کم کیا جا سکتا ہے۔ اس کے برعکس P کو برقرار رکھتے ہوئے Q کم کرنے سے بھی اس زاویے کو کم کیا جا سکتا ہے۔ آئیں دونوں ممکنات پر غور کریں۔

کوئی بھی صنعت حقیقی طاقت P استعمال کرتے ہوئے کام سرانجام دیتی ہے۔ کوئی بھی صنعت قائم کرنے سے پہلے اس کی پیداوار طے کی جاتی ہے۔ اس پیداوار کو حاصل کرنے کے لئے درکار مشین نسب کئے جاتے ہیں۔ غیر ضروری

طور پر P بڑھانے سے مراد، ضرورت سے زیادہ بڑی مشینیں نسب کرنا ہے، جس سے صنعت قائم کرنے کا خرچہ بڑھتا ہے۔ جزو طاقت بہتر کرنے کا یہ انتہائی مہنگا طریقہ ہو گا جسے کبھی بھی نہیں اپنایا جاتا۔ ساتھ ہی ساتھ زیادہ پیداوار کے لئے زیادہ سرمایہ درکار ہو گا۔

آئیں اب Q کم کرتے ہیں۔ جیسا درج بالا مثال میں دکھایا گیا، امالی بوجھ کے متوازی برق گیر جوڑنے سے Q کو کم کیا جا سکتا ہے۔ برق گیر کی قیمت صنعتی مشینوں کی نسبت بہت کم ہوتی ہے لہٰذا جزو طاقت کو برق گیر سے ہی بہتر بنایا جاتا ہے۔ شکل 9.30-الف میں صنعتی بوجھ کے متوازی برق گیر نسب کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں بوجھ کا طاقتی تکون دکھایا گیا ہے جس میں برق گیر متعاملی طاقت بھی دکھائی گئی ہے۔ شکل-پ میں منبع طاقت کو درپیش صنعتی بوجھ اور برق گیر متعاملی طاقت کا کل طاقتی تکون دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ Q کم ہونے سے طاقتی تکون کا زاویہ کم اور جزو طاقت بہتر ہو گا۔

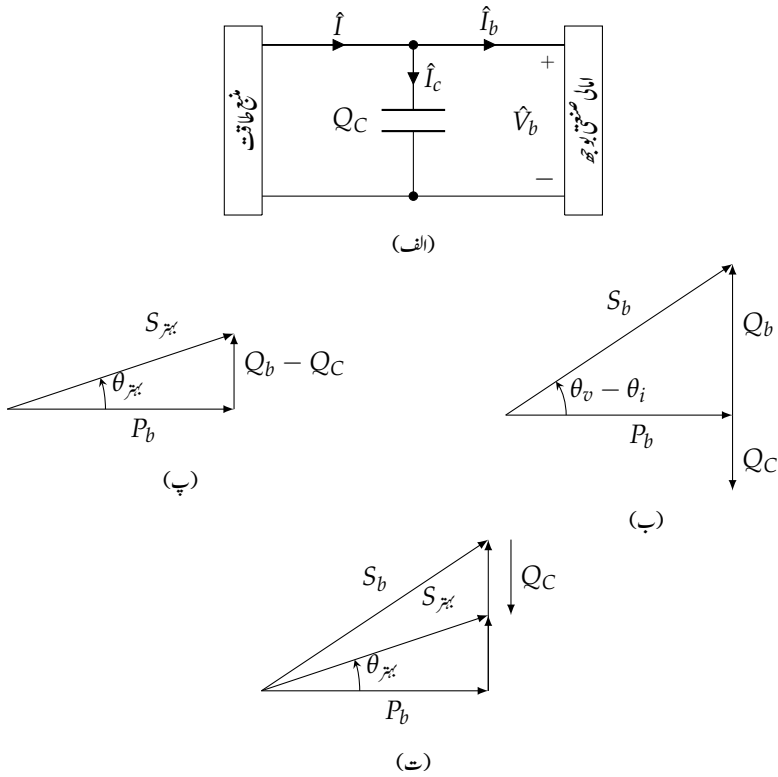
مساوات 9.52 کے تحت برق گیر کا متعاملی طاقت درج ذیل ہے۔

$$S_C = -jQ_C = -j\omega C V_{\text{rms}}^2 \qquad \text{جزو طاقت درست کرنے کے لئے درکار برق گیر} \tag{9.54}$$

کسی بھی جزو طاقت کے حصول کے لئے S_C کو شکل 9.30-ت سے حاصل کیا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے درج بالا مساوات سے درکار C حاصل کیا جا سکتا ہے۔ جزو طاقت قابو کرنے کے لئے برق گیر کی سکت عموماً متعاملی وولٹ ایمپیئر var میں ہی بیان کی جاتی ہے۔ یوں 50 Hz ، 440 V rms پر استعمال ہونے والے 822 µF برق گیر کو 50 kvar کا برق گیر کہا جائے گا۔

مثال 9.17: ایک صنعت 1200 V rms ، 50 Hz اور 0.7 امالی جزو طاقت پر 1000 kW طاقت خرچ کرتا ہے۔ پاکستان میں 0.9 جزو طاقت سے کم جزو طاقت پر صنعت پر جرمانہ عائد ہوتا ہے لہٰذا صنعت کار اپنی جزو طاقت کو 0.9 کرنا چاہتا ہے۔ اس کو درکار برق گیر کا تخمینہ لگائیں۔

حل: شکل 9.30 کے طاقتی تکون سے صنعتی بوجھ کا مخلوط طاقت دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= \frac{P}{\text{pf}} \underline{/\cos^{-1}\text{pf}} \\
&= \frac{1\,000\,000}{0.7} \underline{/\cos^{-1} 0.7} \\
&= 1.429 \underline{/45.573^\circ} \\
&= 1 + j1.021\,\text{MV A}
\end{aligned}$$

شکل 9.30: درستگی جزو طاقت کے اشکال۔

ہم حقیقی طاقت تبدیل کئے بغیر 0.9 جزو طاقت درکار ہے جس پر مخلوط طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
S_{\text{بہتر}} &= \frac{P}{\text{pf}}\underline{/\cos^{-1}\text{pf}}\\
&= \frac{1\,000\,000}{0.9}\underline{/\cos^{-1}0.9}\\
&= 1.111\underline{/25.842^\circ}\\
&= 1 + j0.482\,\text{MV A}
\end{aligned}
$$

ان نتائج سے درکار متعاملی طاقت حاصل کرتے ہیں۔

$$
Q_c = 1.021\,\text{Mvar} - 0.482\,\text{Mvar} = 0.539\,\text{Mvar}
$$

اس طرح 50 kvar سکت کے برق گیر استعمال کرتے ہوئے $\frac{539\,\text{kvar}}{50\,\text{kvar}} = 10.78$ عدد برق گیر درکار ہوں گے۔ جزو طاقت بہتر بنانے والے برق گیر مختلف اکایوں میں دستیاب ہیں۔یوں 50 kvar کے اکائی میں دستیاب گیارہ عدد برق گیر نسب کیے جائیں گے۔

اگرچہ صنعت کار زیادہ برق گیر نسب کرتے ہوئے اکائی جزو طاقت بھی حاصل کر سکتا ہے لیکن اس کو ایسا کرنے سے کوئی اضافی فائدہ نہیں ہو گا۔ جرمانہ صرف 0.9 جزو طاقت سے کم پر عائد ہوتا ہے۔ جزو طاقت کو 0.9 سے بہتر کرنے پر توانائی کی قیمت میں چھوٹ نہیں ملتی لہٰذا صنعت کار اضافی خرچہ نہیں کرے گا۔

مثال 9.18: پاکستان کی سب سے بڑی صنعت کپاس سے روئی کا دھاگا بناتی ہے۔ایسی ایک صنعت کا جزو طاقت 0.84 امالی اور حقیقی طاقت 200 kW تھا جب نیا قانون نافذ ہوا جس کے تحت کم سے کم جزو طاقت 0.9 مقرر کیا گیا۔اس صنعت کو کتنا برق گیر نسب کرنا پڑا۔

حل: شکل 9.30 کے طاقتی تکون سے گزشتہ متعاملی طاقت حاصل کرتے ہیں۔ جزو طاقت سے طاقتی تکون کا زاویہ $\cos^{-1} 0.84 = 32.86^\circ$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$
Q_b = 200\,000 \tan 32.86^\circ = 129\,\text{kvar}
$$

ہو گا۔نئے قانون کے تحت $\cos^{-1} 0.9 = 25.84^\circ$ اور درکار Q درج ذیل ہے۔

$$Q_{\text{بہتر}} = 200\,000 \tan 25.84^\circ = 97\,\text{kvar}$$

یوں صنعت کار کو $129\,\text{kvar} - 97\,\text{kvar} = 32\,\text{kvar}$ درکار ہے۔

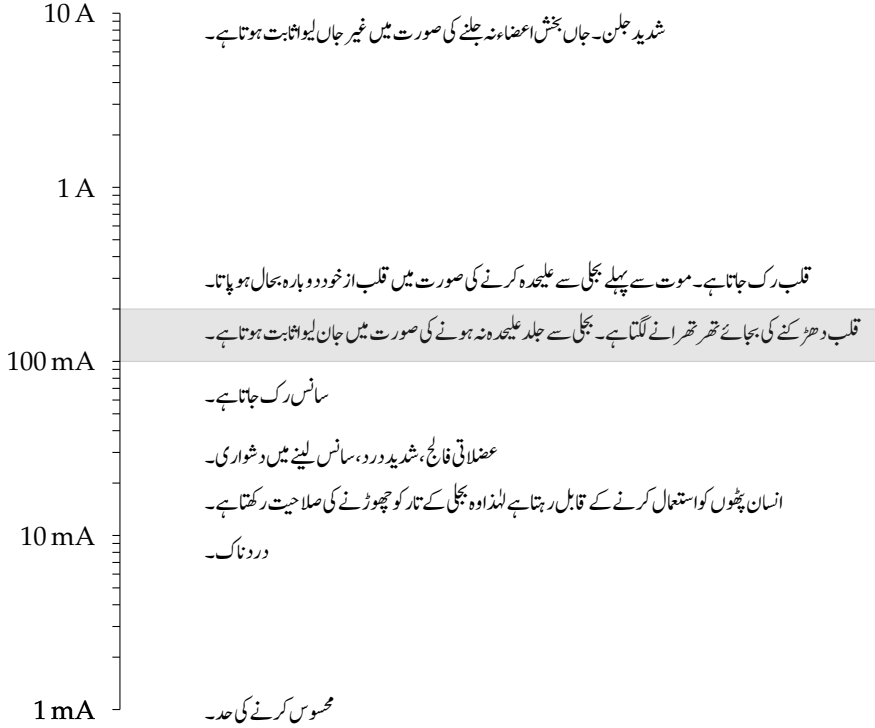
مشق 9.19: مثال 9.17 کے صنعت کار زیادہ محتاط ہیں۔وہ جزو طاقت کو 0.7 سے بہتر کرتے ہوئے 0.95 امالی کرنا چاہتے ہیں۔انہیں درکار متعاملی طاقت دریافت کریں۔انہیں $50\,\text{kvar}$ اکائی کے کتنے برق گیر نسب کرنے ہوں گے؟

جواب: $690\,\text{kvar}$ ، 14 عدد

9.8 برقی جھٹکا

برقی دباو اور طاقت کے بارے میں علم حاصل کرتے وقت ضروری ہے کہ ان سے لاحق خطرات اور ان خطرات سے بچنے کے حفاظتی اقدامات اور تدابیر پر بھی غور کیا جائے۔

میں چھوٹا بچہ تھا جب مجھے پہلی مرتبہ بجلی کا جھٹکا لگا۔آپ میں سے بیشتر طلباء بھی اس کٹھن تجربے سے گزر چکے ہوں گے۔کسی بھی دو مختلف اجسام کے رگڑ سے ساکن دباو پیدا ہوتا ہے۔اونی جرسی اتارنے سے جرسی اور آپ کے جسم کے مابین $20\,\text{kV}$ تا $40\,\text{kV}$ کا ساکن دباو پیدا ہو سکتا ہے۔آپ نے اندھیرے میں اونی جرسی اتارتے ہوئے شعلے ضرور دیکھے ہوں گے جو اسی ساکن دباو کی وجہ سے پیدا ہوتے ہیں۔آپ کو ساکن دباو کے جھٹکے بھی لگے ہوں گے جن سے جسم میں $40\,\text{A}$ تک کی رو گزر سکتی ہے۔جسم میں رو گزرنے سے بجلی کا جھٹکا محسوس ہوتا ہے۔رو گزرنے سے پٹھے کھینچ جاتے ہیں۔

انسانی جلد مردہ خلیوں سے بنی ہے۔خشک جلد کی مزاحمت $100\,\text{k}\Omega\,\text{cm}^{-2}$ تا $300\,\text{k}\Omega\,\text{cm}^{-2}$ ہوتی ہے جبکہ مکمل نم جلد کی مزاحمت سو گنا کم ہو کر $1\,\text{k}\Omega\,\text{cm}^{-2}$ تا $3\,\text{k}\Omega\,\text{cm}^{-2}$ رہ جاتی ہے۔انسانی جلد $230\,\text{V rms}$

شکل 9.31: برقی جھٹکا۔

دباو برداشت نہیں کر سکتی اور اس میں یکدم چھید پڑ جاتا ہے البتہ 120 V rms پر خشک جلد اہم ثابت ہو سکتی ہے۔

انسانی جسم تقریباً 1 kHz تک کے تعدد تک مزاحمتی خاصیت رکھتا ہے جبکہ اس سے زیادہ تعدد پر یہ RC دور کی خاصیت رکھتا ہے۔ہم 50 Hz کے بدلتا رو میں دلچسپی رکھتے ہیں لہٰذا اسی تعدد پر بات کی جائے گی۔دو ہاتھوں کے مابین تقریباً 2330 Ω جبکہ ایک طرف کے ہاتھ اور دوسری طرف کے پیر کے مابین 1130 Ω کا مزاحمت پایا جاتا ہے۔مکمل نم جلد پر موصل لعاب دار مادہ ملنے کے بعد انسانی جسم کی مزاحمت ناپی گئی۔

شکل 9.31 برقی جھٹکے[17] کی تفصیل بیان کرتا ہے۔ہماری زبان 0.45 mA کو محسوس کر سکتی ہے جبکہ ہماری جلد تقریباً 1.086 mA کو محسوس کرنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ہم 8 mA پر شدید درد محسوس کرتے ہیں۔خواتین بے خطر 6 mA اور مرد 9 mA کی رو برقرار برداشت کر سکتے ہیں۔

جسم میں تقریباً 16 mA سے زیادہ رو گزرنے سے پٹھے کھینچ جاتے ہیں۔انگلیاں مٹھی کی شکل اختیار کر لیتی ہیں۔انگلیاں جس چیز کے گرد لپٹ جائیں، انسان اس چیز کو چھوڑنے کی صلاحیت نہیں رکھتا۔عام طور ہم کہتے ہیں کہ بجلی کی تار نے انسان کو پکڑ لیا ہے۔خواتین تقریباً 10.5 mA اور مرد تقریباً 16 mA کی رو تک اپنے پٹھوں کو استعمال کرنے کی صلاحیت رکھ پاتے ہیں اور وہ اپنے مٹھی کھول سکتے ہیں۔کبھی بھی اپنے ہاتھ سے پکڑ کر کسی کو بجلی سے بچانے کی کوشش نہ کریں۔بجلی منقطع کرنا ہی درست طریقہ ہے۔

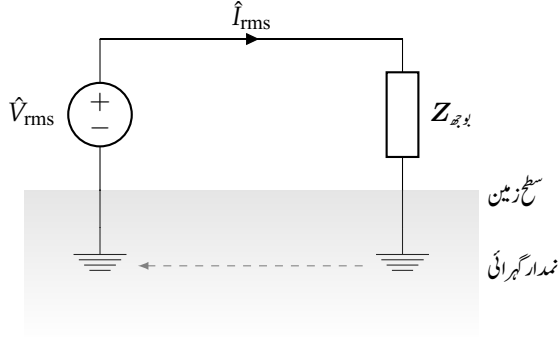
خواتین کے پٹھے 15 mA پر اور مرد کے پٹھے 23 mA پر مفلوج ہو جاتے ہیں۔رو سانس کے پٹھوں تک پہنچ جاتی ہے لہٰذا سانس لینے میں دشواری پیدا ہوتی ہے۔سانس 65 mA پر مکمل بند ہو جاتا ہے۔

100 mA تا 200 mA کی رو انتہائی خطرناک ثابت ہوتی ہے۔قلب کے دھڑکن کا خود کار نظام درہم برہم ہو جاتا ہے اور قلب تھرتھراہٹ کا شکار ہو جاتا ہے۔بجلی جلد منقطع نہ ہونے کی صورت میں جان لیوا ثابت ہوتا ہے۔بجلی منقطع ہونے کی صورت میں بھی عموماً طبّی امداد کے بغیر قلب دوبارہ از خود دھڑکنا شروع نہیں کر پاتا۔

300 mA پر قلب رک جاتا ہے۔جان ضائع ہونے سے پہلے بجلی منقطع ہونے کی صورت میں قلب از خود دوبارہ دھڑکن شروع کر پاتا ہے۔

زیادہ رو پر مزاحمتی ضیاع کی بنا پر رو کے راستے میں آنے والے اعضاء گرم ہو کر جل جاتے ہیں۔اگر جاں بخش اعضاء میں رو نہ گزرے تب غیر جان لیوا ثابت ہوتا ہے۔

---

[17] یہ نتائج چارلس ڈلزئیل Charles F Dalziel نے حاصل کئے۔

شکل 9.32: زمینی بطور سرد تار۔

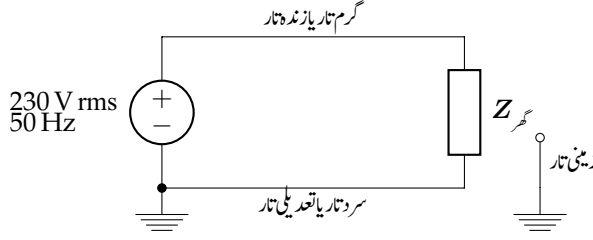
9.9 نم زمین

زمین کی سطح عموماً ریتیلی، پتھریلی یا مٹی کی ہوتی ہے۔ زمینی سطح کے نیچے نمی پائی جاتی ہے جو موصل ثابت ہوتی ہے۔ شکل 9.32 میں منبع طاقت کے ایک تار کو نمی تک پہنچایا گیا ہے۔ اسی طرح بوجھ کے ایک سرے کو بھی نمی تک پہنچایا گیا ہے۔ منبع اور بوجھ کو ایک عدد تار سے جوڑا گیا ہے۔ تجربے سے ثابت ہوتا ہے کہ ایسی صورت میں منبع سے بوجھ تک واپسی رو کے لئے موصل تار درکار نہیں ہوتا۔ نم زمین موصل تار کا کردار ادا کرتی ہے۔ عام زندگی میں واپسی تار ضرور استعمال کیا جاتا ہے چونکہ بعض اوقات شدید خشک سالی میں نمی کی سطح نیچے چلے جاتی ہے اور دونوں جانب زمینی تاروں کے مابین مزاحمت بڑھ جاتی ہے۔ خشکی کی صورت میں زمینی تاروں پر پانی ڈال کر زمین کو نم کیا جا سکتا ہے۔

9.10 ایک دور کا نظام

گھریلو صارفین کو عموماً ایک دور طاقت مہیا کی جاتی ہے۔ ایک دور نظام کو شکل 9.33 میں دکھایا گیا ہے جہاں منبع دباو کو واپڈا[18] کا ٹرانسفارمر تصور کیا جائے۔

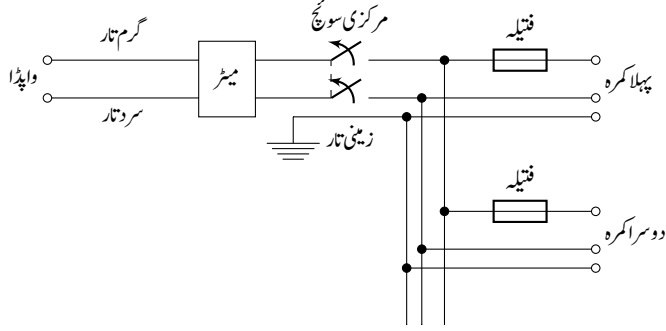
منبع کے دو تاروں کے مابین 50 Hz ، 230 V پایا جاتا ہے۔ منبع کے قریب ایک موصل تار کو زمین میں اتنی گہرائی تک دھنسا جاتا ہے کہ وہاں پورا سال مسلسل نمی پائی جاتی ہو۔ زمین میں دھنسے تار کو منبع کے ایک تار کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ منبع کی اس تار کو عام فہم میں سرد تار[19]، ٹھنڈی تار یا تعدیلی تار[20] کہا جاتا ہے۔ منبع کی دوسری تار عام فہم

[18] WAPDA
[19] cold wire
[20] neutral wire

شکل 9.33: ایک دور کا نظام۔

میں گرم تار[21] یا زندہ تار[22] کہلاتی ہے۔

گھر پر ایک عدد موصل تار کو زمین میں اتنی گہرائی تک دھنسا جاتا ہے کہ وہاں پورا سال مسلسل نمی پائی جاتی ہو۔اس تار کو برقی زمین[23] یا زمینی تار کہا جاتا ہے۔بجلی کے ساکٹ[24] میں تین سوراخ ہوتے ہیں جو گرم تار، سرد تار اور زمینی تار کے ساتھ جڑے ہوتے ہیں۔گھر میں کئی مشین استعمال ہوتے ہیں۔ان میں استری، ڈنڈے کا پنکھا، پانی کا پمپ، فریج، کپڑے دھونے کی مشین اور مویشیوں کا چارا کاٹنے کی مشین شامل ہیں۔ بجلی کے جھٹکے سے ہلاک ہونے سے بچنے کے لئے ضروری ہے کہ ایسے تمام مشینوں کا بیرونی موصل حصہ زمینی تار کے ساتھ جوڑا جائے۔حصہ 9.11 میں زمینی تار کے حفاظتی کردار پر غور کیا جائے گا۔

شکل 9.34 میں گھریلو تار بندی کا نقشہ دکھایا گیا ہے۔گھر میں واپڈا کی تاریں داخل ہوتے ہی میٹر کو جاتی ہیں۔ میٹر سے نکل کر تاریں مرکزی سوئچ کو جاتی ہیں جو گرم اور سرد دونوں تاروں کو گھریلو تاروں سے مکمل طور پر منقطع کر سکتا ہے۔اس شکل میں ہر کمرے کو تین عدد تار جاتے دکھائے گئے ہیں۔ان میں گرم تار پر فتیلہ نسب ہے جو قصر دور کی صورت میں پگھل کر برقی رو کو منقطع کرتے ہوئے تاروں کو آگ پکڑنے سے بچاتا ہے۔ حقیقت میں ہر کمرے کو تین عدد نسبتاً کم قطر کے تار چھوٹی بوجھ کو طاقت فراہم کرتے ہیں اور تین عدد زیادہ قطر کے تار بڑی بوجھ اور ساکٹوں کو طاقت فراہم کرتے ہیں۔ چھوٹے بوجھ سے مراد بلب اور پنکھے ہیں جبکہ بڑے بوجھ سے مراد فریج اور موٹر ہیں۔چھوٹے بوجھ کی تار پر عموماً 15 A کا فتیلہ جبکہ بڑی بوجھ کی تار پر 20 A کا فتیلہ نسب کیا جاتا ہے۔ فتیلے کی جگہ خود کار منقطع کار[25] بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ جدید تار بندی میں ایسے خود کار منقطع کار استعمال کئے جاتے ہیں

[21] hot wire
[22] live wire
[23] electrical earth, earth
[24] socket
[25] automatic circuit breaker

شکل 9.34: گھریلو تار بندی کا نقشہ۔

جو گرم تار اور سرد تار کی رو میں فرق ناپتے ہوئے یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ کسی کو بجلی کا جھٹکا لگ رہا ہے۔ جھٹکے کی صورت میں یہ یکدم منقطع ہو کر صارف کی حفاظت کرتے ہیں۔ انہیں **زمینی نقص منقطع کار**[26] کہا جاتا ہے۔

صارف کے عمارت میں نسب برقی میٹر، خرچ کی گئی توانائی کو ناپ کر اس کا حساب رکھتا ہے۔ ایک مثال دیکھ کر آگے بڑھتے ہیں۔

مثال 9.19: عموماً گھرانوں میں برقی طاقت کا استعمال روزانہ دہرایا جاتا ہے۔ ایسے ہی ایک چھوٹے گھرانے میں روزانہ طاقت کا استعمال جدول 9.1 میں دیا گیا ہے۔ روزانہ خرچ کی گئی توانائی حاصل کرتے ہوئے ایک مہینے (تیس دن) میں خرچ کی گئی توانائی دریافت کریں۔

---

[26] ground fault circuit interrupter, GFCI

مد	سکت(واٹ)	تعداد	وقت(گھنٹے)
بلب	100	3	4
پنکھے	75	3	24
پانی کا پمپ	500	1	1
چارے کی مشین	1000	1	0.25
فریج	450	1	12
استری	1000	1	0.5
کپڑے دھونے کی مشین	140	1	0.25

جدول 9.1: طاقت کا استعمال بالمقابل دورانیہ۔

حل: ایک گھنٹے میں 3600 سیکنڈ ہوتے ہیں۔یوں روزانہ خرچ ہونے والی توانائی درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
\text{بلب} &= 100 \times 3 \times 4 \times 3600 = 4\,320\,000\,\text{J} \\
\text{پنکھے} &= 75 \times 3 \times 24 \times 3600 = 19\,440\,000\,\text{J} \\
\text{پمپ} &= 500 \times 1 \times 1 \times 3600 = 1\,800\,000\,\text{J} \\
\text{چارہ} &= 1000 \times 1 \times 0.25 \times 3600 = 900\,000\,\text{J} \\
\text{فریج} &= 450 \times 1 \times 12 \times 3600 = 19\,440\,000\,\text{J} \\
\text{استری} &= 1000 \times 1 \times 0.5 \times 3600 = 1\,800\,000\,\text{J} \\
\text{دھلائی} &= 140 \times 1 \times 0.25 \times 3600 = 126\,000\,\text{J}
\end{aligned}
$$

ان کا مجموعہ $47.826\,\text{MJ}$ ہے جس سے مہینے میں خرچ ہونے والی توانائی درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$
47.826\,\text{MJ} \times 30 = 1\,434\,780\,000\,\text{J}
$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اس گھرانے کا بیشتر خرچہ پنکھوں اور فریج کی وجہ سے ہے۔

مثال 9.20: ایک کلو واٹ پر چلنے والا مشین ایک گھنٹے میں کتنی توانائی خرچ کرتا ہے۔

حل:

$$\text{توانائی} = 1000 \times 3600 = 3.6\,\text{MJ}$$

مثال 9.19 میں آپ نے دیکھا کہ چھوٹے گھرانے کی توانائی کا تخمینہ لگاتے ہوئے بھی ہمیں بڑے بڑے اعداد کا سامنہ پڑا جس سے ثابت ہوتا ہے کہ جاول J توانائی کی انتہائی چھوٹی اکائی ہے۔مثال 9.20 میں ایک کلو واٹ مشین کی ایک گھنٹے دورانیے میں صرف کی گئی توانائی حاصل کی گئی۔توانائی کی تجارتی اکائی یہی مقدار ہے۔یوں گھریلو اور صنعتی صارفین کے توانائی کا خرچ **کلوواٹ گھنٹوں**[27] kW h میں ناپا جاتا ہے۔توانائی کا نرخ فی کلو واٹ گھنٹہ بیان کیا جاتا ہے۔

$$\text{برقی توانائی کی تجارتی اکائی} \quad 1\,\text{kW h} = 3.6\,\text{MJ} \tag{9.55}$$

مثال 9.19 کے صارف کے ماہوار بل میں درج ذیل توانائی کا خرچ درج ہو گا۔

$$\frac{1\,434\,780\,000\,\text{J}}{3\,600\,000\,\text{J}} = 398.55\,\text{kW h}$$

اب فرض کریں کہ توانائی کی قیمت دس روپے فی کلو واٹ گھنٹہ ہے۔یوں اس گھرانے کا ماہوار بل 3986 روپے ہو گا۔

مشق 9.20: مثال 9.19 میں ہر مد کا علیحدہ علیحدہ ماہوار خرچہ معلوم کریں۔

---

[27] kilowatt-hour, kWh

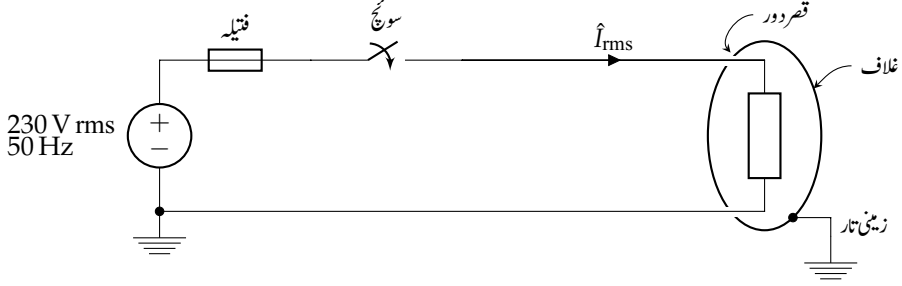
جواب: تمام جوابات روپیوں میں ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\text{بلب} &= 360\\
\text{پنکھے} &= 1620\\
\text{پمپ} &= 150\\
\text{چارہ} &= 75\\
\text{فریج} &= 1620\\
\text{استری} &= 150\\
\text{دھلائی} &= 10.5
\end{aligned}
$$

9.11 حفاظتی تدابیر

برقی طاقت کا استعمال جاننے کے بعد بنیادی حفاظتی تدابیر پر غور کرتے ہیں۔حفاظتی اقدامات از خود ایک وسیع شعبہ ہے۔یہاں بتلائے گئے اقدام بالکل بنیادی نوعیت کے ہیں۔انہیں پڑھ کر آپ ہرگز یہ نہ سمجھ لینا کہ اب آپ اس شعبے کے ماہر ہیں۔

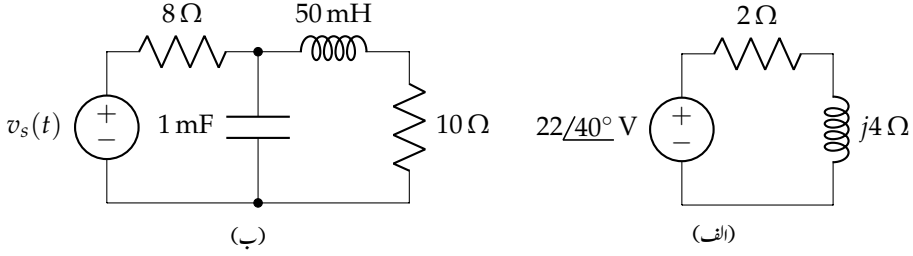
شکل میں ایک مشین کو بدلتا رو طاقت فراہم کی گئی ہے۔عموماً مشینوں کا غلاف موصل دھات سے بنا ہوتا ہے۔ فرض کریں کہ غلاف کو زمینی تار کے ساتھ نہیں جوڑا گیا ہے۔مشین میں نقص کی بنا پر غلاف تک دباو پہنچ سکتا ہے۔شکل میں ایسا ہی ایک نقص دکھایا گیا ہے جہاں غلاف میں داخل ہوتا گرم تار غلاف کے ساتھ قصر دور ہو گیا ہے۔اب اگر کوئی شخص اس مشین کے غلاف کو چھوئے تو اس کو خطرناک جھٹکا لگے گا جو جان لیوا ثابت ہو سکتا ہے۔رو منبع سے گرم تار کے ذریعے غلاف تک پہنچتے ہوئے اس بد قسمت شخص کے جسم میں گزرتے ہوئے زمین کے ذریعے واپس منبع تک پہنچے گی۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے ہی یہ شخص غلاف کو چھوتا ہے، رو کو اس شخص کے جسم سے گزرتا ہوا مکمل راستہ فراہم ہوتا ہے۔انسانی جسم سے عموماً اتنی زیادہ رو نہیں گزر پاتی کہ وہ فتیلے کو پگھلا پائے اور اگر رو اتنی زیادہ ہو بھی کہ فتیلہ پگھل جائے تو واقعی اس کو شدید ترین جھٹکا لگا ہو گا۔

اب تصور کریں کہ غلاف کو زمینی تار کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔اب جوں ہی گرم تار غلاف کے ساتھ قصر دور ہوتی ہے، زمینی تار کے راستے رو کو مکمل راستہ ملتا ہے۔زمینی تار سے اتنی زیادہ رو گزرتی ہے کہ فتیلہ فوراً پگھل جاتا ہے اور

شکل 9.35: زمینی تار زندگی بچاتی ہے۔

غلاف پر دباو نہیں رہ پاتا۔آپ نے دیکھا کہ اتنے سادہ تدبیر سے انسان کی جان بچ جاتی ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ اس حقیقت کو اچھی طرح سمجھ لیں اور زمینی تار کے استعمال کو عام بنائیں۔

مثال 9.21: ایک چالاک کوا روزانہ واپڈا کے 230 V rms گرم تار پر بیٹھا رہتا ہے۔اس کوے کو جھٹکا کیوں نہیں لگتا۔

جواب: کوے کو جھٹکا صرف اس صورت میں لگ سکتا ہے جب اس کے جسم میں رو گزرے۔ اگرچہ کوے کا جسم 230 V rms دباو پر ہے تاہم اس کو کسی قسم کا خطرہ لاحق نہیں ہے۔اگر بدقسمتی سے کھمبے پر بیٹھا دوسرا کوا اس پہلے کوے کو چونچ مارے تب صورت حال یک دم تبدیل ہو جائے گی۔کھمبے کو زمینی تار تصور کیا جا سکتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں کوے موت کی زد میں آ جائیں گے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ اسی طرح کے مسائل کو مد نظر رکھتے ہوئے برقی نظام تخلیق دیا جاتا ہے تا کہ پرندوں اور جانوروں کو خطرے میں نہ ڈالا جائے اور برقی نظام کو بھی محفوظ رکھا جا سکے۔

شکل 9.36: سوال 9.3 کا دور۔

سوالات

سوال 9.1: ایک دور کا دباو اور اس کی رو درج ذیل ہیں۔دور کی اوسط طاقت دریافت کریں۔

$$\begin{aligned} v(t) &= 3\sin\omega t\,\mathrm{V} \\ i(t) &= 10\cos\omega t\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

جواب: $p = 0\,\mathrm{W}$

سوال 9.2: ایک دور کا دباو اور اس کی رو درج ذیل ہیں۔دور کی اوسط طاقت دریافت کریں۔

$$\begin{aligned} v(t) &= 3\cos(\omega t + 45^\circ)\,\mathrm{V} \\ i(t) &= 10\cos(\omega t + 60^\circ)\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

جواب: $p = 14.49\,\mathrm{W}$

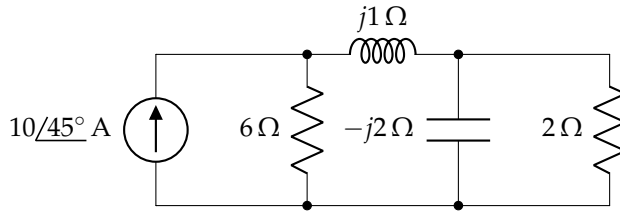
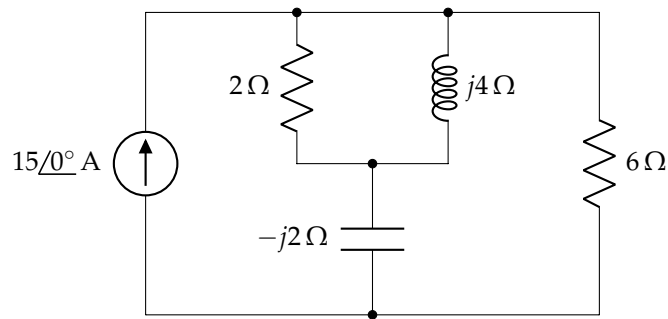
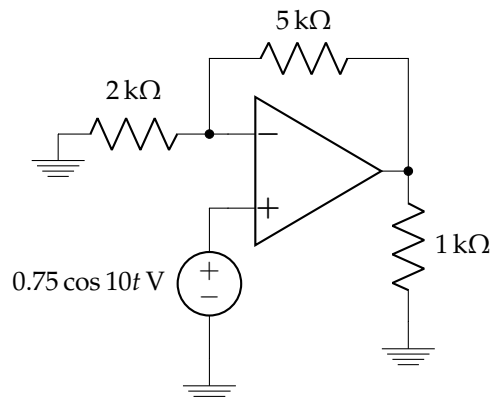
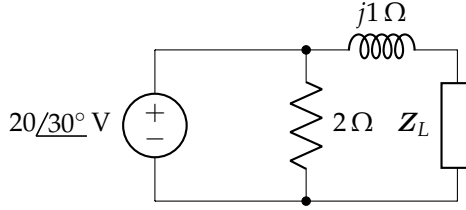
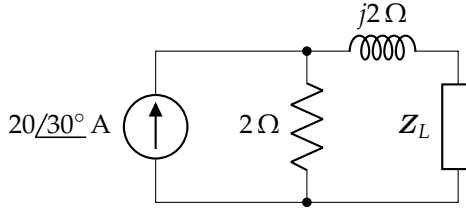
سوال 9.3: شکل 9.36-الف میں رو حاصل کرتے ہوئے اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

جواب: $p = 24.2\,\mathrm{W}$

سوال 9.4: شکل 9.36-ب میں $v_s(t) = 120\cos 100t\,\mathrm{V}$ ہے۔دور میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

جواب: $394.52\,\mathrm{W}$

سوال 9.5: شکل 9.37 میں منبع کا اوسط طاقت دریافت کریں۔

جواب: $42.86\,\mathrm{W}$

شکل 9.37: سوال 9.5 کا دور۔

شکل 9.38: سوال 9.6 کا دور۔

شکل 9.39: سوال 9.7 کا دور۔

شکل 9.40: سوال 9.8 کا دور۔

شکل 9.41: سوال 9.9 کا دور۔

سوال 9.6: شکل 9.38 کے $2\,\Omega$ مزاحمت میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

جواب: $109.5\,\mathrm{W}$

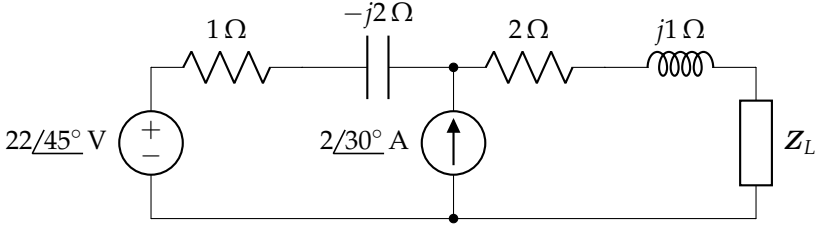
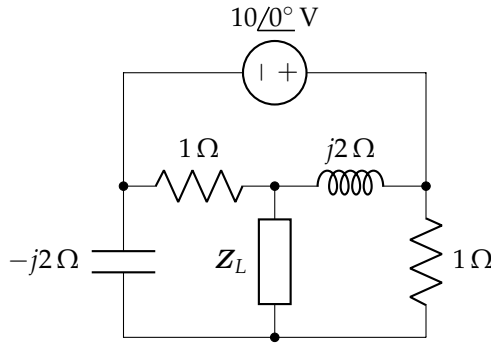
سوال 9.7: شکل 9.39 میں $1\,\mathrm{k\Omega}$ کے بوجھ میں طاقت کی اوسط ضیاع دریافت کریں۔

جواب: $3.45\,\mathrm{mW}$

سوال 9.8: شکل 9.40 میں طاقت کا اوسط ضیاع $200\,\mathrm{W}$ ہے۔نا معلوم رکاوٹ Z_L دریافت کریں۔

جواب: $Z_L = 1\,\Omega$

سوال 9.9: شکل 9.41 Z_L کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنا ہے۔رکاوٹ Z_L کی قیمت دریافت کریں اور اس کو اوسط منتقل طاقت p_Z حاصل کریں۔منبع کا اوسط طاقت p_m حاصل کرتے ہوئے Z_L کو طاقت منتقل کرنے کی کارگزاری دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 2 - j2\,\Omega$ ، $p_Z = 25\,\mathrm{W}$ ، $p_m = 50\,\mathrm{W}$ ، $50\,\%$

شکل 9.42: سوال 9.10 کا دور۔

شکل 9.43: سوال 9.11 کا دور۔

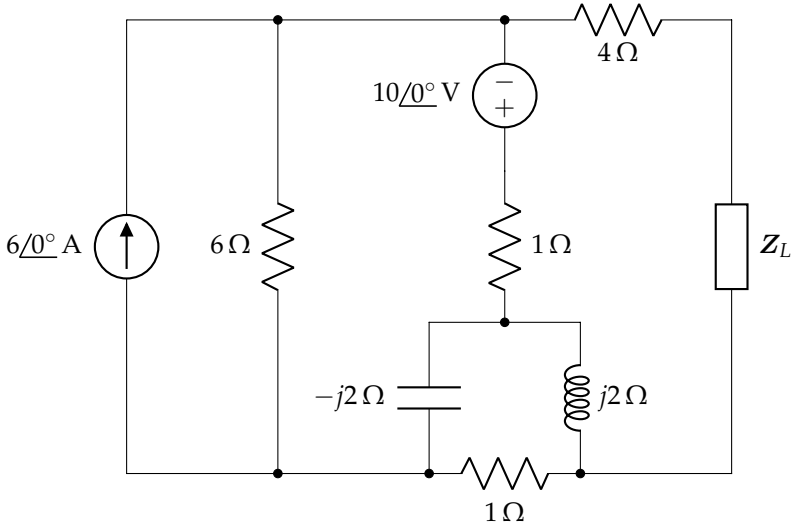
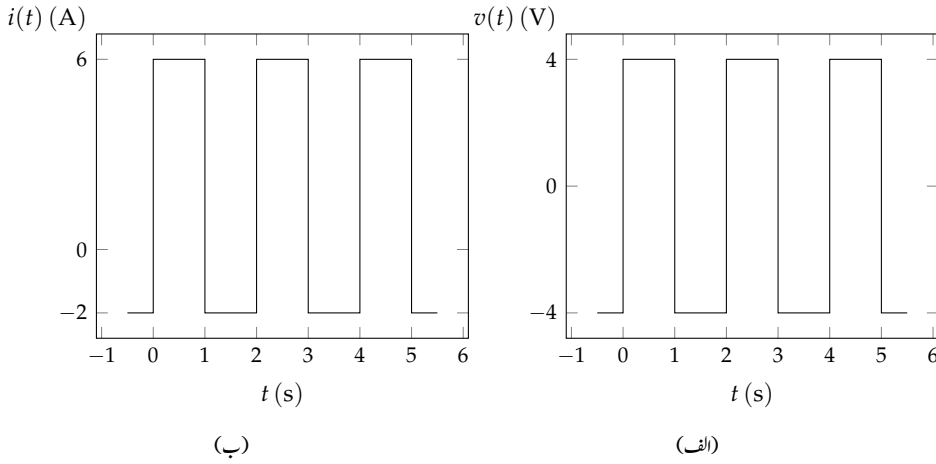
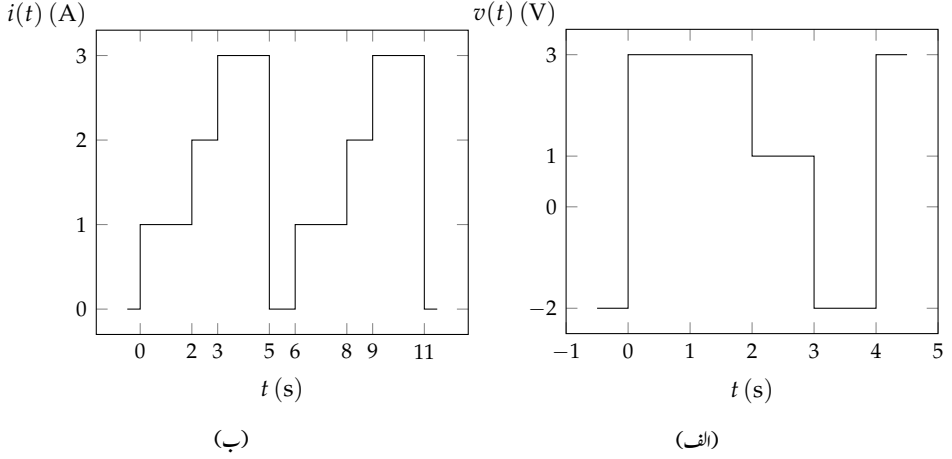
سوال 9.10: شکل 9.42 میں Z_L کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنا ہے۔ رکاوٹ Z_L کی قیمت اور اس کو اوسط منتقل طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $Z = 3 - j1\,\Omega$ ، $22.64\,\mathrm{W}$

سوال 9.11: شکل 9.43 میں Z_L کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنا ہے۔ رکاوٹ Z_L کی قیمت اور اس کو اوسط منتقل طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $Z_L = \frac{8}{5}\,\Omega$ ، $2.8125\,\mathrm{W}$

سوال 9.12: شکل 9.44 میں Z_L کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنا ہے۔ رکاوٹ Z_L کی قیمت اور اس کو اوسط منتقل طاقت حاصل کریں۔

جوابات: $Z_L = 6.8 - j1.6\,\Omega$ ، $2.18\,\mathrm{W}$

شکل 9.44: سوال 9.12 کا دور۔

شکل 9.45: سوال 9.13 اور سوال 9.14 کے ترسیم۔

شکل 9.46: سوال 9.15 اور سوال 9.16 کے ترسیم۔

سوال 9.13: شکل 9.45-الف میں دیے دباو کی موثر قیمت دریافت کریں۔

جواب: $V_{\text{rms}} = 4\,\text{V}$

سوال 9.14: شکل 9.45-ب میں دیے رو کی موثر قیمت دریافت کریں۔

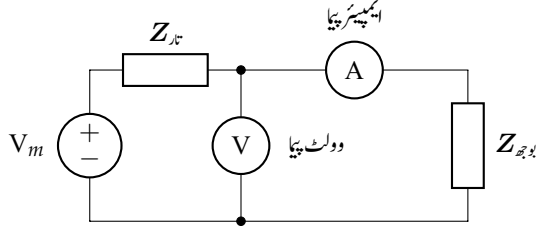
جواب: $I_{\text{rms}} = \sqrt{20}\,\text{A}$

سوال 9.15: شکل 9.46-الف میں دیے دباو کی موثر قیمت دریافت کریں۔

جواب: $V_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{23}}{2}\,\text{V}$

سوال 9.16: شکل 9.45-ب میں دیے رو کی موثر قیمت دریافت کریں۔

جواب: $I_{\text{rms}} = 2\,\text{A}$

سوال 9.17: دباو $v(t) = 15 + 10\cos(\omega t + 30^\circ)\,\text{V}$ کی موثر قیمت دریافت کریں۔

شکل 9.47: صنعتی بوجھ کو طاقت مہیا کیا گیا ہے۔

جواب: $V_{\text{rms}} = 13.398\,\mathrm{V}$

سوال 9.18: شکل 9.47 میں صنعتی بوجھ کو طاقت مہیا کیا گیا ہے۔ ایمپیئر پیما موثر $130\,\mathrm{A}$ اور وولٹ پیما موثر $440\,\mathrm{V}$ ناپتے ہیں جبکہ بوجھ کو $50\,\mathrm{kW}$ فراہم کیا جا رہے ہے۔ صنعتی بوجھ کا امالی جزو طاقت دریافت کریں۔

جواب: $\mathrm{pf} = 0.874$

سوال 9.19: شکل 9.47 میں صنعتی بوجھ کو $80\,\mathrm{kW}$ طاقت مہیا کیا گیا ہے۔ ایمپیئر پیما $220\,\mathrm{A\,rms}$ ناپتا ہے جبکہ بوجھ کا امالی جزو طاقت 0.92 ہے۔ موثر دباو حاصل کریں۔

جواب: $395\,\mathrm{V\,rms}$

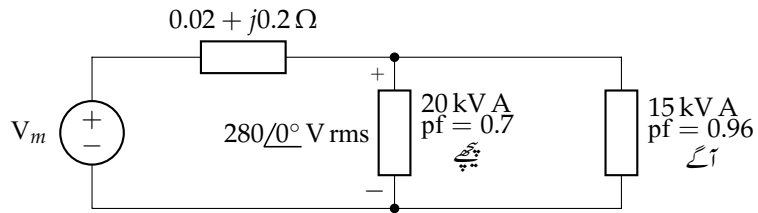
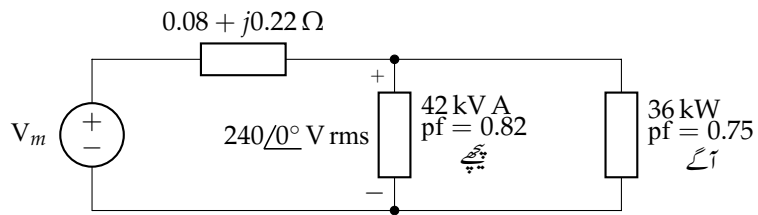
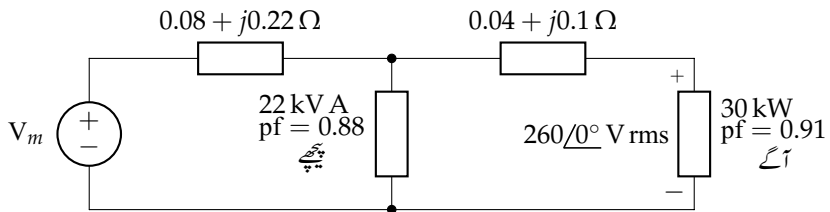
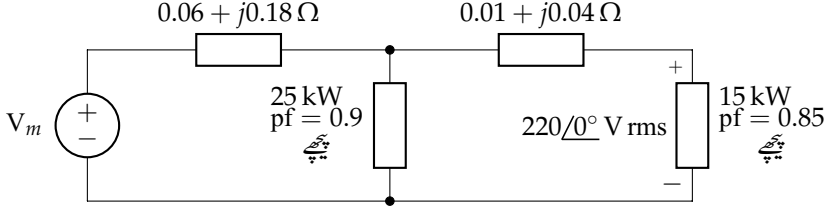
سوال 9.20: شکل 9.47 میں صنعتی بوجھ کو $\mathrm{pf} = 0.84$ امالی پر $60\,\mathrm{kW}$ طاقت مہیا کیا گیا ہے جبکہ منبع کا طاقت $64\,\mathrm{kW}$ ہے۔ تار کی رکاوٹ $Z_{\text{تار}} = 0.12\,\Omega$ ہے۔ ایمپیئر پیما اور وولٹ پیما کیا پڑھتے ہیں۔

جواب: $199.2\,\mathrm{A\,rms}$ ، $358.57\,\mathrm{V\,rms}$

سوال 9.21: شکل 9.47 میں صنعتی بوجھ کو $\mathrm{pf} = 0.86$ آگے جزو طاقت پر $20\,\mathrm{kW}$ طاقت مہیا کیا گیا ہے۔ بوجھ پر دباو $240\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔ تار کی رکاوٹ $Z_{\text{تار}} = 0.1 + j0.15\,\Omega$ ہے۔ منبع کا جزو طاقت اور مخلوط طاقت دریافت کریں۔

جواب: جزو طاقت آگے $\mathrm{pf} = 0.89$ ہے اور منبع کا مخلوط طاقت $S = 23.4\underline{/-26.5^\circ}\,\mathrm{kV\,A}$ ہے۔

سوال 9.22: شکل 9.48 میں منبع کا جزو طاقت اور مخلوط طاقت دریافت کریں۔

جوابات: جزو طاقت 0.891 پیچھے ہے۔ مخلوط طاقت $S = 37964\underline{/26.97^\circ}\,\mathrm{V\,A}$ ہے۔

شکل 9.48: شکل 9.22 کا دور۔

شکل 9.49: شکل 9.23 کا دور۔

شکل 9.50: شکل 9.24 کا دور۔

شکل 9.51: شکل 9.25 کا دور۔

سوال 9.23: شکل 9.49 میں کرخوف کے قوانین سے دباو منبع V_m حاصل کریں۔

جوابات: $V_m = 273.5\underline{/15.33^\circ}\,\text{V rms}$

سوال 9.24: شکل 9.50 میں منبع کا جزو طاقت اور مخلوط طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $\text{pf} = 0.988$ امالی، $\boldsymbol{S} = 52.26\underline{/8.95^\circ}\,\text{kV A}$

سوال 9.25: شکل 9.51 میں منبع کا دباو دریافت کریں۔

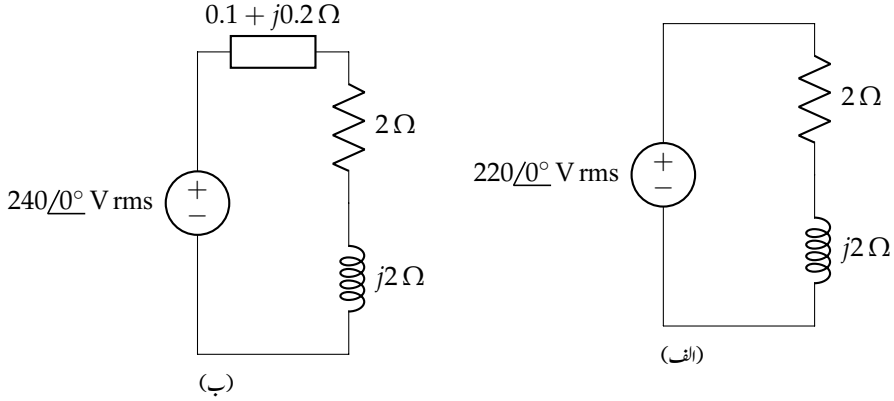
جوابات: $V_m = 252.4\underline{/6.56^\circ}\,\text{V rms}$

سوال 9.26: ایک صنعتی بوجھ کو $50\,\text{Hz}$ اور $260\,\text{V rms}$ کے منبع سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔ بوجھ کا جزو طاقت 0.8 امالی اور طاقت $40\,\text{kW}$ ہے۔ بوجھ کے متوازی کتنا برق گیر نسب کرنے سے جزو طاقت 0.9 امالی کیا جا سکتا ہے۔

جواب: $C = 500\,\mu\text{F}$

سوال 9.27: ایک صنعتی بوجھ کو $50\,\text{Hz}$ اور $200\,\text{V rms}$ کے منبع سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔ بوجھ کا جزو طاقت 0.8 امالی اور طاقت $40\,\text{kW}$ ہے۔ بوجھ کے متوازی کتنا برق گیر نسب کرنے سے جزو طاقت 0.9 امالی کیا جا سکتا ہے۔

جواب: $C = 846\,\mu\text{F}$

سوال 9.28: ایک صنعتی بوجھ کو $50\,\text{Hz}$ اور $480\,\text{V rms}$ کے منبع سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔ بوجھ کا جزو طاقت 0.7 امالی اور طاقت $66\,\text{kW}$ ہے۔ بوجھ کے متوازی کتنا برق گیر نسب کرنے سے جزو طاقت 0.92 امالی کیا جا سکتا ہے۔

شکل 9.52: سوال 9.29 اور سوال 9.30 کے ادوار۔

جواب: $C = 542\,\mu F$

سوال 9.29: شکل 9.52-الف امالی بوجھ کا مساوی دور $2 + j2\,\Omega$ دکھایا گیا ہے جس کو $50\,Hz$ کے منبع سے طاقت فراہم کی گئی ہے۔بوجھ کے متوازی کتنا برق گیر نسب کرنے سے منبع کو 0.94 امالی جزو طاقت نظر آئے گا؟

جواب: $507\,\mu F$

سوال 9.30: شکل 9.52-ب امالی بوجھ کا مساوی دور $2 + j2\,\Omega$ دکھایا گیا ہے جس کو $50\,Hz$ کے منبع سے طاقت فراہم کی گئی ہے۔بوجھ کے متوازی کتنا برق گیر نسب کرنے سے بوجھ اور برق گیر کا کل جزو طاقت 0.94 امالی ہو گا؟

جواب: $438\,\mu F$

باب 10

مقناطیسی جڑے ادوار

10.1 مشترکہ امالہ

شکل 10.1-الف میں N چکر کا لچھا[1] مقناطیسی مادے سے بنائے گئے قالب[2] پر لپیٹا گیا دکھایا گیا ہے۔اس لچھے میں i رو گزر رہی ہے۔ایمپیئر کے قانون کے تحت رو کے گزرنے سے مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے۔یوں رو کے گزرنے سے لچھے میں ϕ مقناطیسی بہاو[3] پیدا ہوتا ہے جسے ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

لچھے میں رو کی سمت اور مقناطیسی بہاو کی سمت کے تعلق پر غور کریں۔ان کا تعلق دائیں ہاتھ کا قانون کہلاتا ہے۔دائیں ہاتھ کا قانون درج ذیل ہے۔

اگر لچھے کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ ہاتھ کی چار انگلیاں رو کی سمت میں لپیٹے جائیں تب اسی ہاتھ کا انگوٹھا بہاو کی سمت دے گا۔

مقناطیسی بہاو کو کسی مخصوص خطے میں رکھنے کی خاطر مقناطیسی قالب استعمال کیا جاتا ہے۔مقناطیسی بہاو کے لئے مقناطیسی مادے سے گزرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہٰذا شکل 10.1-الف میں بہاو قالب کے اندر ہی رہتے ہوئے

---

[1] coil
[2] core
[3] magnetic flux

گھڑی کے سوئیوں کے گھومنے کی سمت میں گھومتا ہے۔یوں مقناطیسی بہاو ϕ لچھے کے تمام چکروں کے اندر سے گزرتا ہے۔لچھے کا ارتباط بہاو[4] λ درج ذیل ہے۔

$$\lambda = N\phi \tag{10.1}$$

اس کتاب میں صرف خطی نظام پر غور کیا گیا ہے۔خطی صورت میں ارتباط بہاو اور رو کا تعلق درج ذیل ہے

$$\lambda = Li \tag{10.2}$$

جہاں مساوات کے مستقل L کو خود امالہ[5] یا امالہ کہتے ہیں۔باب 6 میں امالہ پر غور کیا گیا ہے۔درج بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے بہاو اور رو کا تعلق ملتا ہے۔

$$\phi = \frac{Li}{N} \tag{10.3}$$

قانون فیراڈے کے تحت بدلتا ارتباط بہاو لچھے میں امالی دباو پیدا کرتا ہے۔

$$v = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \tag{10.4}$$

مساوات 10.2 کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$v = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

مستقل امالہ کی صورت میں اس مساوات سے امالہ کی جانی پہچانی درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے۔

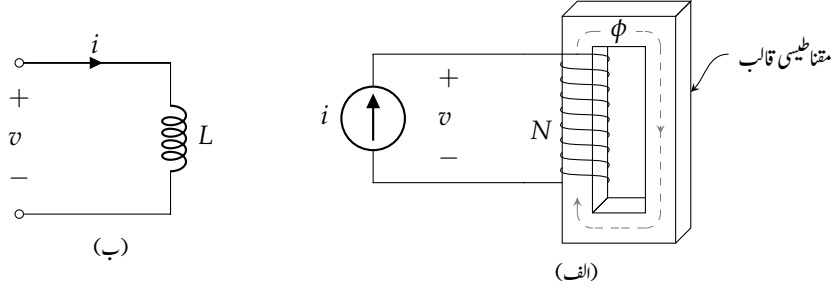
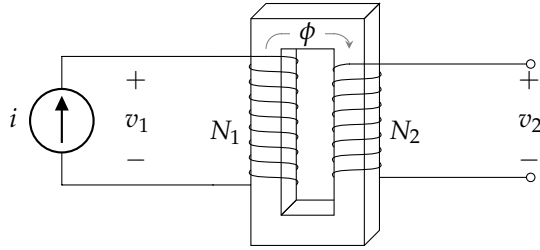
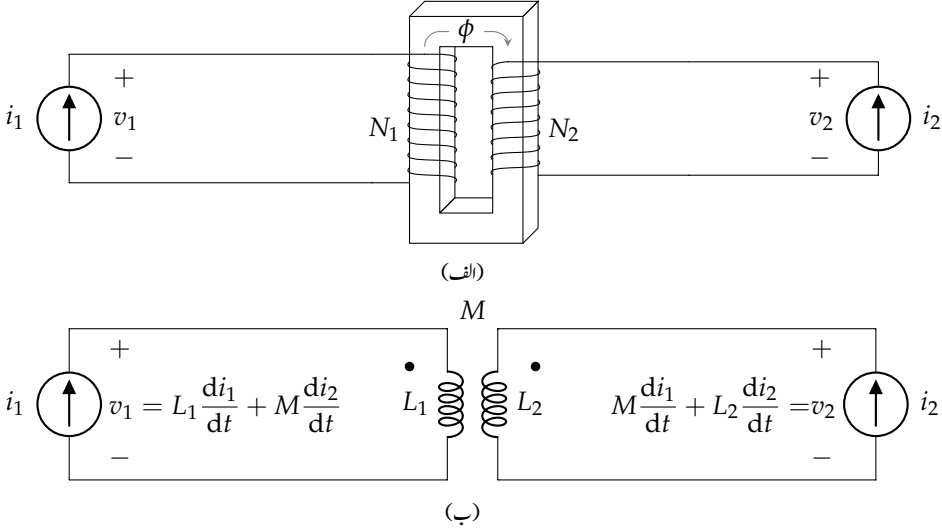
$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{10.5}$$

اس کتاب میں مستقل امالہ پر ہی غور کیا جائے گا۔شکل 10.1-ب میں اس امالہ کو دکھایا گیا ہے۔یہاں غور کریں کہ مزاحمت کی طرح امالہ کے دباو اور رو بھی غیر فعال رائج سمت کے تحت ہیں۔یوں امالہ میں رو مثبت دباو والے سر سے داخل ہوتی ہے۔مساوات 10.5 کہتا ہے کہ بدلتا رو کے گزرنے سے امالہ میں دباو پیدا ہوتا ہے۔

شکل 10.1-الف میں موجود لچھے کے قریب دوسرا لچھا رکھنے سے شکل 10.2 حاصل ہوتا ہے۔دوسرے لچھے میں رو نہیں گزر رہی ہے۔پہلے لچھے کا ارتباط بہاو درج ذیل ہے۔

$$\lambda_1 = N_1\phi = L_1 i_1 \tag{10.6}$$

---

flux linkage[4]
self inductance[5]

شکل 10.1: خود امالہ کی تعریف۔

شکل 10.2: لچھے مقناطیسی میدان کے ذریعے رابطے میں ہیں۔

شکل 10.3: قالب میں لچھوں کے بہاو ایک ہی سمت میں ہیں۔

بدلتا رو کی صورت میں ارتباط بہاو بھی وقت کے ساتھ تبدیل ہو گا۔ بدلتا ارتباط بہاو پہلے لچھے میں دباو

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \tag{10.7}$$

پیدا کرے گا۔ متعدد لچھوں کی صورت میں L_1 کو خود امالہ[6] کہا جاتا ہے۔

دوسرے لچھے کا ارتباط بہاو $\lambda_2 = N_2\phi$ ہے جو دوسرے لچھے میں قانون فیراڈے کے تحت درج ذیل دباو پیدا کرے گا۔

$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(N_2\phi\right) = \frac{d}{dt}\left(N_2 \frac{L_1 i_1}{N_1}\right) = \frac{N_2}{N_1} L_1 \frac{di_1}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} \tag{10.8}$$

دوسرے لچھے کا دباو پہلے لچھے کی رو کے وقتی تفرق کے راست تناسب ہے۔ راست تناسب کے مستقل L_{21} کو دونوں لچھوں کا مشترکہ امالہ[7] کہا جاتا ہے جسے ہینری H میں ناپا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ یہ لچھے آپ میں مقناطیسی میدان کے ذریعہ رابطے میں ہیں۔ یوں ان لچھوں کو مربوط لچھے[8] کہا جاتا ہے۔ شکل 10.3-الف میں دونوں لچھوں کو

[6] self inductance
[7] mutual inductance
[8] coupled coils

انفرادی منبع سے رو فراہم کی گئی ہے۔دونوں لچھوں پر باری باری غور کریں۔ان کی رو اور قالب کے گرد لچھے کے چکروں کی سمت کو دیکھیں۔انفرادی لچھے کی رو گھڑی کی سمت میں گھومتی بہاو پیدا کرتی ہے۔ اس طرح دونوں رو مل کر مقناطیسی بہاو ϕ پیدا کرتی ہیں۔یوں لچھوں کی ارتباط بہاو درج ذیل ہو گی۔

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + L_{12} i_2 \tag{10.9}$$

$$\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_2 i_2 \tag{10.10}$$

فیراڈے کے قانون کے تحت لچھوں کے دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$v_1 = \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_{12} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{10.11}$$

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}t} = L_{21} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{10.12}$$

ان مساوات میں $L_{12} = L_{21} = M$ کے برابر ہے جہاں مشترکہ امالہ کو M سے ظاہر کیا گیا ہے۔لچھے کے دباو کے دو اجزاء ہیں۔پہلا جزو لچھے کی اپنی رو کی بنا ہے اور یہ خود جزو کہلاتا ہے۔دوسرا جزو قریبی لچھے کی رو کے بنا ہے اور یہ مشترک جزو کہلاتا ہے۔

شکل 10.3-ب میں مربوط لچھوں کو ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔لچھوں کے انفرادی خود امالہ کو L_1 اور L_2 سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ ان کے مابین مشترکہ امالہ کو M سے ظاہر کیا گیا ہے۔

شکل 10.4-الف میں قالب کے گرد، دائیں لچھے کے چکر الٹائے گئے ہیں۔یوں قالب میں بائیں لچھے کا بہاو گھڑی کی سمت میں گھومتا ہے جبکہ دائیں لچھے کا بہاو گھڑی کی الٹ سمت میں گھومتا ہے لہٰذا گھڑی کی سمت میں کل بہاو ϕ حاصل کرنے کی خاطر بائیں لچھے کے بہاو سے دائیں لچھے کا بہاو منفی کرنا ہو گا۔ اس طرح لچھوں کی ارتباط بہاو

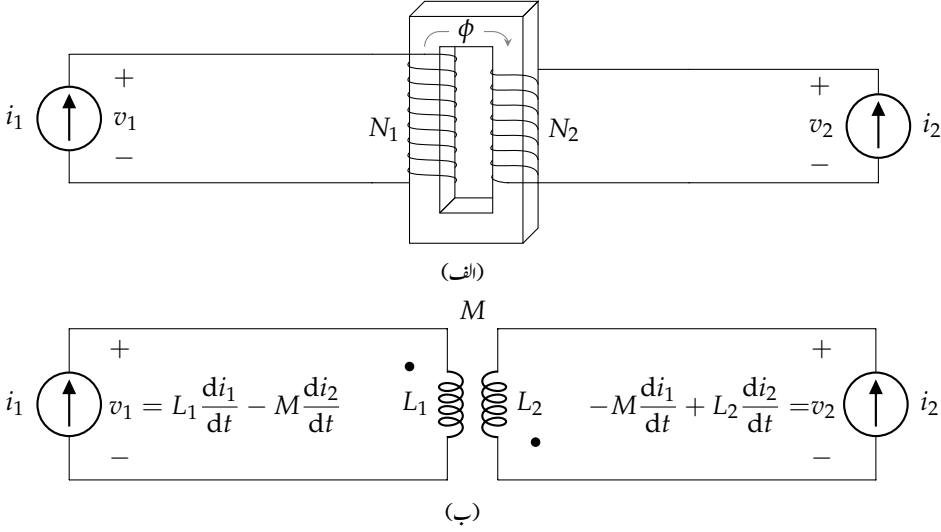
$$\lambda_1 = L_1 i_1 - M i_2 \tag{10.13}$$

$$\lambda_2 = -M i_1 + L_2 i_2 \tag{10.14}$$

لکھی جائے گی اور ان کے دباو درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{10.15}$$

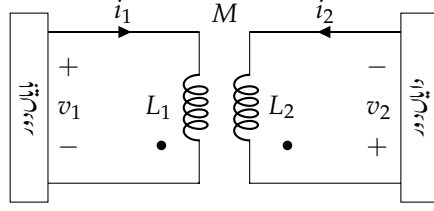
$$v_2 = -M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{10.16}$$

شکل 10.3-الف میں دونوں لچھوں کی انفرادی بہاو کا مجموعہ قالب میں کل بہاو دیتا ہے جبکہ شکل 10.4-الف میں بائیں لچھے کے بہاو سے دائیں لچھے کا بہاو تفریق کرنے سے قالب میں کل بہاو ϕ حاصل ہوتا ہے۔لچھوں میں رو

شکل 10.4: قالب میں لچھوں کے بہاو آپس میں الٹ سمت ہیں۔

کی سمت، قالب کے گرد چکر کی سمت اور قالب میں بہاو کی سمت کو نہایت عمدگی سے نقطوں کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ شکل 10.3-ب اور شکل 10.4-ب میں ان نقطوں کا استعمال دکھایا گیا ہے۔

انفرادی لچھے کی رو اور دباو کو غیر فعال رائج سمت کے تحت چنیں۔ دونوں لچھوں میں نقطوں والے سر سے رو داخل ہونے کی صورت میں دباو کا مشترک جزو مثبت لکھا جاتا ہے جبکہ ایک لچھے کی رو نقطے والے سر اور دوسرے لچھے کی رو بے نقطے والے سر سے داخل ہونے کی صورت میں مشترک دباو منفی لکھا جاتا ہے۔ دونوں رو بے نقطے سروں سے داخل ہونے کی صورت میں مشترک دباو مثبت لکھا جائے گا۔ دباو کا خود جزو تمام صورتوں میں غیر فعال رائج سمت کے تحت مثبت لکھا جاتا ہے۔ یوں شکل 10.3 میں مساوات 10.11 اور مساوات 10.12 دباو دیں گے جبکہ شکل 10.4 میں مساوات 10.15 اور مساوات 10.16 دباو دیں گے۔

مشترک امالہ کے کرخوف مساوات دباو نسبتاً زیادہ آسانی سے لکھے جاتے ہیں۔

مثال 10.1: شکل 10.5 میں دیے دور کے دونوں اطراف کے دباو کے مساوات لکھیں۔

شکل 10.5: مثال 10.1 کا دور۔

حل: بائیں جانب v_1 اور i_1 عین غیر فعال رائج سمت کے تحت لکھے گئے ہیں۔یوں دباو کا خود جزو مثبت لکھا جائے گا۔دونوں لچھوں میں رو بے نقطے سروں سے داخل ہوتی ہے لہٰذا دباو کا مشترک جزو مثبت لکھا جائے گا۔یوں بائیں جانب کرخوف کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

دائیں جانب v_2 اور i_2 غیر فعال رائج سمت کے تحت نہیں چنے گئے ہیں۔یوں دباو کے اجزاء لکھتے ہوئے اس کا خیال رکھا جائے گا۔دوسرے لچھے کی مساوات درج ذیل

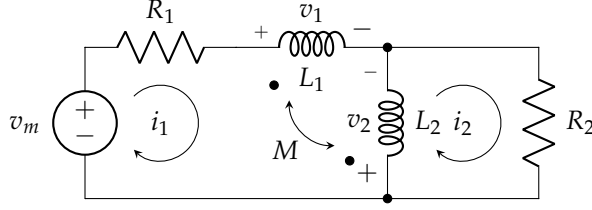
$$-v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

یعنی

$$v_2 = -M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

لکھی جائے گی۔

مثال 10.2: شکل 10.6 کے دور کے کرخوف مساوات دباو لکھیں۔

حل: مشترکہ امالہ کے انفرادی دباو کی نشاندہی v_1 اور v_2 سے کی گئی ہے جنہیں بالترتیب i_1 اور i_2 کو دیکھتے ہوئے غیر فعال رائج سمت کے تحت چنا گیا ہے۔امالہ L_1 کے دباو کے دو اجزاء ہیں۔اس کے خود جزو $L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$

شکل 10.6: مثال 10.2 کا دور۔

ہے۔امالہ L_2 میں رو امالہ L_1 کے دباو کا مشترک جزو دیتی ہے۔امالہ L_2 کے نقطے والے سر سے کل داخلی ہونے والی رو $i_2 - i_1$ لکھی جا سکتی ہے جو L_1 کے نقطے والے سر پر مثبت دباو پیدا کرتی ہے۔یوں L_1 کا مشترک جزو $\left(M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1)\right)$ ہے۔اس طرح پہلے امالہ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) \tag{10.17}$$

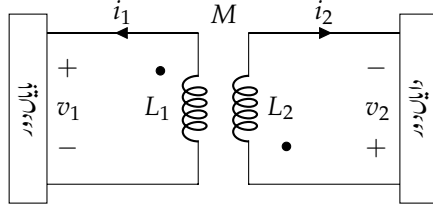
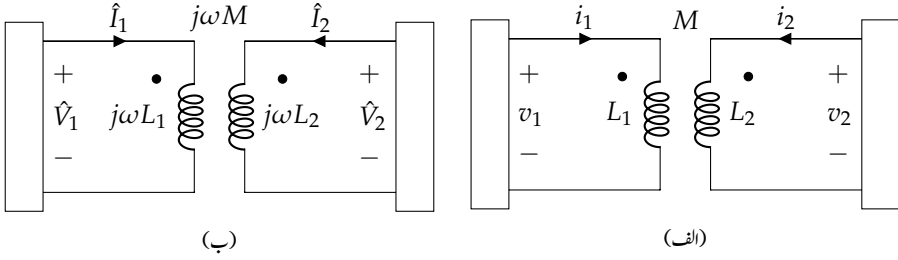
امالہ L_2 کا خود جزو $\left(L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1)\right)$ ہے۔امالہ L_1 کے نقطے والے سر سے i_1 داخل ہوتا ہے جو امالہ L_2 کے نقطے والے سر پر مثبت دباو پیدا کرے گا۔یوں L_2 کے دباو کا مشترک جزو $M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_2 = L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{10.18}$$

اب دور کو دیکھتے ہوئے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$v_m = i_1R_1 + v_1 - v_2 \tag{10.19}$$
$$0 = v_2 + i_2R_2 \tag{10.20}$$

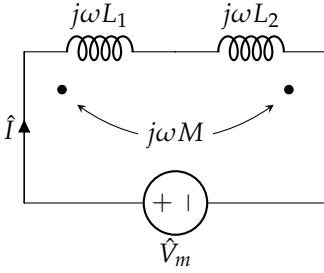
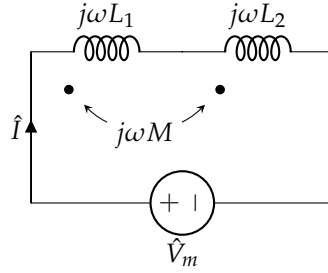
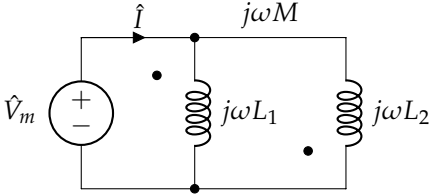
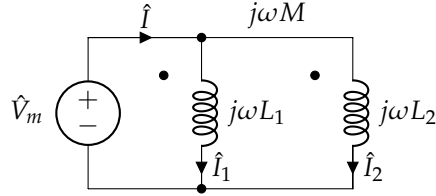
ان میں مساوات 10.17 اور مساوات 10.18 پر کرتے ہوئے جواب لکھتے ہیں۔

$$v_m = i_1R_1 + L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) - L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{10.21}$$
$$0 = L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + i_2R_2 \tag{10.22}$$

شکل 10.7: مشق 10.1 کا دور۔

شکل 10.8: وقتی دائرہ کار سے تعددی دائرہ کار کا حصول۔

مشق 10.1: شکل 10.7 میں دیے دور کے دونوں اطراف کے دباو لکھیں۔

جوابات: $v_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ ، $v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$

شکل 10.8-الف میں وقتی دائرہ کار کا دور جبکہ شکل-ب میں اسی کو تعددی دائرہ کار کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب کے کرخوف مساوات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\hat{V}_1 &= j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M \hat{I}_2 \\
\hat{V}_2 &= j\omega M \hat{I}_1 + j\omega L_2 \hat{I}_2
\end{aligned}$$

شکل 10.9: دو مربوط لچھوں کے چار ممکنہ ادوار اور ان کا مساوی امالہ۔

مثال 10.3: دو عدد مربوط لچھے چار مختلف طریقوں سے آپس میں جوڑے جا سکتے ہیں جنہیں شکل 10.9 میں دکھایا گیا ہے۔ چاروں صورتوں میں ان کا مساوی امالہ حاصل کریں۔ شکل میں ان مساوی امالہ $L_{\text{مساوی}}$ کو بھی لکھا گیا ہے۔

حل: شکل 10.9-الف کو دیکھتے ہوئے کرخوف مساوات دباو لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}
\hat{V}_m &= j\omega L_1\hat{I} + j\omega M\hat{I} + j\omega L_2\hat{I} + j\omega M\hat{I}\\
&= j\omega\hat{I}(L_1 + L_2 + 2M)\\
&= j\omega\hat{I}L_{\text{مساوی}}
\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر قوسین میں بند جزو کو مساوی امالہ $L_{\text{مساوی}}$ کہا گیا ہے۔

$$L_{\text{مساوی}} = L_1 + L_2 + 2M \tag{10.23}$$

شکل 10.9-ب کو دیکھتے ہوئے کرخوف مساوات دباو لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{V}_m &= j\omega L_1 \hat{I} - j\omega M \hat{I} + j\omega L_2 \hat{I} - j\omega M \hat{I}\\ &= j\omega \hat{I}(L_1 + L_2 - 2M)\\ &= j\omega \hat{I} L_{\text{مساوی}}\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر قوسین میں بند جزو کو مساوی امالہ $L_{\text{مساوی}}$ کہا گیا ہے۔

$$L_{\text{مساوی}} = L_1 + L_2 - 2M \tag{10.24}$$

شکل 10.9-پ کو دیکھتے ہوئے دونوں لچھوں کے مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_m &= j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M \hat{I}_2\\ \hat{V}_m &= j\omega L_2 \hat{I}_2 + j\omega M \hat{I}_1\end{aligned}$$

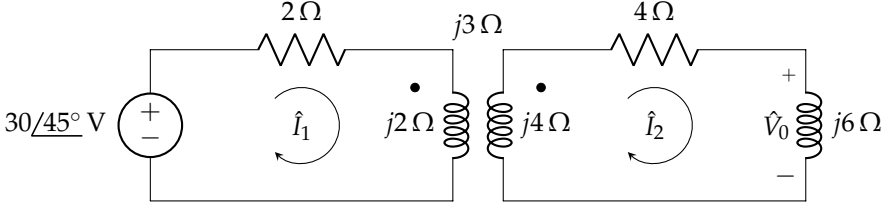
ان دو عدد ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \frac{\hat{V}_m (L_2 - M)}{j\omega (L_1 L_2 - M^2)}\\ \hat{I}_2 &= \frac{\hat{V}_m (L_1 - M)}{j\omega (L_1 L_2 - M^2)}\end{aligned}$$

کرخوف مساوات رو سے $\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$ لکھا جا سکتا ہے جس میں درج بالا حاصل شدہ نتائج پر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \hat{I}_1 + \hat{I}_2\\ &= \frac{\hat{V}_m (L_1 + L_2 - M)}{j\omega (L_1 L_2 - M^2)}\\ &= \frac{\hat{V}_m}{j\omega L_{\text{مساوی}}}\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر مساوی امالہ کی نشاندہی کی گئی ہے یعنی

$$L_{\text{مساوی}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \tag{10.25}$$

شکل 10.10: مثال 10.4 کا دور۔

مشق 10.2: شکل 10.9-ت میں دیے دور کا مساوی امالہ دریافت کریں۔

جواب:

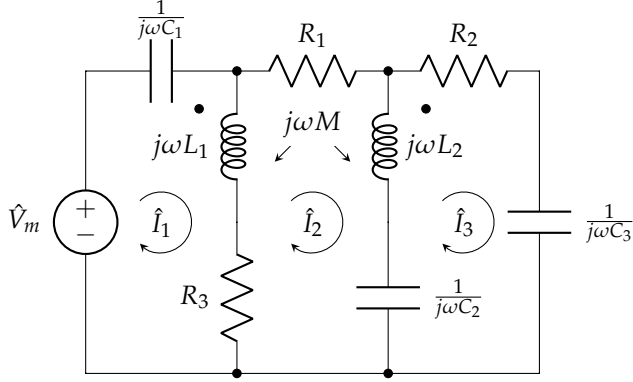
$$L_{\text{مساوی}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \tag{10.26}$$

مثال 10.4: شکل 10.10 میں $\hat{V}_0$ دریافت کریں۔

حل: کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 30\underline{/45^\circ} &= (2 + j2)\hat{I}_1 - j3\hat{I}_2 \\ 0 &= -j3\hat{I}_1 + (j4 + 4 + j6)\hat{I}_2 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

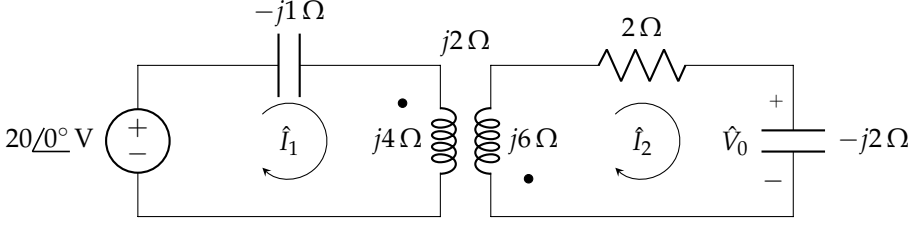
$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= 11.474\underline{/17.08^\circ}\,\text{A} \\ \hat{I}_2 &= 3.196\underline{/38.88^\circ}\,\text{A} \end{aligned}$$

شکل 10.11: مثال 10.5 کا دور۔

رو $\hat{I}_2$ کو استعمال کرتے ہوئے خارجی دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{V}_0 = (j6)(\hat{I}_2) = (6\underline{/90^\circ})(3.196\underline{/38.88^\circ}) = 19.176\underline{/128.88^\circ}\,\text{V}$$

مثال 10.5: شکل 10.11 کر دائری کرخوف مساوات لکھیں۔بعض اوقات دور میں دو عدد سے زیادہ مربوط امالہ موجود ہوتے ہیں۔ایسی صورت میں تیر کے لکیروں سے دو دو امالہ کی نشاندہی کی جاتی ہے۔اس شکل میں L_1 اور L_2 کے تعلق $j\omega M$ کی نشاندہی کی گئی ہے۔

حل: کرخوف مساوات لکھتے ہوئے محتاط اور چوکس رہیں۔ تین خانوں کے مساوات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\hat{V}_m &= \frac{\hat{I}_1}{j\omega C_1} + j\omega L_1(\hat{I}_1 - \hat{I}_2) + R_3(\hat{I}_1 - \hat{I}_2) + j\omega M(\hat{I}_2 - \hat{I}_3)\\
0 &= R_3(\hat{I}_2 - \hat{I}_1) + j\omega L_1(\hat{I}_2 - \hat{I}_1) + R_1 I_2 + j\omega L_2(\hat{I}_2 - \hat{I}_3)\\
&\qquad + \frac{1}{j\omega C_2}(\hat{I}_2 - \hat{I}_3) - j\omega M(\hat{I}_2 - \hat{I}_3) + j\omega M(\hat{I}_1 - \hat{I}_2)\\
0 &= \frac{\hat{I}_3}{j\omega C_3} + j\omega L_2(\hat{I}_3 - \hat{I}_2) + R_2\hat{I}_3 + \frac{\hat{I}_3}{j\omega C_3} - j\omega M(\hat{I}_1 - \hat{I}_2)
\end{aligned}$$

شکل 10.12: مشق 10.3 کا دور۔

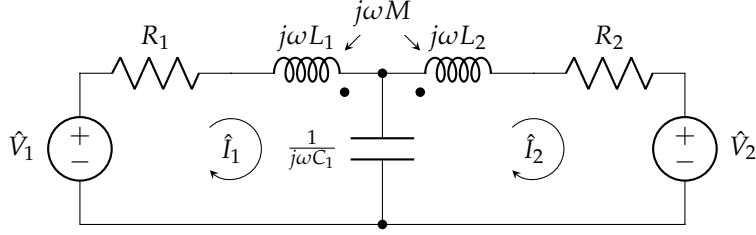
انہیں ترتیب دیتے ہوئے دوبارہ لکھتے ہیں۔ ترتیب دینے سے تشاکل مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\left(\frac{1}{j\omega C_1}+j\omega L_1+R_3\right)\hat{I}_1-\left(j\omega L_2+R_3-j\omega M\right)\hat{I}_2-j\omega M\hat{I}_3=\hat{V}_m$$

$$-\left(j\omega L_1+R_3-j\omega M\right)\hat{I}_1+\left(R_3+j\omega L_1+R_1+j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}-2j\omega M\right)\hat{I}_2$$
$$-\left(\frac{1}{j\omega C_2+j\omega L_2+R_2+\frac{1}{j\omega C_3}}-j\omega M\right)\hat{I}_3=0$$

$$-j\omega M\hat{I}_1-\left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}-j\omega M\right)\hat{I}_2+\left(\frac{1}{j\omega C_2}+j\omega L_2+R_2+\frac{1}{j\omega C_3}\right)\hat{I}_3=0$$

مشق 10.3: شکل 10.12 میں $\hat{I}_1$ ، $\hat{I}_2$ اور $\hat{V}_0$ دریافت کریں۔

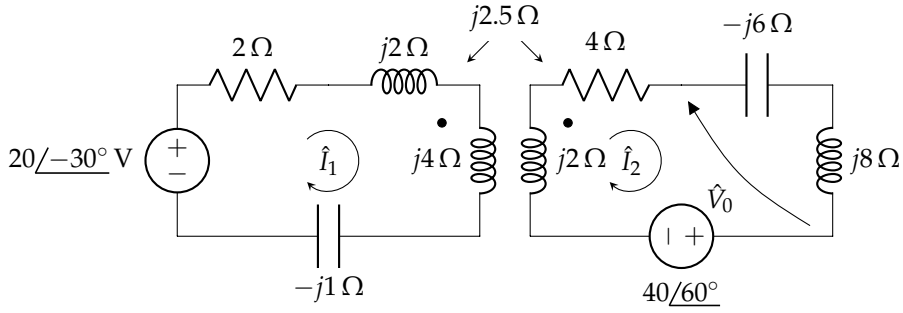
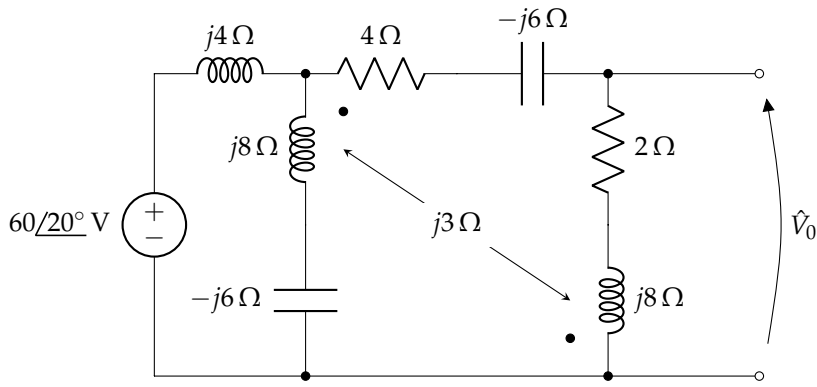
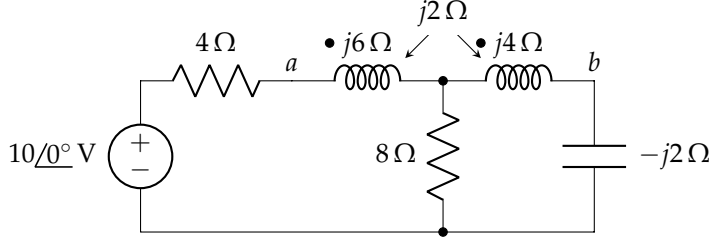
جوابات: $\hat{I}_1=8.9\underline{/-79.7^\circ}\,\text{A}$ ، $\hat{I}_2=4\underline{/126.9^\circ}\,\text{A}$ ، $\hat{V}_0=8\underline{/36.9^\circ}\,\text{V}$

شکل 10.13: مشق 10.4 کا دور۔

مشق 10.4: شکل 10.13 کے کرخوف مساوات لکھیں۔

جوابات:

$$\left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\hat{I}_1 - \left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega M\right)\hat{I}_2 = \hat{V}_1$$
$$-\left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega M\right)\hat{I}_1 + \left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_2 + R_2\right)\hat{I}_2 = -\hat{V}_2$$

مشق 10.5: شکل 10.14 میں $\hat{I}_1$ اور $\hat{I}_2$ معلوم کرتے ہوئے $\hat{V}_0$ دریافت کریں جہاں تیر والے لکیر سے ان نقطوں کی نشاندہی کی گئی ہے جن کے مابین دباو درکار ہے۔ تیر والا سر مثبت دباو کے مقام کی نشاندہی کرتا ہے۔ یوں $j8\,\Omega$ امالہ کا نچلی سرا حوالہ لیتے ہوئے $-j6\,\Omega$ برق گیر کے بائیں سر پر دباو حاصل کرنا درکار ہے۔

جوابات: $6.89\underline{/252.3^\circ}$ A ، $7.08\underline{/219.9^\circ}$ A ، $14.15\underline{/-50.1^\circ}$ V

شکل 10.14: مشق 10.5 کا دور۔

شکل 10.15: مشق 10.6 کا دور۔

شکل 10.16: مشق 10.7 کا دور۔

مشق 10.6: شکل 10.15 میں بائیں اور دائیں دائروں کی رو حاصل کرتے ہوئے $\hat{V}_0$ دریافت کریں۔ دباو حاصل کرتے ہوئے دباو کا مشترک جزو شامل کرنا مت بھولیں۔

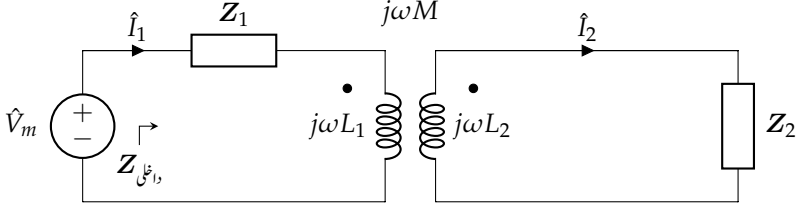
جوابات: $13.9\underline{/-55.2^\circ}\,\text{A}$ ، $5.97\underline{/-24.2^\circ}\,\text{A}$ ، $31.4\underline{/83.55^\circ}\,\text{V}$

مشق 10.7: شکل 10.16 میں $\hat{V}_{ab}$ دریافت کریں۔ دونوں امالہ کے دباو کے مشترک جزو شامل کرنا مت بھولیں۔

جواب: $10.5\underline{/15^\circ}\,\text{V}$

مثال 10.6: شکل 10.17 میں منبع دباو کو نظر آنے والا داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_{\text{داخلی}}$ دریافت کریں۔

حل: رو $\hat{I}_1$ دریافت کرتے ہوئے رکاوٹ کو $\frac{\hat{V}_m}{\hat{I}_1}$ سے حاصل کیا جائے گا۔ دونوں دائروں کے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_m &= (\boldsymbol{Z}_1 + j\omega L_1)\hat{I}_1 - j\omega M\hat{I}_2\\ 0 &= -j\omega M\hat{I}_1 + (j\omega L_2 + \boldsymbol{Z}_2)\hat{I}_2\end{aligned}$$

شکل 10.17: مثال 10.6 کا دور۔

دوسری مساوات سے $\hat{I}_2$ حاصل کرتے ہوئے

$$\hat{I}_2 = \frac{j\omega M}{j\omega L_2 + Z_2}\hat{I}_1$$

اس کو بائیں دائرے کی کرخوف مساوات میں پر کرتے ہیں

$$\hat{V}_m = (Z_1 + j\omega L_1)\hat{I}_1 - j\omega M \frac{j\omega M}{j\omega L_2 + Z_2}\hat{I}_1$$

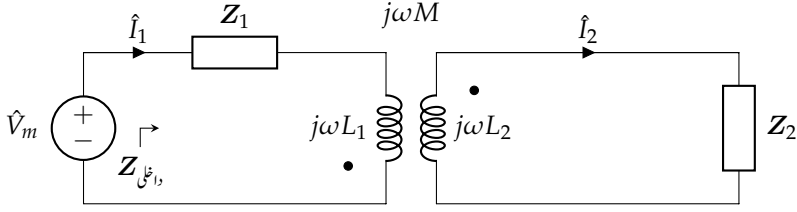
جہاں سے داخلی رکاوٹ درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$Z_{\text{داخلی}} = \frac{\hat{V}_m}{\hat{I}_1} = Z_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_2}$$

مشق 10.8: درج بالا مثال کے دور میں مشترکہ امالہ پر ایک نقطے کا مقام تبدیل کرتے ہوئے شکل 10.18 حاصل کیا گیا ہے۔اس میں منبع دباو کو نظر آنے والا داخلی رکاوٹ $Z_{\text{داخلی}}$ دریافت کریں۔

جواب:

$$Z_{\text{داخلی}} = \frac{\hat{V}_m}{\hat{I}_1} = Z_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_2}$$

آپ نے دیکھا کہ اس دور میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے داخلی رکاوٹ تبدیل نہیں ہوتا۔

شکل 10.18: مشق 10.8 کا دور۔

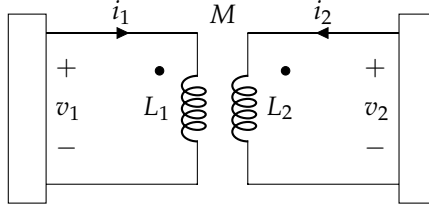
مشق 10.9: شکل 10.16 میں منبع دباو کو کیا رکاوٹ نظر آتا ہے۔

جواب: $5.88 + j11.53\,\Omega$

10.2 مشترکہ امالہ میں توانائی کا ذخیرہ

شکل 10.19 کو دیکھیے۔رو مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔رو کی غیر موجودگی میں اس دور میں مقناطیسی بہاو نہیں پایا جائے گا۔یوں اس میں ذخیرہ مقناطیسی توانائی بھی صفر کے برابر ہو گی۔اب تصور کریں کہ دایاں لچھا کھلے سر رکھتے ہوئے بائیں لچھے کی رو t_1 دورانیے میں I_1 کر دی جاتی ہے۔اس دورانیے کے دوران بائیں لچھے کو درج ذیل توانائی فراہم کی جائے گی۔

$$\int_0^{t_1} v_1(t)i_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_1}\left[L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}\right]i_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{I_1} L_1 i_1\,\mathrm{d}i_1 = \frac{L_1 I_1^2}{2}$$

اس دوران دائیں لچھے کی رو صفر کے برابر ہے لہٰذا t_1 کے دوران دائیں لچھے کو کوئی توانائی فراہم نہیں کی جاتی۔اب فرض کریں کہ بائیں لچھے کی رو اسی قیمت پر رکھی جاتی ہے جبکہ دائیں لچھے کی رو t_1 تا t_2 بڑھا کر I_2 کر دی جاتی ہے۔چونکہ t_1 تا t_2 بائیں لچھے کی رو تبدیل نہیں ہو رہی ہے لہٰذا دائیں لچھے کے دباو میں مشترک جزو صفر

شکل 10.19: مشترکہ امالہ میں ذخیرہ توانائی۔

کے برابر ہو گا۔یوں دائیں لچھے کا دباو $v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ لکھا جائے گا۔اس طرح دائیں لچھے کو درج ذیل توانائی فراہم کی جاتی ہے۔

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2(t) i_2(t) \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left[L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \right] i_2(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{I_2} L_2 i_2 \,\mathrm{d}i_2 = \frac{L_2 I_2^2}{2}$$

اسی دورانیے (t_1 تا t_2) میں چونکہ دائیں لچھے کی رو تبدیل ہو رہی ہے (جبکہ $i_1 = I_1$ مستقل ہے) لہٰذا بائیں لچھے کے دباو میں مشترک جزو پایا جائے گا اور یوں اس کا دباو درج ذیل لکھا جائے گا

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

جہاں i_1 مستقل ہونے کی وجہ سے $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0$ ہے۔یوں t_1 تا t_2 کے دوران بائیں لچھے کو درج ذیل توانائی مہیا کی جاتی ہے۔

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1(t) i(t) \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left[M \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \right] I_1 \,\mathrm{d}t = \int_0^{I_2} M I_1 \,\mathrm{d}i_2 = M I_1 I_2$$

ان تینوں جوابات کا مجموعہ لمحہ t_2 تک مشترکہ امالہ کو فراہم کی گئی توانائی دیتا ہے۔

$$w = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2 \tag{10.27}$$

اگر ایک لچھے پر نقطے کا مقام تبدیل کرتے ہوئے جواب حاصل کیا جائے تب درج ذیل جواب حاصل ہوتا ہے۔

$$w = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} - M I_1 I_2 \tag{10.28}$$

آپ نے دیکھا کہ ذخیرہ توانائی کا دارومدار رو پر ہے نا کہ t_1 اور t_2 پر۔یوں کسی بھی لمحے لچھوں کی رو $i_1(t)$ اور $i_2(t)$ لکھتے ہوئے اس لمحے ذخیرہ توانائی کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$w(t)=\frac{L_1 i_1^2(t)}{2}+\frac{L_2 i_2^2(t)}{2}\mp M i_1(t) i_2(t) \tag{10.29}$$

چونکہ مشترکہ امالہ غیر عامل پرزہ ہے لہٰذا یہ توانائی پیدا نہیں کرتا۔یوں اس کی توانائی کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتی۔یوں درج بالا مساوات میں غیر ضروری معلومات نہ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

$$w(t)=\frac{L_1 i_1^2}{2}+\frac{L_2 i_2^2}{2}\mp M i_1 i_2 \tag{10.30}$$

جس میں $\frac{M^2 i_1^2}{2L_2}$ جمع اور منفی کر کے ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$w=\frac{1}{2}\left(L_1-\frac{M^2}{L_2}\right)i_1^2+\frac{L_2}{2}\left(i_2+\frac{M}{L_2 i_1}\right)^2 \tag{10.31}$$

درج بالا مساوات کا دوسرا جزو مربع ہے لہٰذا یہ ہر صورت مثبت ہو گا۔چونکہ غیر عامل مشترکہ امالہ کی توانائی مثبت ہے لہٰذا اس مساوات کا پہلا جزو بھی مثبت ہو گا جس سے درج ذیل شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$M\leq\sqrt{L_1 L_2} \tag{10.32}$$

یہ مساوات مشترکہ امالہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کا حد بیان کرتا ہے۔یوں مشترکہ امالہ صفر تا $\sqrt{L_1 L_2}$ ممکن ہے۔

$$0\leq M\leq\sqrt{L_1 L_2} \tag{10.33}$$

کسی بھی مشترکہ امالہ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$M=k\sqrt{L_1 L_2} \tag{10.34}$$

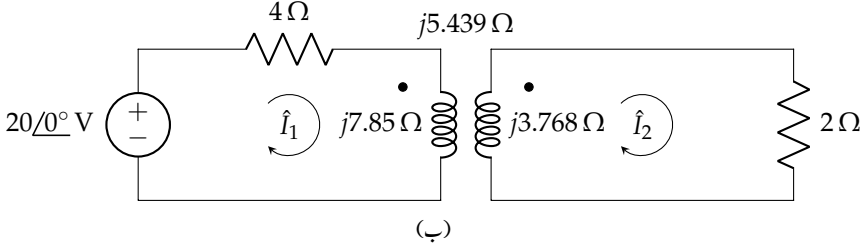
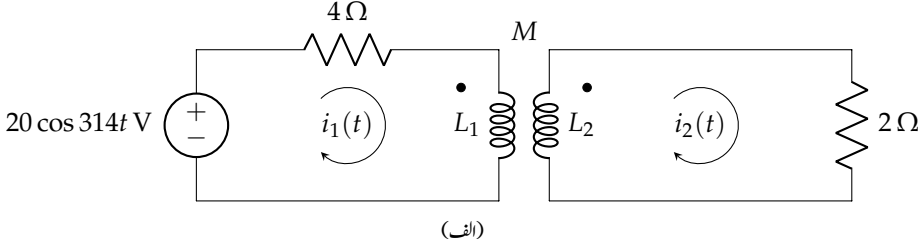
جہاں k کو **ارتباطی مستقل**[9] کہتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ارتباطی مستقل صفر تا اکائی ممکن ہے۔

$$0\leq k\leq 1 \tag{10.35}$$

ارتباطی مستقل کی تعریف درج ذیل مساوات دیتی ہے۔

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{10.36}$$

---

[9] coupling coefficient

شکل 10.20: مثال 10.7 کا دور۔

ارتباطی مستقل یہ بتلاتا ہے کہ ایک لچھے کی کتنی بہاو دوسرے لچھے کے اندر سے گزرتی ہے۔اس باب کے شروع میں مشترکہ امالہ کے اشکال بناتے ہوئے ہم نے مقناطیسی قالب استعمال کیا۔مقناطیسی قالب کے استعمال سے ایک لچھے کی تقریباً تمام بہاو دوسرے لچھے سے بھی گزاری جا سکتی ہے۔ایسی صورت میں $k \approx 1$ ہو گا۔اس کے برعکس ایک دونوں سے دور، قالب سے نہ جوڑے گئے لچھوں کی صورت میں $k = 0$ ہو گا چونکہ ایک لچھے کا بہاو دوسرے لچھے تک نہیں پہنچ پائے گا۔ارتباطی مستقل کی قیمت زیادہ $(k \geq 0.5)$ ہونے کی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ لچھوں کا رابطہ مضبوط[10] ہے جبکہ $k < 0.5$ کی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ لچھوں کا رابطہ کمزور[11] ہے۔

مثال 10.7: شکل 10.20-الف میں $L_1 = 25\,\text{mH}$ ، $L_2 = 12\,\text{mH}$ اور $k = 1$ ہیں۔لمحہ $t = 6.2\,\text{ms}$ پر مشترکہ امالہ میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

حل: منبع دباو سے تعدد $\omega = 314\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ اور مساوات 10.34 سے مشترکہ امالہ

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 1\sqrt{(0.025)(0.012)} = 17.321\,\text{mH}$$

---

[10] strongly coupled
[11] weakly coupled

لیتے ہوئے شکل-ب میں تعددی دائرہ کار میں دور کو دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں درج ذیل قیمتیں استعمال کی گئی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
j\omega L_1 &= j(314)(0.025) = j7.85\,\Omega \\
j\omega L_2 &= j(314)(0.012) = j3.768\,\Omega \\
j\omega M &= j(314)(0.017321) = j5.439\,\Omega
\end{aligned}
$$

دونوں دائروں کے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
20\underline{/0^\circ} &= (4+j7.85)\hat{I}_1 - j5.439\hat{I}_2 \\
0 &= -j5.439\hat{I}_1 + (2+j3.768)\hat{I}_2
\end{aligned}
$$

ان میں سے دوسری مساوات سے $\hat{I}_2$ لیتے ہوئے پہلی میں پر کرتے

$$
20\underline{/0^\circ} = (4+j7.85)\hat{I}_1 - j5.439\left(\frac{j5.439}{2+j3.768}\right)\hat{I}_1
$$

ہوئے $\hat{I}_1$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\hat{I}_1 = \frac{20}{7.251+j1.725} = 2.610 - j0.621 = 2.683\underline{/-13.38^\circ}\,\text{A}
$$

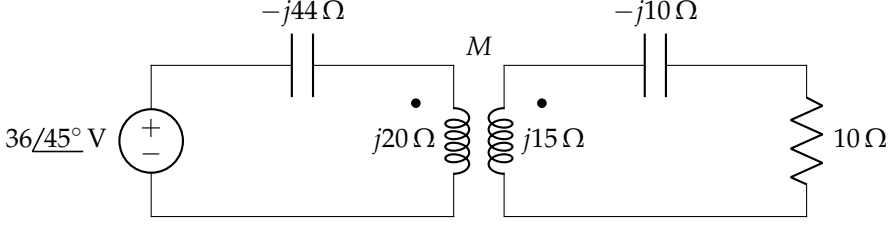
اسی طرح $\hat{I}_2$ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\hat{I}_2 = \left(\frac{j5.439}{2+j3.768}\right)\hat{I}_1 = 3.421\underline{/14.57^\circ}\,\text{A}
$$

حاصل شدہ رو کو وقتی دائرہ کار میں لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_1(t) &= 2.683\cos(314t - 13.38^\circ)\,\text{A} \\
i_2(t) &= 3.421\cos(314t + 14.57^\circ)\,\text{A}
\end{aligned}
$$

لمحہ $t = 6.2\,\text{ms}$ پر رو کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے زاویہ ہٹاو کو ریڈیئن میں لکھا جائے گا۔

$$
\begin{aligned}
i_1(t = 6.2\,\text{ms}) = I_1 &= 2.683\cos\left[(314)(0.0062) - 13.38\left(\frac{\pi}{180}\right)\right] = 2.487\,\text{A} \\
i_2(t = 6.2\,\text{ms}) = I_2 &= 3.421\cos\left[(314)(0.062) + 14.57\left(\frac{\pi}{180}\right)\right] = 2.199\,\text{A}
\end{aligned}
$$

شکل 10.21: مشق 10.10 کا دور۔

لمحہ $6.2\,\text{ms}$ پر رو کی قیمتیں جاننے کے بعد مساوات 10.28 سے ذخیرہ توانائی حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} w(t = 6.2\,\text{ms}) &= \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2 \\ &= \frac{(0.025)(2.487)^2}{2} + \frac{(0.012)(2.199)^2}{2} + 0.0173(2.487)(2.199) \\ &= 0.201\,\text{J} \end{aligned}$$

مشق 10.10: شکل 10.21 میں تعدد $50\,\text{Hz}$ اور $k = 0.6$ ہیں۔ لمحہ $t = 5.5\,\text{ms}$ پر مشترکہ امالہ میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

جواب: $24.4\,\text{mJ}$

10.3 کامل ٹرانسفارمر

شکل 10.22-الف کو دیکھیے جہاں دو لچھوں کو مقناطیسی قالب پر لپیٹا گیا ہے۔یہ روزمرہ میں استعمال ہونے والا ٹرانسفارمر ہے۔شکل میں دباو اور رو کی سمتیں یوں چنی گئی ہیں کہ بائیں لچھے کو بائیں دور سے طاقت مہیا کی جا رہی ہے جبکہ دایاں لچھا دائیں ہاتھ کے دور کو طاقت فراہم کرتا ہے۔ بایاں لچھا N_1 چکر پر مشتمل ہے اور اور یہ قالب میں گھڑی کے سوئیوں کے گھومنے کی سمت میں مقناطیسی بہاو ϕ_1 پیدا کرتا ہے۔دایاں لچھا N_2 چکر پر مشتمل ہے اور اور یہ قالب میں گھڑی کے سوئیوں کے گھومنے کی سمت کے الٹ سمت میں مقناطیسی بہاو ϕ_2 پیدا کرتا ہے۔یوں قالب میں گھڑی کے سوئیوں کے گھومنے کی سمت میں کل مقناطیسی بہاو $\phi = \phi_1 - \phi_2$ پایا جائے گا۔لچھوں کو یہی بہاو ϕ نظر آتی ہے جو لچھوں میں درج ذیل دباو پیدا کرتی ہے۔

$$v_1(t) = N_1 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{10.37}$$

$$v_2(t) = N_2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{10.38}$$

مساوات 10.37 کو مساوات 10.38 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}{N_2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}$$

یعنی درج ذیل تبادلہ دباو[12] کی مساوات ملتی ہے۔

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \text{تبادلہ دباو} \tag{10.39}$$

قانون ایمپیئر کے تحت قالب کے گرد درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\oint H \cdot \mathrm{d}l = i_{\text{گھیرا}} = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

جہاں تکمل کو قالب کے اندر گھومتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے جبکہ H قالب کے اندر **مقناطیسی شدت**[13] ہے۔مقناطیسی قالب میں H کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔یوں H کا تکمل بھی قابل نظر انداز ہوتا ہے۔درج بالا مساوات میں تکمل کو صفر کے برابر پر کرنے سے

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 = 0 \tag{10.40}$$

---
[12] voltage transformation
[13] magnetic field intensity

یعنی درج ذیل تبادلہ رو[14] کی مساوات ملتی ہے۔

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \qquad \text{تبادلہ رو} \tag{10.41}$$

تبادلہ رو کی مساوات سے ظاہر ہے کہ کم چکر والے لچھے میں زیادہ چکر والے لچھے کی نسبت زیادہ رو پائی جاتی ہے۔یوں کم چکر والے لچھے کے لئے زیادہ موٹی تار استعمال کی جائے گی۔

مساوات 10.40 کو $\frac{v_1}{N_1}$ سے ضرب دینے سے

$$v_1 i_1 - \frac{N_2}{N_1} v_1 i_2 = 0 \tag{10.42}$$

ملتا ہے جس میں مساوات 10.39 سے $\frac{N_2}{N_1} v_1 = v_2$ پر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \tag{10.43}$$

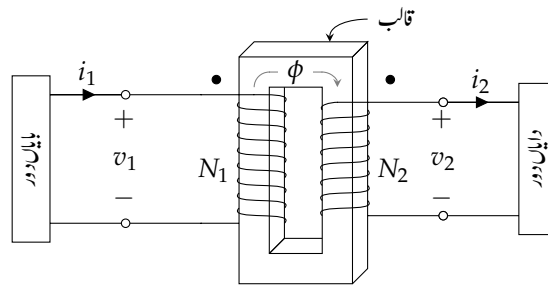
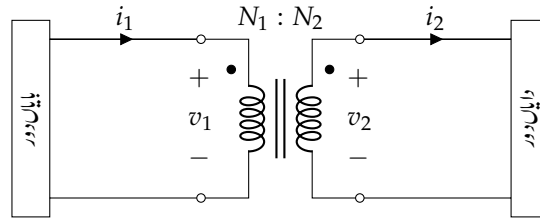
یہ مساوات کہتا ہے کہ کامل ٹرانسفارمر وہی طاقت دائیں ہاتھ کے دور کو فراہم کرتا ہے جو اسے بائیں ہاتھ کے دور سے ملتا ہے۔اس حقیقت کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ کامل ٹرانسفارمر میں طاقت کا ضیاع صفر ہے۔ حقیقی ٹرانسفارمر میں طاقت کا ضیاع انتہائی کم ہوتا ہے جسے اس کتاب میں نظر انداز کیا جائے گا۔

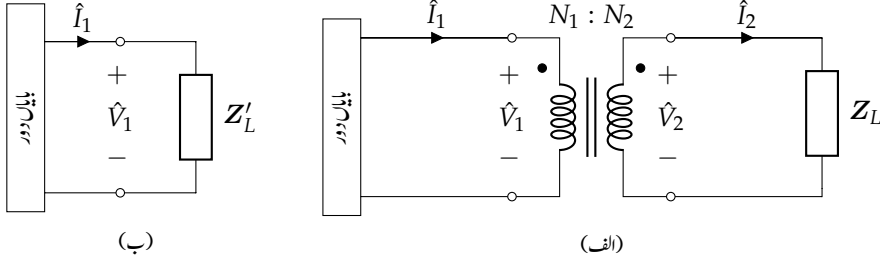
شکل 10.22-ب میں کامل ٹرانسفارمر کی علامت دکھائی گئی ہے جہاں لچھوں کے درمیان افقی لکیریں مقناطیسی قالب کو ظاہر کرتی ہیں۔ بالائی جانب لچھوں کے چکروں کی نسبت $(N_1 : N_2)$ لکھی گئی ہے۔ہم جلد دیکھیں گے کہ ٹرانسفارمر استعمال کرنے والے ادوار میں ٹرانسفارمر کے لچھوں کی امالہ L_1 اور L_2 جاننا ضروری نہیں ہوتا۔اسی طرح لچھوں کی مشترکہ امالہ M جاننا بھی درکار نہیں ہوتا۔یہی وجہ ہے کہ ان معلومات کا ذکر ٹرانسفارمر کی علامت پر نہیں کیا گیا ہے۔اس شکل میں ٹرانسفارمر کی علامت پر دونوں جانب کی رو اور دباو بھی دکھائے گئے ہیں۔

شکل 10.23-الف میں ٹرانسفارمر کے دائیں ہاتھ بوجھ $\boldsymbol{Z}_L$ لدا ہے۔دائیں جانب کے دباو اور رو کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{Z}_L = \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_2} \tag{10.44}$$

---

[14] current transformation

(الف) کامل ٹرانسفارمر کی بناوٹ۔

(ب) کامل ٹرانسفارمر کی علامت۔

شکل 10.22: کامل ٹرانسفارمر۔

شکل 10.23: تبادلہ بوجھ۔

یوں $\hat{V}_2 = 20\angle 30^\circ\,\text{V}$ اور $\hat{I}_2 = 2\angle 45^\circ\,\text{A}$ کی صورت میں ٹرانسفارمر کے دائیں لچھے کو $10\angle -15^\circ\,\Omega$ رکاوٹ نظر آئے گی۔اسی طرح بائیں جانب کے دور کو رکاوٹ Z'_L نظر آئے گی

$$Z'_L = \frac{\hat{V}_1}{\hat{I}_1} \tag{10.45}$$

جسے مساوات 10.39 اور مساوات 10.41 کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

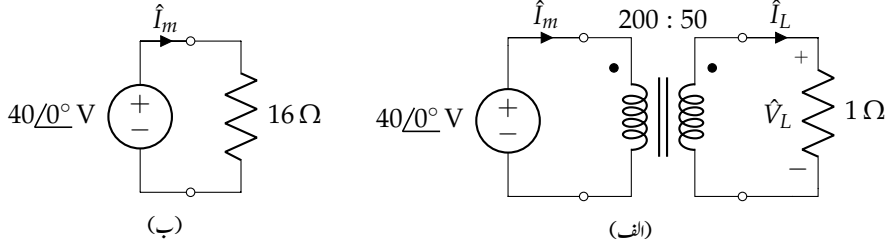
$$Z'_L = \frac{\frac{N_1}{N_2}\hat{V}_2}{\frac{N_2}{N_1}\hat{I}_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_2}$$

مساوات 10.44 کو استعمال کرتے ہوئے ٹرانسفارمر پر لدے رکاوٹ Z_L اور بائیں جانب دور کو نظر آنے والی رکاوٹ Z'_L کا تعلق ملتا ہے جسے تبادلہ رکاوٹ[15] کی مساوات کہتے ہیں۔

$$Z'_L = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_L \qquad \text{تبادلہ رکاوٹ} \tag{10.46}$$

یوں جیسا شکل 10.23-ب میں دکھایا گیا ہے، بائیں ہاتھ کے دور کو ٹرانسفارمر بمع بوجھ Z_L کی جگہ متبادل بوجھ Z'_L نظر آتا ہے۔

مثال 10.8: شکل 10.24 میں تمام دباو اور رو حاصل کریں۔ٹرانسفارمر کے دائیں لچھے کو کتنی مزاحمت نظر آتی ہے۔منبع کو کتنی مزاحمت نظر آتی ہے۔مساوات 10.39 کے تحت زیادہ چکر والی جانب پر زیادہ دباو پایا جاتا ہے۔زیادہ

[15] impedance transformation

شکل 10.24: مثال 10.8 کا دور۔

چکروں والی جانب کو ٹرانسفارمر کی **زیادہ دباو والی جانب**[16] کہا جاتا ہے جبکہ کم چکروں والی جانب کو ٹرانسفارمر کی **کم دباو والی جانب**[17] کہا جاتا ہے۔

حل: ٹرانسفارمر کے چکروں کی تناسب 200 : 50 سے ٹرانسفارمر کی کم دباو جانب دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{V}_L = (40\angle 0^\circ)\left(\frac{50}{200}\right) = 10\angle 0^\circ \, \text{V}$$

بوجھ کا دباو جانتے ہوئے اس کی رو حاصل کرتے ہیں

$$\hat{I}_L = \frac{\hat{V}_L}{\boldsymbol{Z}_L} = \frac{10\angle 0^\circ}{1} = 10\angle 0^\circ \, \text{A}$$

جس سے منبع کی رو، یعنی زیادہ دباو والی جانب کی رو، حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\hat{I}_m = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)\hat{I}_L = \left(\frac{50}{200}\right)(10\angle 0^\circ) = 2.5\angle 0^\circ \, \text{A}$$

جیسا شکل 10.24-ب میں دکھایا گیا ہے، منبع کو ٹرانسفارمر بمع بوجھ، متبادل مزاحمت $\boldsymbol{Z}'_L$ نظر آتا ہے

$$\boldsymbol{Z}'_L = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \boldsymbol{Z}_L = \left(\frac{200}{50}\right)^2 (1\,\Omega) = 16\,\Omega$$

جس سے منبع کی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\hat{I}_m = \frac{40\angle 0^\circ}{16} = 2.5\angle 0^\circ \, \text{A}$$

---

[16] high voltage side, high tension side, HT
[17] low voltage side,low tension side, LT

مثال 10.9: شکل 10.25-الف میں تمام اجزاء کو ٹرانسفارمر کے بائیں جانب منتقل کرتے ہوئے منبع کی رو حاصل کریں۔حاصل کردہ رو سے بوجھ کی رو حاصل کریں۔ٹرانسفارمر کے ایک لچھے پر منبع سے طاقت فراہم کی جاتی ہے جبکہ ٹرانسفارمر اسی طاقت کو دوسرے لچھے پر بیرونی جڑے دور کو فراہم کرتا ہے۔ٹرانسفارمر کو جس لچھے پر منبع سے طاقت فراہم کی جاتی ہے اس کو ٹرانسفارمر کا **داخلی لچھا** یا **ابتدائی لچھا**[18] کہا جاتا ہے اور ٹرانسفارمر کے اس ہاتھ کو **داخلی ہاتھ**[19] یا **ابتدائی جانب**[20] کہا جاتا ہے۔جو لچھا بقایا دور کو طاقت فراہم کرتا ہے اس کو **خارجی لچھا** یا **ثانوی لچھا**[21] کہا جاتا ہے جبکہ ٹرانسفارمر کے اس ہاتھ کو **خارجی ہاتھ**[22] یا **ثانوی جانب**[23] کہا جاتا ہے۔ یوں شکل 10.25 میں ٹرانسفارمر کے بائیں جانب کو داخلی جانب یا زیادہ دباو والا ہاتھ یا ابتدائی ہاتھ پکارا جا سکتا ہے جبکہ ٹرانسفارمر کے دائیں جانب کو خارجی جانب یا کم دباو والا جانب یا ثانوی جانب پکارا جا سکتا ہے۔یہاں یہ جاننا ضروری ہے کہ ٹرانسفارمر کے کسی بھی لچھے پر طاقت مہیا کرتے ہوئے دوسرے لچھے سے طاقت حاصل کی جا سکتی ہے لہٰذا ان اصطلاحات کو استعمال کرتے ہوئے ذرہ خیال رکھنا ضروری ہے۔ ادوار بناتے ہوئے داخلی لچھے کو عموماً بائیں جانب دکھایا جاتا ہے۔

حل: چکروں کی تناسب سے متبادل رکاوٹ حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Z}_L' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \boldsymbol{Z}_L = \left(\frac{400}{40}\right)^2 (0.04 + j0.05) = 4 + j5\,\Omega$$

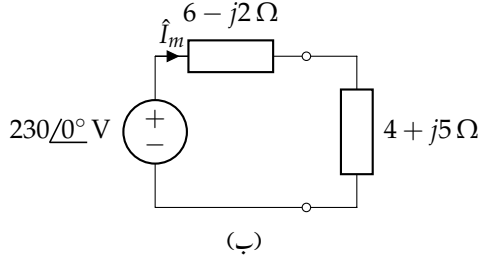
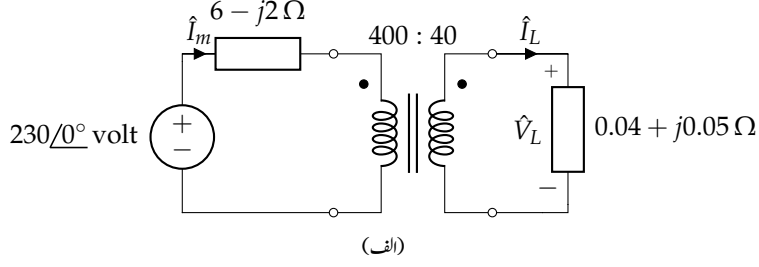
ٹرانسفارمر اور بوجھ کی جگہ متبادل رکاوٹ نسب کرتے ہوئے شکل 10.25-ب ملتا ہے جہاں سے منبع کی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\hat{I}_m = \frac{230\underline{/0^\circ}}{6 - j2 + 4 + j5} = 22\underline{/-16.7^\circ}\,\mathrm{A}$$

ٹرانسفارمر کی بوجھ جانب رو درج ذیل ہو گی۔

$$\hat{I}_L = \left(\frac{400}{40}\right) \hat{I}_m = \left(\frac{400}{40}\right) (22\underline{/-16.7^\circ}) = 220\underline{/-16.7^\circ}\,\mathrm{A}$$

---

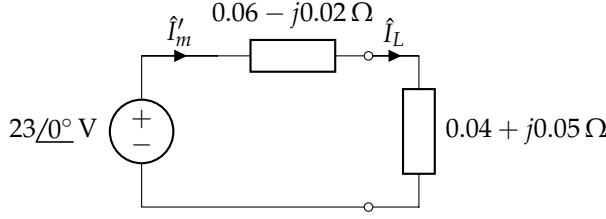
[18] primary coil
[19] input side
[20] primary side
[21] secondary coil
[22] output side
[23] secondary side

شکل 10.25: مثال 10.9 کا دور۔

مثال 10.10: شکل 10.25 میں تمام معلومات کو ثانوی جانب منتقل کرتے ہوئے بوجھ کی رو اور دباو دریافت کریں۔

حل: تبادلہ کئے گئی قیمتوں پر ($'$) کی علامت استعمال کی جاتی ہے۔ ابتدائی جانب لاگو دباو کو ثانوی جانب منتقل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\hat{V}'_m = \frac{N_2}{N_1}\hat{V}_m = \frac{40}{400}(230\underline{/0^\circ}) = 23\underline{/0^\circ}\,\text{V}$$

اسی طرح ابتدائی جانب رکاوٹ کو ثانوی جانب منتقل کرتے ہوئے درج ذیل رکاوٹ ملتی ہے۔

$$\boldsymbol{Z}' = \frac{40^2}{400^2}(6-j2) = 0.06 - j0.02\,\Omega$$

شکل 10.26: مثال 10.10 کا دور جس میں تمام معلومات ثانوی جانب منتقل کی گئی ہیں۔

ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے شکل 10.26 حاصل ہوتا ہے جس سے بوجھ کی رو لکھتے ہیں۔

$$\hat{I}_L = \frac{23\underline{/0^\circ}}{0.06 - j0.02 + 0.04 + j0.05} = 220\underline{/-16.7^\circ}\,\text{A}$$

بوجھ کا دباو تقسیم دباو سے حاصل کرتے ہیں۔

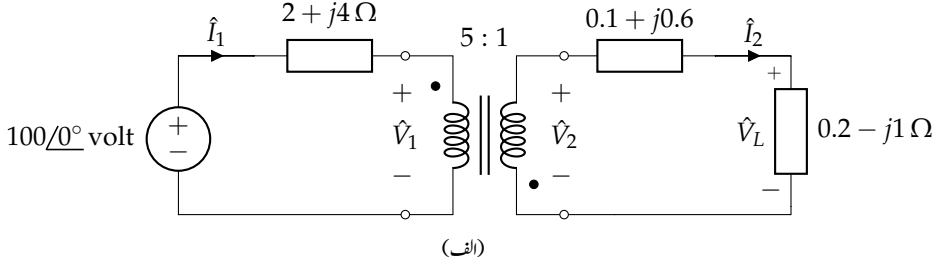
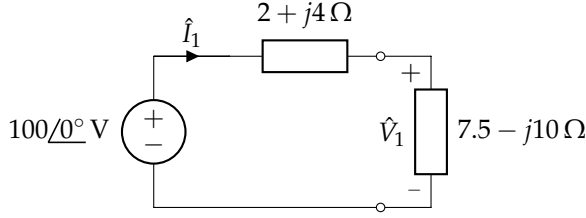
$$\hat{V}_L = 23\underline{/0^\circ}\left(\frac{0.04 + j0.05}{0.06 - j0.02 + 0.04 + j0.05}\right) = 14.1\underline{/34.64^\circ}\,\text{V}$$

اسی جواب کو قانون اوہم سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\hat{V}_L = \hat{I}_L \boldsymbol{Z}_L = (220\underline{/-16.7^\circ})(0.04 + j0.05) = 14.1\underline{/34.64^\circ}\,\text{V}$$

ابتدائی رو کو تبادلہ رو کی مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I}_m = \frac{N_2}{N_1}\hat{I}_L = \frac{40}{400}(220\underline{/-16.7^\circ}) = 22\underline{/-16.7^\circ}\,\text{A}$$

مثال 10.11: شکل 10.27-الف میں تمام نا معلوم مقدار حاصل کریں۔

شکل 10.27: مثال 10.11 کا دور۔

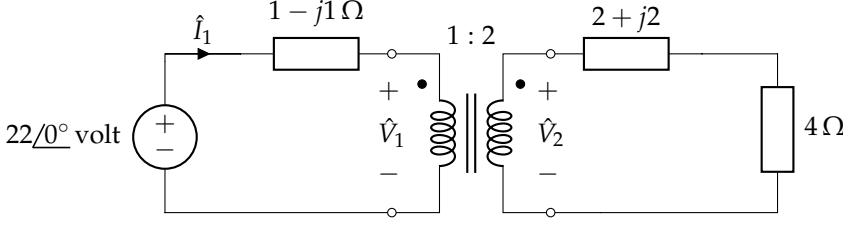
حل: شکل 10.27-الف میں نقطوں کا مقام شکل 10.22-ب سے مختلف ہے لہٰذا دھیان سے چلنا ہو گا۔ موجودہ شکل میں تبادلہ دباو اور تبادلہ رو کے مساوات درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\frac{\hat{V}_1}{\hat{V}_2} = -\frac{5}{1}$$
$$\frac{\hat{I}_1}{\hat{I}_2} = -\frac{1}{5}$$

جبکہ تبادلہ رکاوٹ کی مساوات تبدیل نہیں ہو گی۔ ثانوی جانب کل رکاوٹ کو ابتدائی جانب منتقل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Z}_2' = \left(\frac{5}{1}\right)^2 (0.1+0.6j+0.2-j1) = 7.5-j10\,\Omega$$

یوں شکل 10.27-ب حاصل ہوتا ہے جس سے $\hat{I}_1$ اور $\hat{V}_1$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I}_1 = \frac{100\angle 0^\circ}{2+j4+7.5-j10} = 8.9\angle 32.3^\circ\,\text{A}$$
$$\hat{V}_1 = \hat{I}_1\boldsymbol{Z}_2' = (8.9\angle 32.3^\circ)(7.5-j10) = 111\angle -20.9^\circ\,\text{V}$$

شکل 10.28: مشق 10.11 کا دور۔

یوں تبادلہ دباو اور تبادلہ رو کے مساوات سے ثانوی جانب کے مقدار حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I}_2 = -\hat{I}_1\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = (8.9\underline{/32.3^\circ})\left(\frac{5}{1}\right) = 44.5\underline{/212^\circ}\,\text{A}$$

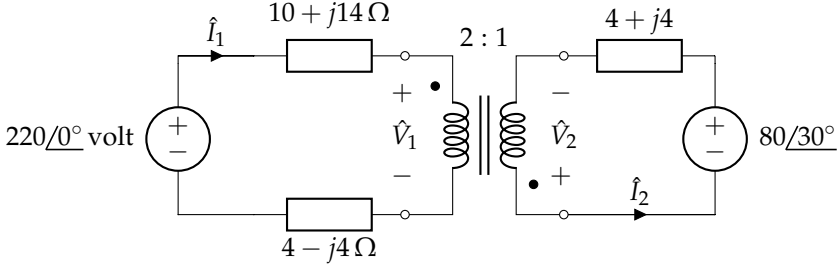
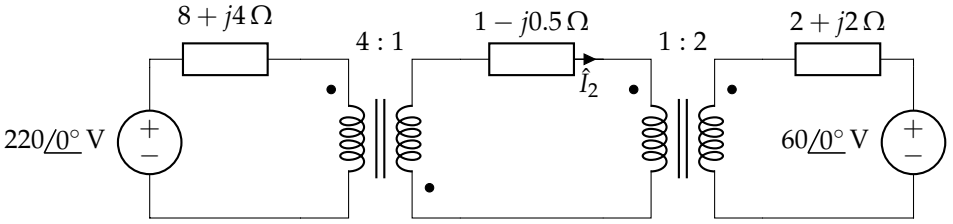
$$\hat{V}_2 = -\hat{V}_1\left(\frac{N_2}{N_1}\right) = -(111\underline{/-20.9^\circ})\left(\frac{1}{5}\right) = 22.2\underline{/159^\circ}\,\text{V}$$

دباو $\hat{V}_2$ جانتے ہوئے تقسیم دباو کے کلیے سے بوجھ کا دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{V}_L = (22.2\underline{/159^\circ})\left(\frac{0.2 - j1}{0.1 + j0.6 + 0.2 - j1}\right) = 45\underline{/134^\circ}\,\text{V}$$

مشق 10.11: شکل 10.28 میں $\hat{I}_1$ حاصل کریں۔

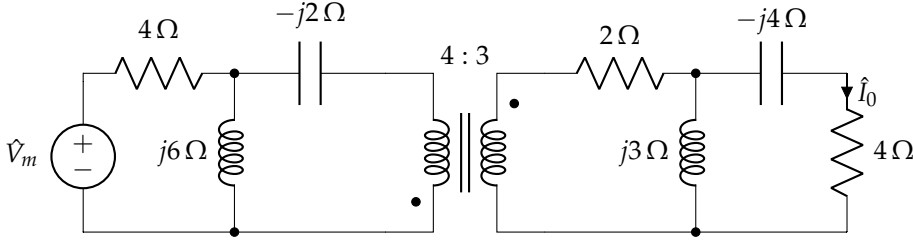
جواب: $8.63\underline{/11.3^\circ}$ V

مشق 10.12: شکل 10.29 میں $\hat{I}_1$ ، $\hat{I}_2$ اور $\hat{V}_1$ حاصل کریں۔

شکل 10.29: مشق 10.12 کا دور۔

شکل 10.30: مشق 10.13 کا دور۔

جواب: $9.25\angle -28.3^\circ$ A ، $18.5\angle -28.3^\circ$ A ، $65.2\angle -17.8^\circ$ V

مشق 10.13: شکل 10.30 میں $\hat{I}_0$ دریافت کریں۔

جواب: $42.2\angle 173^\circ$ A

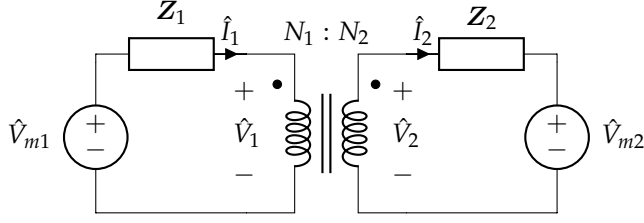
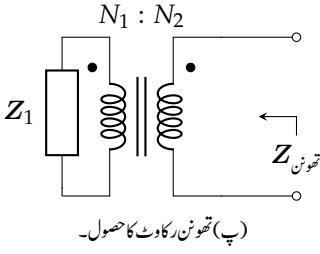
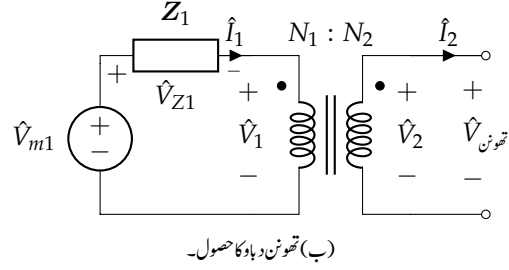
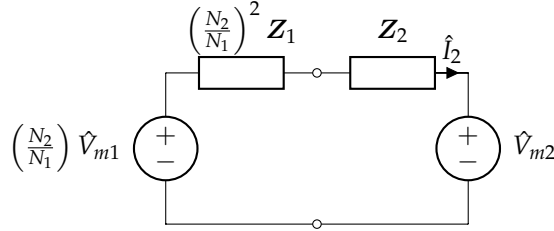
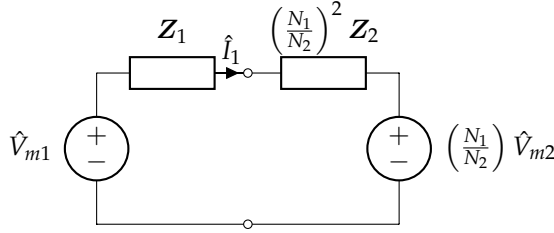
مشق 10.14: شکل 10.31 میں $\hat{I}_0 = 2\angle -60^\circ$ ampere ہے۔ منبع کا دباو $\hat{V}_m$ حاصل کریں۔

شکل 10.31: مشق 10.14 کا دور۔

جواب: $29.2\underline{/13.5^\circ}\ \mathrm{V}$

کامل ٹرانسفارمر استعمال کرنے والے ادوار کو مسئلہ تھونن یا مسئلہ نارٹن سے بھی حل کیا جا سکتا ہے۔اس ترکیب میں ٹرانسفارمر بمع ابتدائی جانب دور یا ثانوی جانب دور کا تھونن یا نارٹن مساوی دور حاصل کرتے ہوئے مکمل دور کو حل کیا جاتا ہے۔آئیں شکل 10.32-الف کو مسئلہ تھونن سے حل کرتے ہوئے اس ترکیب کو سیکھیں۔ٹرانسفارمر بمع بائیں ہاتھ کے دور کا مساوی تھونن حاصل کرتے ہیں۔

شکل 10.32-ب میں ٹرانسفارمر کا دایاں جانب کھلا سر کیا گیا ہے جہاں سے تھونن دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔چونکہ دایاں جانب کھلے سر ہے لہٰذا $\hat{I}_2 = 0\,\mathrm{A}$ ہو گا اور یوں $\hat{I}_1$ بھی صفر ایمپیئر ہو گا۔ رکاوٹ Z_1 میں رو نہ گزرنے کی بدولت قانون اوہم کے تحت $\hat{V}_{Z1}$ بھی صفر ہو گا۔یوں $\hat{V}_1 = \hat{V}_{m1}$ ہو گا۔دباو $\hat{V}_1$ جانتے ہوئے تبادلہ دباو کی مساوات سے $\hat{V}_2$ حاصل کیا جا سکتا ہے جو تھونن دباو کے برابر ہو گا۔

$$\hat{V}_2 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)\hat{V}_1 = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)\hat{V}_{m1} = \hat{V}_{\text{تھونن}} \tag{10.47}$$

شکل 10.32-پ میں منبع کو قصر دور کرتے ہوئے تھونن رکاوٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔تبادلہ رکاوٹ کی مساوات سے تھونن رکاوٹ درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$\boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \boldsymbol{Z}_1 \tag{10.48}$$

شکل 10.32: ٹرانسفارمر استعمال کرنے والا دور جسے مسئلہ تھونن سے حل کیا گیا ہے۔

تھونن دباو اور تھونن رکاوٹ استعمال کرتے ہوئے شکل-الف کو شکل-ت کے طرز پر بنایا جا سکتا ہے۔شکل 10.32-ت میں تمام اجزاء کو ٹرانسفارمر کے دائیں جانب منتقل کیا گیا ہے۔اس شکل سے $\hat{I}_2$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I}_2=\frac{\frac{N_2}{N_1}\hat{V}_{m1}-\hat{V}_{m2}}{\frac{N_2^2}{N_1^2}\boldsymbol{Z}_1+\boldsymbol{Z}_2} \tag{10.49}$$

ہم تمام اجزاء کو بالکل اسی طرح بائیں ہاتھ بھی منتقل کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے شکل 10.32-ٹ حاصل ہوتا ہے جہاں سے $\hat{I}_1$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\hat{I}_1=\frac{\hat{V}_{m1}-\frac{N_1}{N_2}\hat{V}_{m2}}{\boldsymbol{Z}_1+\frac{N_1^2}{N_2^2}\boldsymbol{Z}_2} \tag{10.50}$$

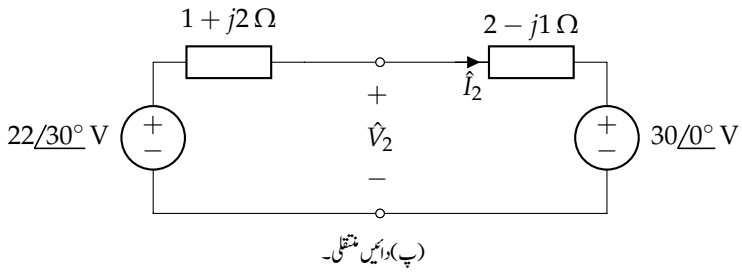
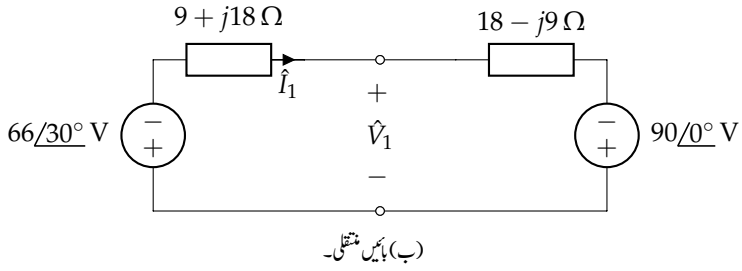
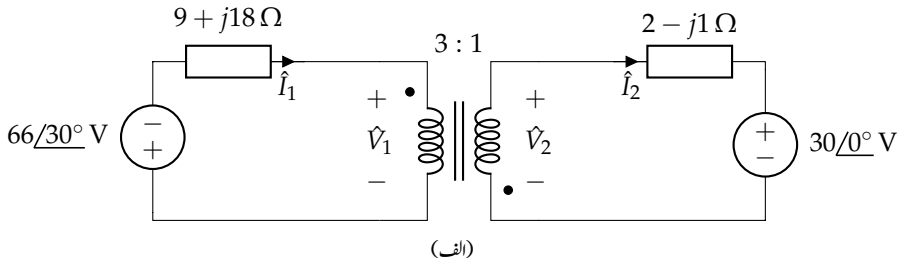
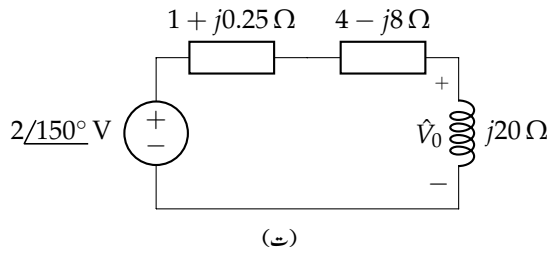
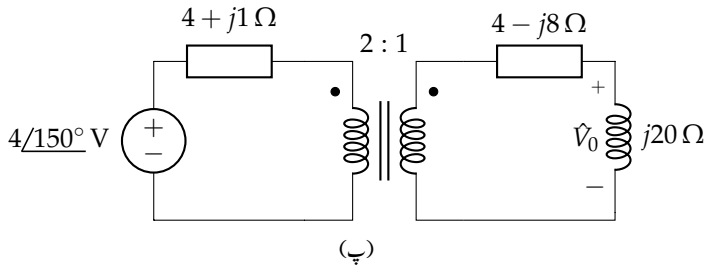
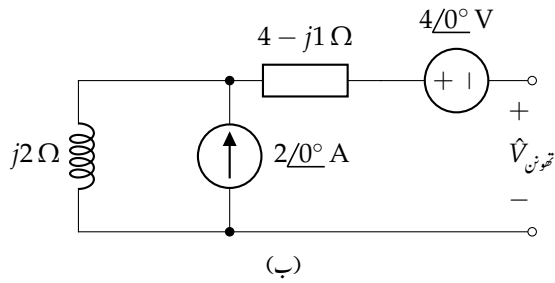
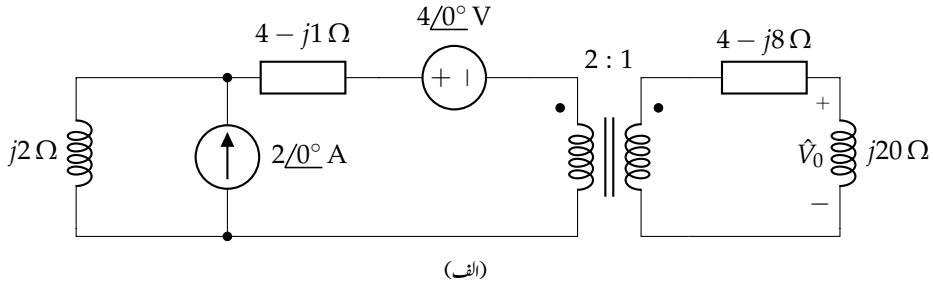
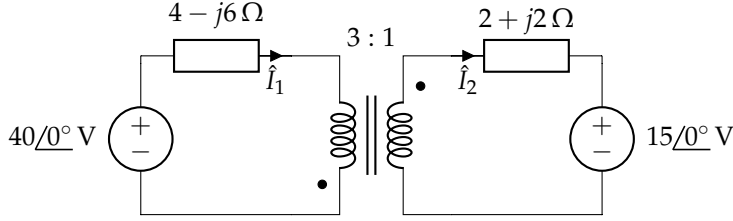
مثال 10.12: شکل 10.33 میں تمام پرزوں کو بائیں ہاتھ منتقل کرتے ہوئے $\hat{I}_1$ اور $\hat{I}_2$ حاصل کریں۔تمام پرزوں کو دائیں ہاتھ منتقل کرتے ہوئے دوبارہ حل کریں۔

حل: لچھوں پر نقطوں کو دیکھتے ہوئے دباو کو ایک جانب سے دوسری جانب منتقل کریں۔شکل 10.33-ب میں تمام اجزاء کو بائیں جانب منتقل کیا گیا ہے جبکہ شکل-پ میں تمام اجزاء کو دائیں جانب منتقل کیا گیا ہے۔

مثال 10.13: شکل میں $\hat{V}_0$ دریافت کریں۔

حل: ہم ٹرانسفارمر کے بائیں جانب دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔اس دور کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔شکل-ب میں منبع رو کی تمام رو امالہ سے گزرتی ہے لہٰذا امالہ پر دباو $4\underline{/90^\circ}\,\mathrm{V}$ ہو گا۔منبع دباو کی رو صفر ہے۔یوں تھونن

شکل 10.33: تمام پرزوں کی ایک جانب منتقلی۔

4 − j1 Ω
4/0° V
2 : 1
4 − j8 Ω
j2 Ω
2/0° A
$\hat{V}_0$
j20 Ω
(الف)
4 − j1 Ω
4/0° V
j2 Ω
2/0° A
$\hat{V}_{تھونن}$
(ب)
4 + j1 Ω
2 : 1
4 − j8 Ω
4/150° V
$\hat{V}_0$
j20 Ω
(پ)
1 + j0.25 Ω
4 − j8 Ω
2/150° V
$\hat{V}_0$
j20 Ω
(ت)

شکل 10.35: مشق 10.15 کا دور۔

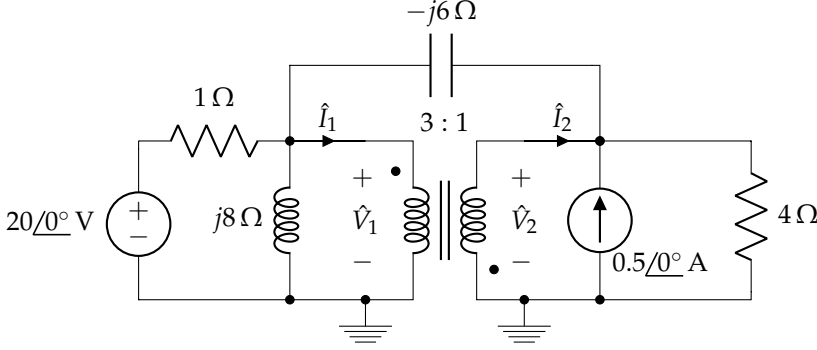
دباو $4\angle 150^\circ$ V $= 4\angle 30^\circ - 4\angle 90^\circ$ ہو گا۔ شکل-ب میں منبع رو کو کھلے سر اور منبع دباو کو قصر دور کرتے ہوئے تھونن رکاوٹ حاصل کرتے ہیں۔

$$Z_{\text{تھونن}} = 4 - j1 + j2 = 4 + j1\,\Omega$$

تھونن مساوی دور استعمال کرتے ہوئے شکل-الف سے شکل-پ حاصل ہوتا ہے۔ تمام پرزوں کو دائیں منتقل کرتے ہوئے شکل-ت حاصل ہوتا ہے جس کو دیکھ کر تقسیم دباو کے کلیے سے $\hat{V}_0$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_0 = \left(\frac{j20}{1 + j0.25 + 4 - j8 + j20}\right)(2\angle 150^\circ) = 3\angle -188^\circ\,\text{V}$$

مشق 10.15: شکل 10.35 میں ٹرانسفارمر بمع دائیں ہاتھ دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہوئے $\hat{I}_1$ دریافت کریں۔

جواب: $3.39\angle -28.6^\circ$ A

شکل 10.36: مشق 10.17 کا دور۔

مشق 10.16: شکل 10.35 میں بائیں ہاتھ کے دور اور ٹرانسفارمر کا تھونن مساوی استعمال کرتے ہوئے $\hat{I}_2$ دریافت کریں۔

جواب: $10.17\underline{/151.4^\circ}$ A

آپ نے دیکھا کہ تمام اجزاء کا تبادلہ ٹرانسفارمر کے ایک جانب کرنے سے دور نہایت آسانی سے حل ہوتا ہے۔ یہاں بتلاتا چلوں کہ یہ ترکیب صرف اس صورت قابل استعمال ہے جب تک ٹرانسفارمر کے دونوں اطراف کے ادوار کسی طرح بھی آپس میں نہ جڑے ہوں۔ اگر ٹرانسفارمر کے دونوں جانب کے ادوار آپس میں جڑے ہوں تب مکمل دور کے کرخوف مساوات لکھتے ہوئے دور حل کیا جاتا ہے۔

مشق 10.17: شکل 10.36 میں کرخوف کے مساوات اور ٹرانسفارمر کے مساوات تبادلہ استعمال کرتے ہوئے $\hat{I}_1$ ، $\hat{I}_2$ ، $\hat{V}_1$ اور $\hat{V}_2$ دریافت کریں۔

جوابات: $1.6\underline{/55^\circ}$ A ، $4.8\underline{/235^\circ}$ A ، $19\underline{/-9^\circ}$ V ، $6.3\underline{/171^\circ}$ V

ٹرانسفارمر کی ثانوی جانب کو کھلا دور رکھتے ہوئے اس کے ابتدائی جانب منبع دباو نسب کرنے سے ثانوی جانب کی رو صفر حاصل ہوتی ہے۔تبادلہ رو کے تحت یوں ابتدائی رو بھی صفر ہو گی۔حقیقت میں ٹرانسفارمر کے دونوں لچھے عام امالہ ہیں لہٰذا ابتدائی جانب منبع دباو نسب کرنے سے ابتدائی لچھے میں رو ضرور گزرے گی جسے ٹرانسفارمر کی ہیجان انگیز رو[24] کہتے ہیں۔کسی بھی ٹرانسفارمر جس پر اس کے سکت کے مطابق پورا برقی بوجھ لدا ہو میں رو کی قیمتیں ہیجان انگیز رو سے اتنی زیادہ ہوتی ہیں کہ ہیجان انگیز رو کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔

ٹرانسفارمر پر یک سمت رو طاقت لاگو کرنے سے قالب میں ساکن مقناطیسی بہاو پیدا ہو گا۔قانون فیراڈے کے تحت ساکن مقناطیسی میدان صفر دباو پیدا کرتا ہے لہٰذا ٹرانسفارمر کے دونوں لچھوں میں صفر دباو پایا جائے گا۔ایسی صورت میں ٹرانسفارمر ہمارے کسی کام کا نہیں ہے۔اس کے برعکس ٹرانسفارمر کے ابتدائی جانب بدلتا رو طاقت لاگو کرنے سے قالب میں بدلتا مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے جو دونوں لچھوں میں امالی دباو[25] $v = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}$ پیدا کرتا ہے۔ٹرانسفارمر کی مدد سے بدلتا دباو کو کم اور زیادہ کیا جاتا ہے۔یہی بنیادی وجہ ہے کہ تمام دنیا میں برقی طاقت کی ترسیل بدلتا رو طاقت کی صورت میں کی جاتی ہے۔

ہر ٹرانسفارمر کسی مخصوص دباو اور تعدد پر چلنے کے لئے بنایا جاتا ہے۔ٹرانسفارمر کی صحیح کارکردگی کے لئے ضروری ہے کہ اسے انہیں دباو اور تعدد پر استعمال کیا جائے۔عموماً مشینوں کی طرح ٹرانسفارمر پر لگی معلوماتی تختی پر ٹرانسفارمر کی معلومات درج ہوتی ہے۔اس تختی پر لچھوں کے چکر کی بجائے دونوں اطراف کے موثر دباو درج ہوتے ہیں۔ گھریلو صارفین کو طاقت مہیا کرنے والے واپڈا کے ٹرانسفارمر پر $11000:230\,\mathrm{V/V}$ ، $50\,\mathrm{Hz}$ درج[26] ہو گا۔یہ ٹرانسفارمر $11\,\mathrm{kV\,rms}$ سے $230\,\mathrm{V\,rms}$ پیدا کرتا ہے۔عموماً استعمال میں اس ٹرانسفارمر کو زیادہ دباو جانب $11\,\mathrm{kV\,rms}$ پر طاقت مہیا کی جاتی ہے جبکہ اس کے کم دباو جانب سے $230\,\mathrm{V\,rms}$ پر طاقت حاصل کی جاتی ہے۔اس ٹرانسفارمر کے کم دباو جانب $230\,\mathrm{V\,rms}$ پر طاقت مہیا کرتے ہوئے زیادہ دباو جانب سے $11\,\mathrm{kV\,rms}$ پر طاقت حاصل کی جا سکتی ہے۔

مثال 10.14: تربیلا ڈیم سے $10\,\mathrm{MW}$ طاقت اندرون ملک منتقل کرنے کے لئے المونیم[27] کا ترسیلی تار درکار ہے۔ترسیلی تار کی یک طرفہ لمبائی $500\,\mathrm{km}$ ہے۔تار میں مزاحمتی ضیاع کو کل طاقت کے $5\,\%$ سے کم رکھنا

[24] excitation current
[25] induced voltage
[26] مشین کی معلوماتی تختی پر درج $230\,\mathrm{V}$ سے مراد $230\,\mathrm{V\,rms}$ ہوتا ہے۔
[27] aluminium

ہے۔طاقت کی ترسیل $110\,\text{kV rms}$ دباو پر کی جائے گی۔تار کی موٹائی دریافت کریں۔اگر طاقت کی ترسیل $230\,\text{V rms}$ پر کی جائے، تب تار کی موٹائی کیا ہو گی۔المونیم کی موصلیت $\sigma = 3.69 \times 10^7\,\text{S}\,\text{m}^{-1}$ ہے۔

حل:طاقت کا ضیاع حاصل کرتے ہیں۔

$$P_{\text{ضیاع}} = (0.05)(10\,\text{MW}) = 0.5\,\text{MW}$$

ترسیلی دباو پر رو کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$I = \frac{10\,\text{MW}}{110\,\text{kV}} = 90.9\,\text{A rms}$$

طاقت کا ضیاع تار میں مزاحمتی ضیاع کی بنا ہے یعنی

$$P_{\text{ضیاع}} = I^2 R$$

لہٰذا

$$R = \frac{P_{\text{ضیاع}}}{I^2} = \frac{500\,000}{90.9^2} = 60.5\,\Omega$$

ہو گا۔تار کی یک طرفہ لمبائی پانچ سو کلو میٹر ہے لہٰذا دو عدد تار کی کل لمبائی $1000\,\text{km}$ ہو گی۔رداس r ، موصلیت σ اور L لمبی تار کی مزاحمت $R = \frac{L}{\sigma \pi r^2}$ ہو گی لہٰذا تار کا رداس درج ذیل ہو گا۔

$$r = \sqrt{\frac{L}{\sigma \pi R}} = \sqrt{\frac{1\,000\,000}{3.69 \times 10^7 \pi 60.5}} = 1.19\,\text{cm}$$

آئیں اب $230\,\text{V rms}$ پر ترسیل کے لئے حل کرتے ہیں۔طاقت کا ضیاع اب بھی $0.5\,\text{MW}$ ہے جبکہ رو درج ذیل ہے۔

$$I = \frac{10\,\text{MW}}{230\,\text{V}} = 43\,478\,\text{A rms}$$

یوں تار کی مزاحمت

$$R = \frac{P_{\text{ضیاع}}}{I^2} = \frac{500\,000}{43478^2} = 0.000\,264\,5\,\Omega$$

ہو گی جس سے تار کا رداس درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$r = \sqrt{\frac{L}{\sigma \pi R}} = \sqrt{\frac{1\,000\,000}{3.69 \times 10^7 \pi 0.0002645}} = 5.7\,\text{m}$$

آپ نے یقیناً واپڈا کے کسی کھمبے میں 11.4 m قطر کا تار نہیں دیکھا ہو گا۔ میں نے تو اتنے قطر کا کھمبا بھی کبھی نہیں دیکھا۔

اس مثال سے صاف واضح ہے کہ طاقت کی ترسیل زیادہ سے زیادہ دباو پر کی جاتی ہے تا کہ کم سے کم موٹائی کی تار استعمال کی جائے۔

مثال 10.15: پانچ کلو واٹ سے کم طاقت استعمال کرنے والے گھریلو صارفین کے ہاں ایک دور (یک فیزہ) توانائی ناپنے والا میٹر[28] نسب کیا جاتا ہے۔ایک قصبے میں پچاس گھر ہیں۔اس قصبے کو کتنی سکت کا ٹرانسفارمر درکار ہے۔فرض کریں کہ ہر گھرانے کو 230 V rms دباو پر 20 A rms درکار ہوں گے۔

حل: پچاس گھرانوں کو کل درج ذیل رو درکار ہو گی۔

$$(50)(20\,\mathrm{A\,rms}) = 1000\,\mathrm{A\,rms}$$

یوں اس قصبے کو

$$(230\,\mathrm{V\,rms})(1000\,\mathrm{A\,rms}) = 230\,\mathrm{kV\,A}$$

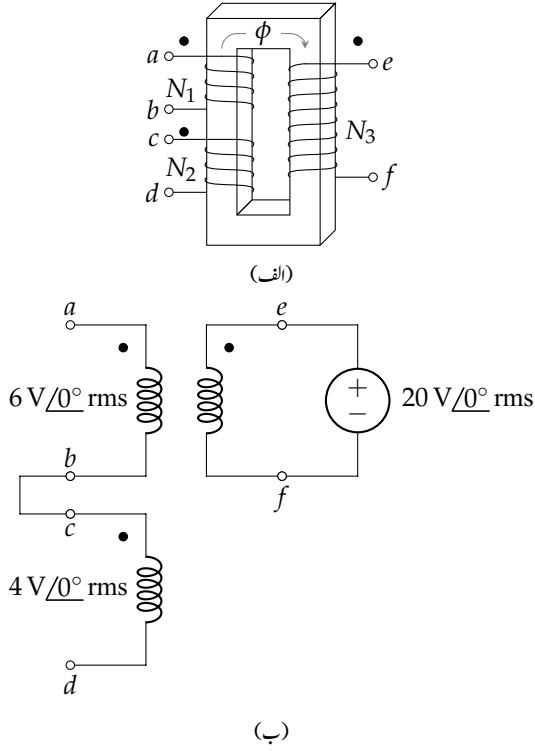
سکت کا ٹرانسفارمر درکار ہو گا۔

مثال 10.16: شکل 10.37 میں ٹرانسفارمر کے قالب پر تین عدد لچھے لپیٹے گئے ہیں۔فرض کریں کہ چکروں کی تناسب درج ذیل ہے۔

$$N_1 : N_2 : N_3 = 3 : 2 : 10$$

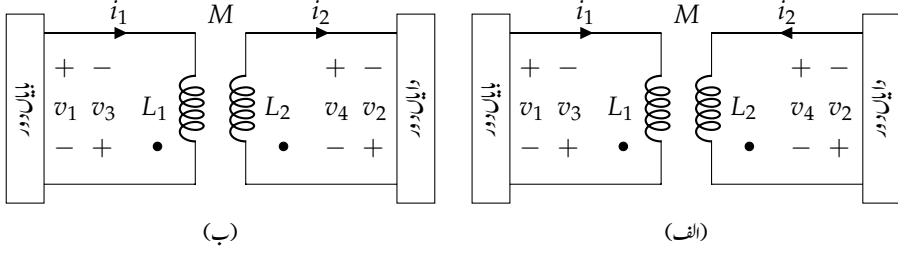
یوں N_3 پر $20\,\mathrm{V}\underline{/0^\circ}\,\mathrm{rms}$ مہیا کرنے سے N_2 پر $6\,\mathrm{V}\underline{/0^\circ}\,\mathrm{rms}$ اور N_3 پر $4\,\mathrm{V}\underline{/0^\circ}\,\mathrm{rms}$ ملیں گے۔

---

[28] energy meter

شکل 10.37: مثال 10.16 کا دور۔

- اگر b اور c کو جوڑا جائے تب $V_{ad} = 10\,\text{V rms}$ ہو گا۔ شکل 10.37-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے جہاں صفائی کی خاطر قالب ظاہر کرنے والی عمودی لکیریں نہیں کھینچی گئی ہیں۔

- اس کے برعکس اگر صرف b اور d کو جوڑا جائے تب $V_{ad} = 2\,\text{V rms}$ ہو گا۔

- اسی طرح اگر صرف c اور f کو جوڑا جائے تب $V_{ed} = 24\,\text{V rms}$ اور $V_{ab} = 6\,\text{V rms}$ ہو گا۔

شکل 10.38: سوال 10.1 اور سوال 10.2 کے ادوار۔

سوالات

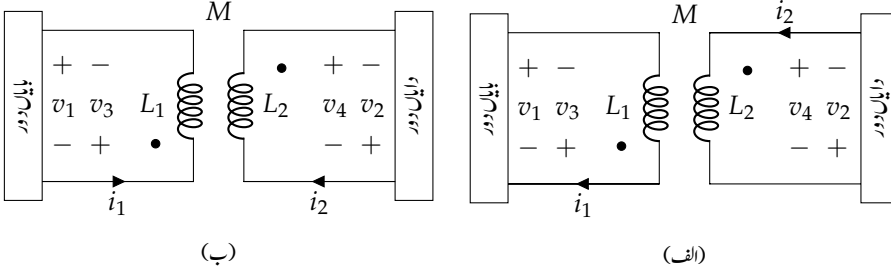
سوال 10.1: شکل 10.38-الف میں v_1 ، v_2 ، v_3 اور v_4 کے مساوات لکھیں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_2 &= -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_3 &= -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_4 &= M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

سوال 10.2: شکل 10.38-ب میں v_1 ، v_2 ، v_3 اور v_4 کے مساوات لکھیں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_2 &= -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_3 &= -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_4 &= M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

شکل 10.39: سوال 10.3 اور سوال 10.4 کے ادوار۔

سوال 10.3: شکل 10.39-الف میں v_1 ، v_2 ، v_3 اور v_4 کے مساوات لکھیں۔

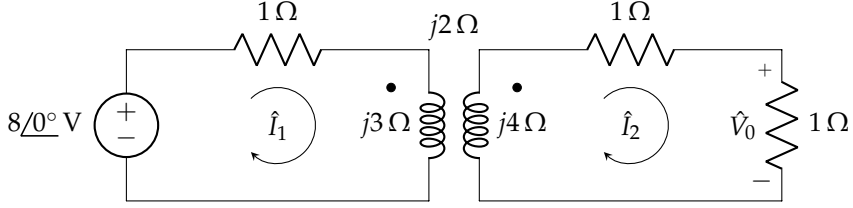
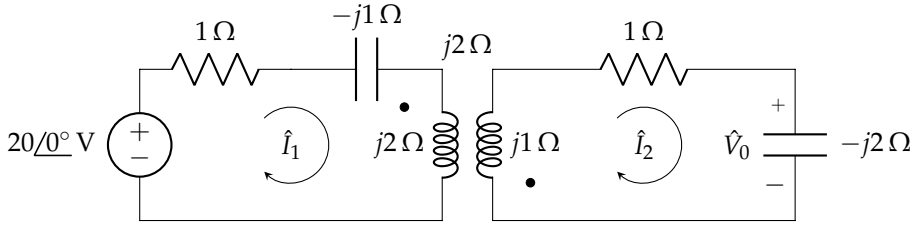
جوابات:

$$\begin{aligned}
v_1 &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_2 &= M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_3 &= -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_4 &= -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

سوال 10.4: شکل 10.39-ب میں v_1 ، v_2 ، v_3 اور v_4 کے مساوات لکھیں۔

جوابات:

$$\begin{aligned}
v_1 &= -L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_2 &= -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_3 &= L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\\
v_4 &= M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

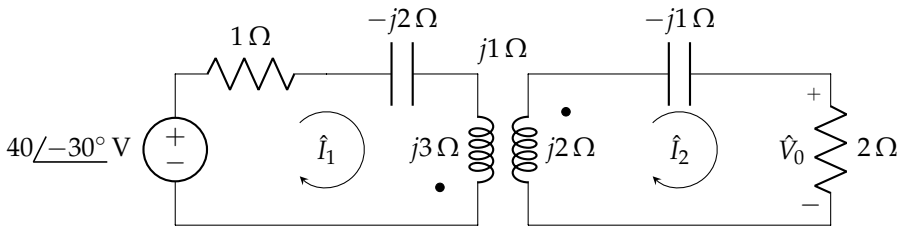
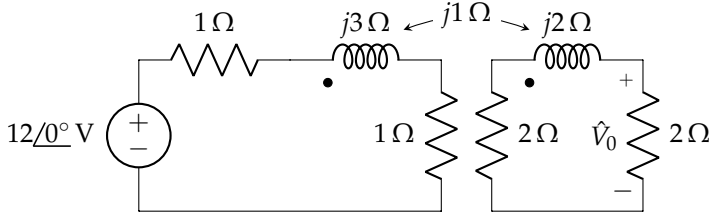
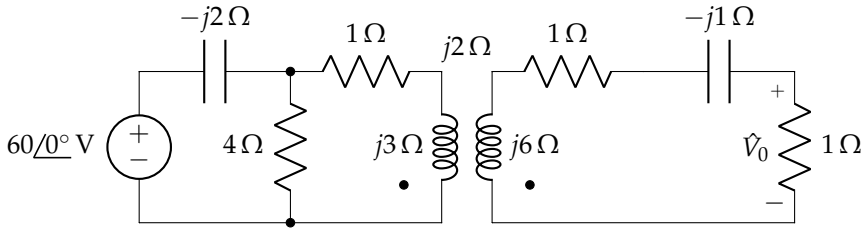
سوال 10.5: شکل 10.40 میں V_0 حاصل کریں۔

شکل 10.40: سوال 10.5 کا دور۔

شکل 10.41: سوال 10.6 کا دور۔

جواب: $1.37\angle{-30.96^\circ}$ V

سوال 10.6: شکل 10.41 میں V_0 حاصل کریں۔

جواب: $13.33\angle{180^\circ}$ V

سوال 10.7: شکل 10.42 میں V_0 حاصل کریں۔

جواب: $22.2\angle{183.7^\circ}$ V

شکل 10.42: سوال 10.7 کا دور۔

شکل 10.43: سوال 10.8 کا دور۔

شکل 10.44: سوال 10.9 کا دور۔

سوال 10.8: شکل 10.43 میں V_0 حاصل کریں۔

جواب: $1.47\underline{/190.6^\circ}$ V

سوال 10.9: شکل 10.44 میں V_0 حاصل کریں۔

جواب: $9.1\underline{/29.5^\circ}$ V

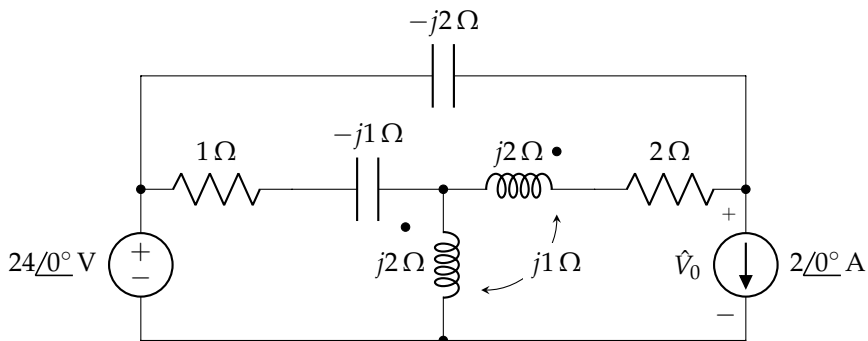
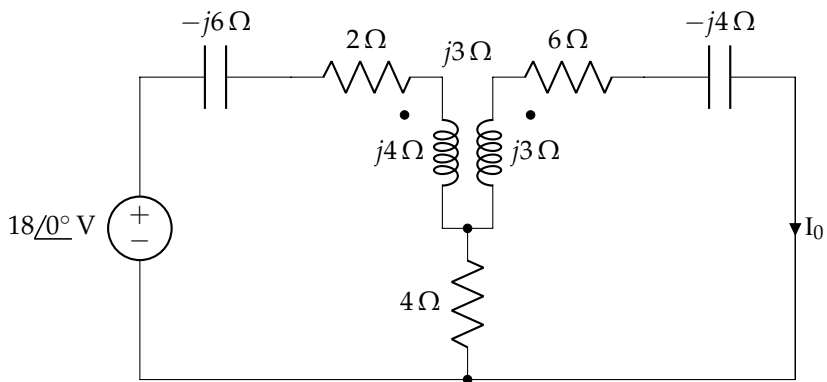
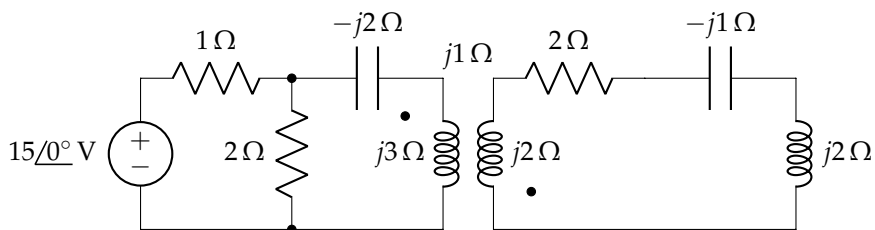
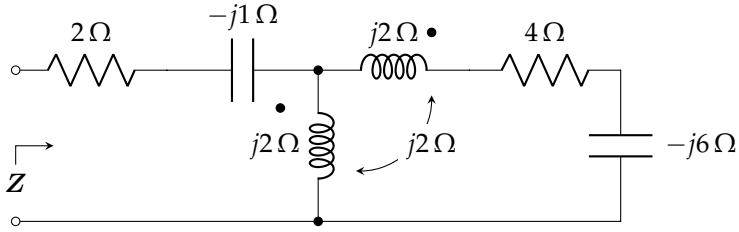
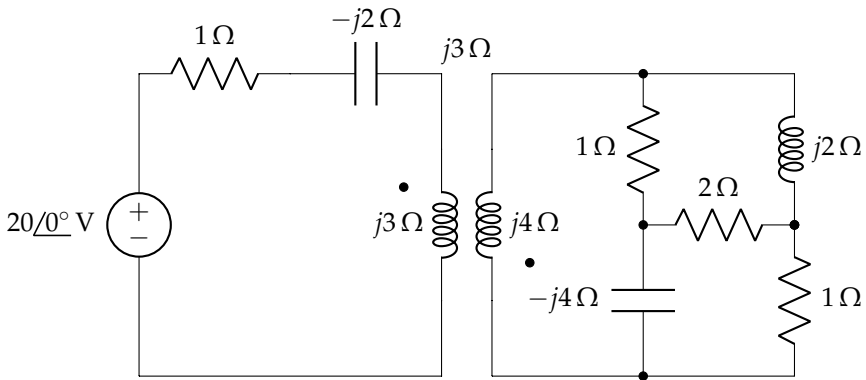
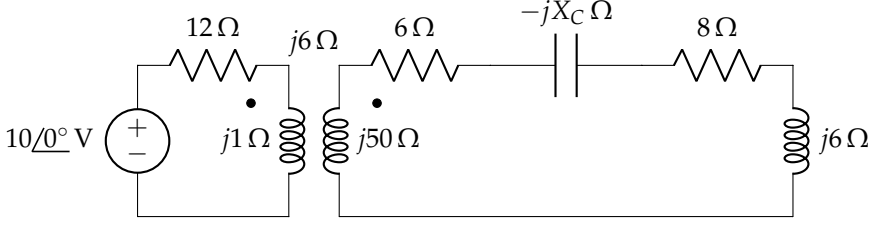
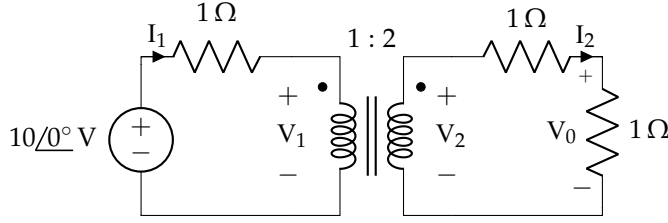
سوال 10.10: شکل 10.45 میں V_0 حاصل کریں۔

جواب: $23.1\underline{/9.73^\circ}$ V

سوال 10.11: شکل 10.46 میں I_0 حاصل کریں۔

جواب: $1.26\underline{/81.3^\circ}$ A

سوال 10.12: شکل 10.47 میں منبع کو کیا رکاوٹ نظر آتی ہے؟

جواب: $1.35 + j0.59\,\Omega$

شکل 10.45: سوال 10.10 کا دور۔

شکل 10.46: سوال 10.11 کا دور۔

شکل 10.47: سوال 10.12 کا دور۔

شکل 10.48: سوال 10.13 کا دور۔

شکل 10.49: سوال 10.14 کا دور۔

شکل 10.50: سوال 10.15 کا دور۔

شکل 10.51: سوال 10.16 کا دور۔

سوال 10.13: شکل 10.48 میں داخلی رکاوٹ Z حاصل کریں۔

جواب: $5 + j36.9\,\Omega$

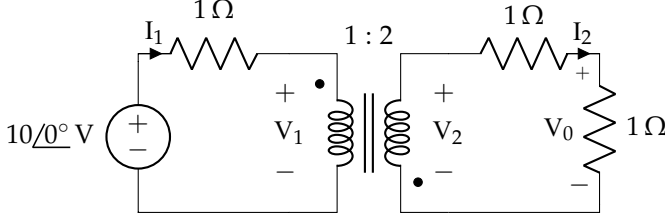
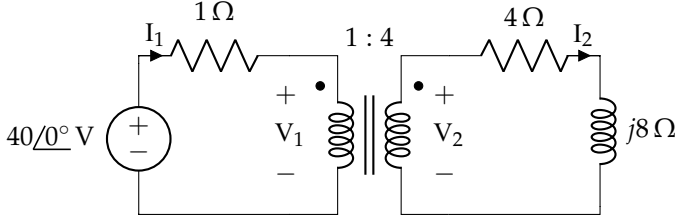
سوال 10.14: شکل 10.49 میں منبع کو کیا رکاوٹ نظر آتی ہے؟

جواب: $1.785 - j0.5536\,\Omega$

سوال 10.15: شکل 10.50 میں X_C کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر منبع کو مزاحمتی رکاوٹ نظر آتی ہے۔

جواب: $X_C = 49.3137$ ، $X_C = 26.686$

سوال 10.16: شکل 10.51 میں کامل ٹرانسفارمر استعمال کیا گیا ہے۔ تمام دباو اور رو دریافت کریں۔آپ دیکھیں گے کہ داخلی اور خارجی متغیرات ہم قدم ہیں۔

جواب: $\mathrm{I}_1 = \frac{20}{3}\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A}$ ، $\mathrm{I}_2 = \frac{10}{3}\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A}$ ، $\mathrm{V}_1 = \frac{10}{3}\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$ ، $\mathrm{V}_2 = \frac{20}{3}\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$ ، $\mathrm{V}_0 = \frac{10}{3}\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$

شکل 10.52: سوال 10.17 کا دور۔

شکل 10.53: سوال 10.18 کا دور۔

سوال 10.17: شکل 10.52 میں کامل ٹرانسفارمر استعمال کیا گیا ہے۔ تمام دباو اور رو دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ داخلی اور خارجی متغیرات میں $180°$ زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

جواب: $I_1 = \frac{20}{3}\angle 0° \, A$ ، $I_2 = \frac{10}{3}\angle 180° \, A$ ، $V_1 = \frac{10}{3}\angle 0° \, V$ ، $V_2 = \frac{20}{3}\angle 180° \, V$ ، $V_0 = \frac{10}{3}\angle 180° \, V$

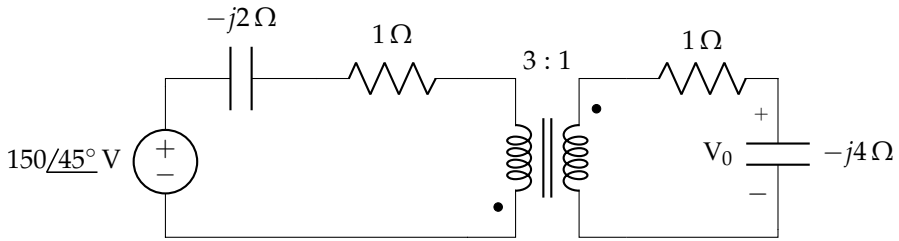
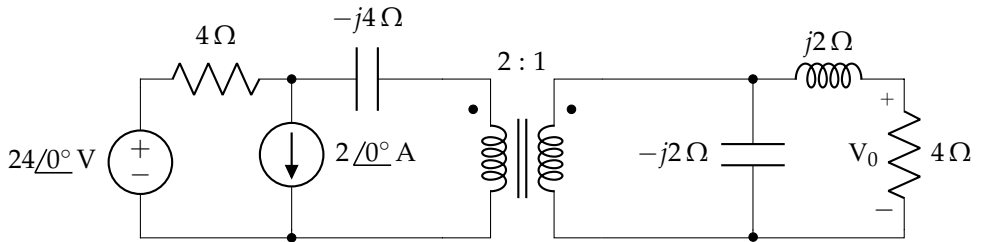
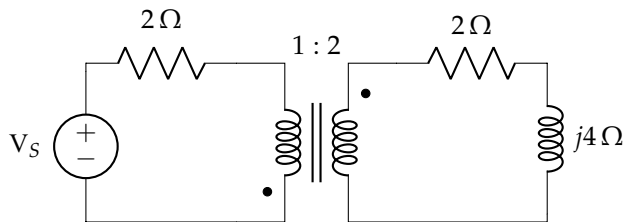
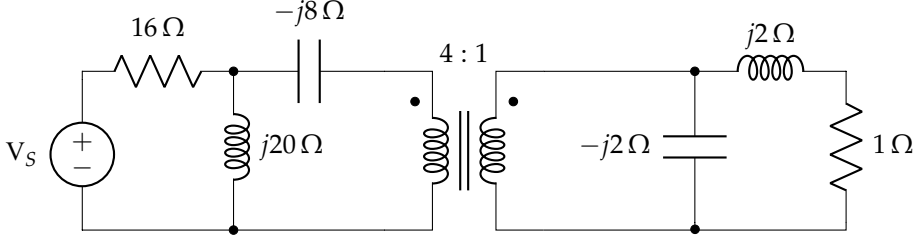
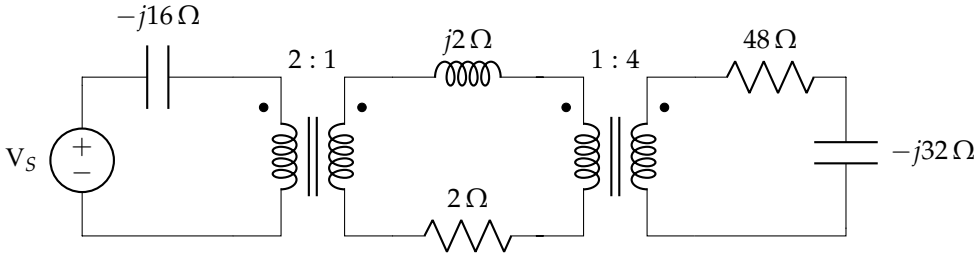
سوال 10.18: شکل 10.53 میں کامل ٹرانسفارمر استعمال کیا گیا ہے۔ تمام دباو اور رو دریافت کریں۔

جواب: $I_1 = 29.7\angle -21.8° \, A$ ، $I_2 = 7.43\angle -21.8° \, A$ ، $V_1 = 16.6\angle 41.6° \, V$ ، $V_2 = 66.4\angle 41.6° \, V$

سوال 10.19: شکل 10.54 میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = 45.8\angle 210.3° \, V$

سوال 10.20: شکل 10.55 میں V_0 دریافت کریں۔

جواب: $V_0 = 4.44\angle -33.7° \, V$

شکل 10.54: سوال 10.19 کا دور۔

شکل 10.55: سوال 10.20 کا دور۔

شکل 10.56: سوال 10.21 کا دور۔

شکل 10.57: سوال 10.22 کا دور۔

شکل 10.58: سوال 10.23 کا دور۔

سوال 10.21: شکل 10.56 میں منبع کو نظر آنے والی رکاوٹ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z} = 2.5 + j1\,\Omega$

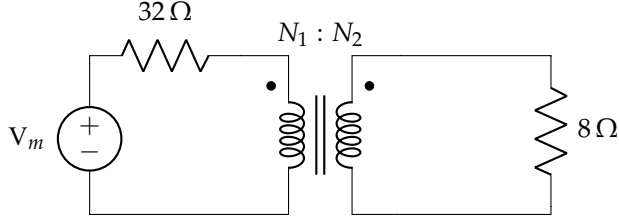
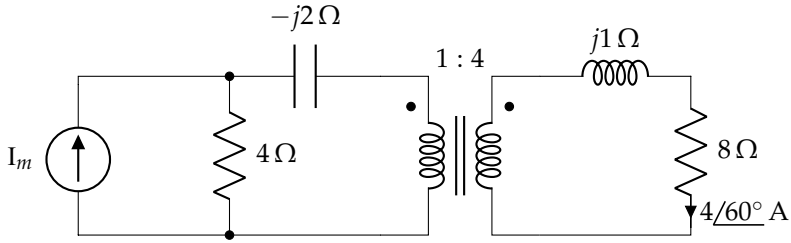
سوال 10.22: شکل 10.57 میں داخلی رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $21.69 + j21.78\,\Omega$

سوال 10.23: شکل 10.58 میں داخلی رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $20 - j16\,\Omega$

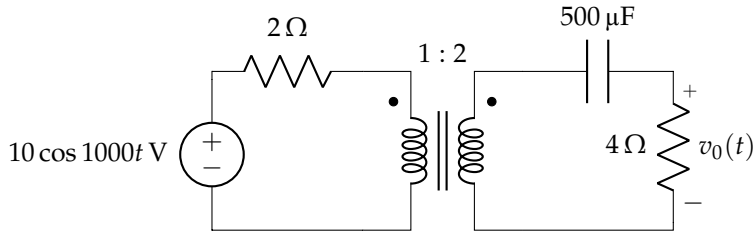
سوال 10.24: شکل 10.59 میں $32\,\Omega$ خارجی مزاحمت والے ایمپلیفائر کے ساتھ ٹرانسفارمر کے ذریعہ $8\,\Omega$ کا لاوڈ سپیکر جوڑا گیا ہے۔ایمپلیفائر کو اس کے تھونن مساوی دور سے ظاہر کیا گیا ہے۔لاوڈ سپیکر میں زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کی خاطر ٹرانسفارمر کی $\frac{N_1}{N_2}$ دریافت کریں۔

جواب: $\frac{N_1}{N_2} = \frac{2}{1}$

شکل 10.59: سوال 10.24 کا دور۔

شکل 10.60: سوال 10.25 کا دور۔

سوال 10.25: شکل 10.60 میں I_m معلوم کریں۔

جواب: $I_m = 18.2\underline{/34.8^\circ}\,\mathrm{A}$

سوال 10.26: شکل 10.61 میں $v_0(t)$ معلوم کریں۔

جواب: $v_0(t) = 12.6\cos(1000t + 18.4^\circ)\,\mathrm{V}$

شکل 10.61: سوال 10.26 کا دور۔

باب 11

تین دوری نظام

11.1 تین دوری ستارہ دباو

اب تک بدلتا رو طاقت کی بات کرتے ہوئے ایک عدد منبع دباو کی بات کی جاتی رہی۔ حقیقت میں بدلتا رو طاقت کی پیدا وار اور ترسیل تین دوری نظام سے کی جاتی ہے۔ شکل 11.1 میں تین دوری نظام دکھایا گیا ہے جہاں تین عدد منبع استعمال کئے گئے ہیں جو آپس میں $120°$ زاویائی فاصلہ رکھتے ہیں۔ تمام دباو کے حیطے یک برابر ہونے کی صورت میں اس کو **متوازن تین دوری نظام**[1] کہا جاتا ہے۔ دکھائے گئے متوازن نظام کے دباو درج ذیل ہیں جن کے دوری سمتیات کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_{an} &= 230\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V\,rms}\\
\hat{V}_{bn} &= 230\underline{/-120^\circ}\,\mathrm{V\,rms}\\
\hat{V}_{cn} &= 230\underline{/-240^\circ}\,\mathrm{V\,rms}\\
&= 230\underline{/120^\circ}\,\mathrm{V\,rms}
\end{aligned} \tag{11.1}
$$

انہیں کو وقتی دائرہ کار میں درج ذیل لکھا جائے گا۔ شکل-پ میں انہیں دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
v_{an}(t) &= 230\sqrt{2}\cos\omega t\,\mathrm{V}\\
v_{bn}(t) &= 230\sqrt{2}\cos(\omega t - 120^\circ)\,\mathrm{V}\\
v_{cn}(t) &= 230\sqrt{2}\cos(\omega t + 120^\circ)\,\mathrm{V}
\end{aligned} \tag{11.2}
$$

[1] balanced three phase system

متوازن بوجھ کی صورت میں تینوں رو کے حیطے اور زاویے بھی برابر ہوں گے لہٰذا انہیں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} i_{an}(t) &= I_0 \cos(\omega t - \theta) \,\text{A} \\ i_{bn}(t) &= I_0 \cos(\omega t - 120^\circ - \theta) \,\text{A} \\ i_{cn}(t) &= I_0 \cos(\omega t + 120^\circ - \theta) \,\text{A} \end{aligned} \tag{11.3}$$

مساوات 11.2 کے تینوں دباو کو عمومی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v_{an}(t) &= V_0 \cos \omega t \,\text{V} \\ v_{bn}(t) &= V_0 \cos(\omega t - 120^\circ) \,\text{V} \\ v_{cn}(t) &= V_0 \cos(\omega t + 120^\circ) \,\text{V} \end{aligned} \tag{11.4}$$

شکل 11.1 میں n تا a کے دباو $\hat{V}_{an}$ کو شاخ کا دباو یا **دوری دباو**[2] کہا جاتا ہے۔اسی طرح n تا b کے دباو $\hat{V}_{bn}$ اور n تا c کے دباو $\hat{V}_{cn}$ بھی دوری دباو ہیں۔آئیں اس شکل سے b تا a دباو دریافت کریں جسے **دباو تار**[3] کہا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} \hat{V}_{ab} &= \hat{V}_{an} - \hat{V}_{bn} \\ &= V_0\underline{/0^\circ} - V_0\underline{/-120^\circ} \\ &= V_0 - V_0 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= V_0 \left(\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \sqrt{3} V_0\underline{/30^\circ} \end{aligned}$$

یہی جواب شکل 11.2-الف میں ترسیمی طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں تکون سے درج ذیل لکھتے

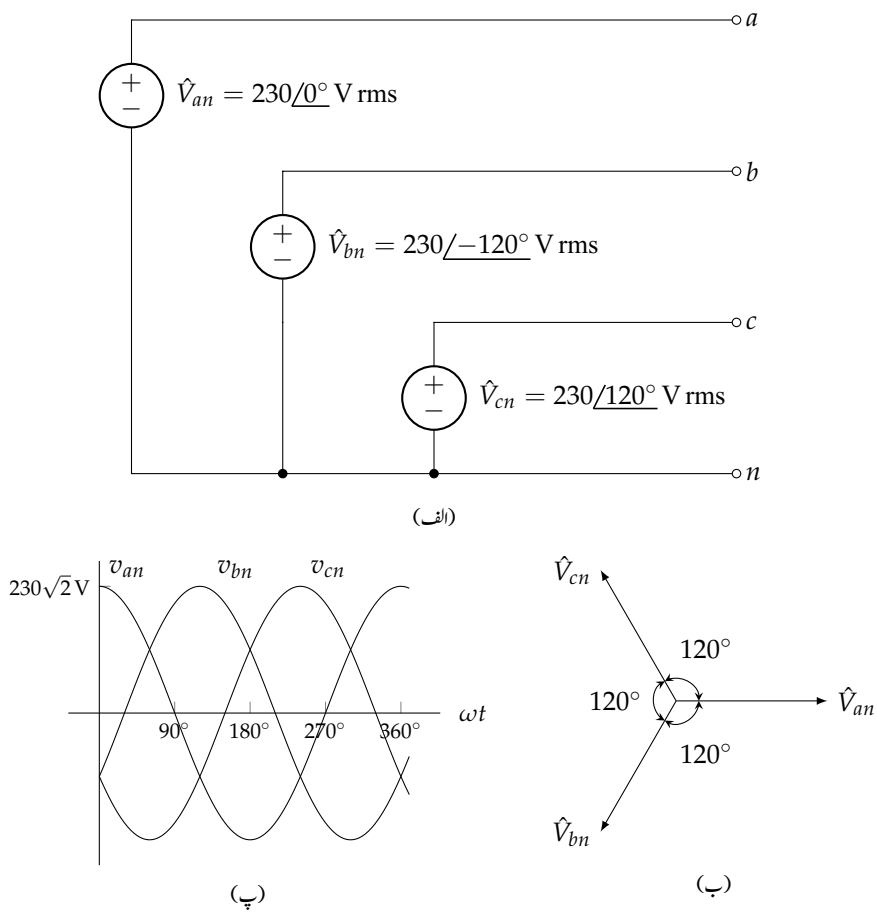
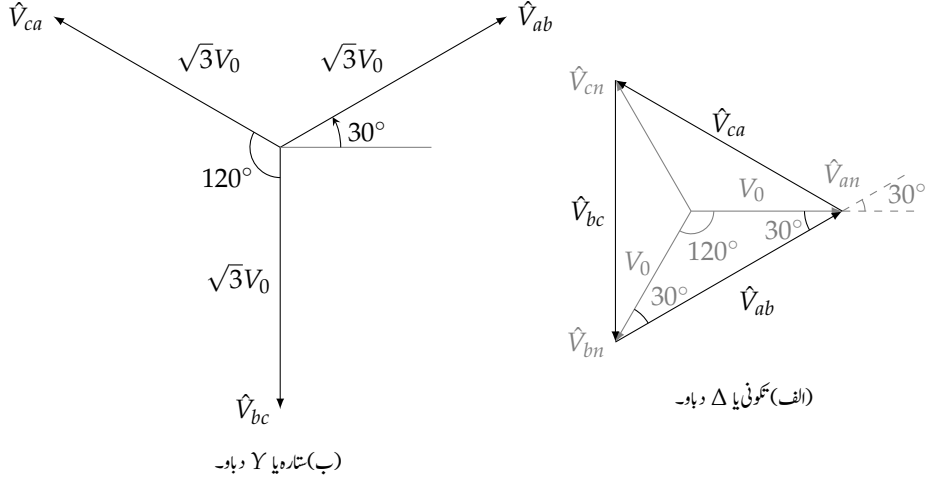
$$V_{ab}^2 = V_0^2 + V_0^2 - 2V_0^2 \cos 120^\circ$$

ہوئے

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_0 \tag{11.5}$$

ملتا ہے اور زاویہ شکل سے 30° پڑھا جا سکتا ہے لہٰذا $\hat{V}_{ab} = \sqrt{3}V_0\underline{/30^\circ}$ ہو گا۔

چونکہ V_0 دور کا دباو ہے جبکہ $\sqrt{3}V_0$ تار کا دباو ہے لہٰذا درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$V_{\text{تار}} = \sqrt{3} V_{\text{دور}} \tag{11.6}$$

شکل 11.1: تین دوری نظام۔

شکل 11.2: دوری دباو اور دباو تار کا تعلق۔

یوں ہم تین دوری دباو تار لکھ سکتے ہیں جنہیں شکل 11.2-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_{ab} &= \sqrt{3}V_0\underline{/30^\circ} \\
\hat{V}_{ca} &= \sqrt{3}V_0\underline{/150^\circ} \\
\hat{V}_{bc} &= \sqrt{3}V_0\underline{/-90^\circ}
\end{aligned}
\tag{11.7}
$$

تین دوری دباو تار بھی آپس میں 120° زاویے پر پائے جاتے ہیں۔

شکل 11.1-ب میں v_{bn} کو v_{an} سے 120° پیچھے اور v_{cn} کو v_{bn} سے 120° پیچھے دکھایا گیا ہے لہٰذا اس نظام کی ترتیب abc ہے۔ تین دوری نظام میں عموماً a ، b ، c اور n لئے مختلف رنگ کے تار استعمال کئے جاتے ہیں۔ ہمارے ہاں لال، پیلا، نیلا اور کالا رنگ استعمال ہوتا ہے۔

[2] phase voltage
[3] line to line voltage

مثال 11.1: درج ذیل مساوات کو ثابت کریں۔

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + 120^\circ) + \cos(\alpha - 120^\circ) = 0 \tag{11.8}$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha - 240^\circ) + \cos(\alpha + 240^\circ) = 0 \tag{11.9}$$

حل: مساوات 11.8 میں دوسرے اور تیسرے اجزاء کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos(\alpha + 120^\circ) = \cos\alpha\cos 120^\circ - \sin\alpha\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha - 120^\circ) = \cos\alpha\cos 120^\circ + \sin\alpha\sin 120^\circ = -\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$

یوں تینوں اجزاء کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$(\cos\alpha) + (-\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) + (-\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) = 0$$

آئیں اب مساوات 11.9 کو ثابت کریں۔ مساوات کے دوسرے جزو میں $\cos(\alpha - 240^\circ) = \cos(\alpha + 120^\circ)$ استعمال کرتے ہوئے اور تیسرے جزو میں $\cos(\alpha + 240^\circ) = \cos(\alpha - 120^\circ)$ استعمال کرتے ہوئے مساوات 11.8 ملتا ہے جسے ہم ثابت کر چکے ہیں۔

مشق 11.1: متوازن abc ترتیب کے تین دوری ستارہ دباو میں $\hat{V}_{an} = 230\underline{/30^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔ باقی دو موثر ستارہ دباو حاصل کرتے ہوئے موثر دباو تار بھی حاصل کریں۔

جوابات: $\hat{V}_{bn} = 230\underline{/150^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ، $\hat{V}_{cn} = -90\underline{/30^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ، $\hat{V}_{ab} = 398.4\underline{/60^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ، $\hat{V}_{ca} = 398.4\underline{/180^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ، $\hat{V}_{bc} = 398.4\underline{/-60^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$

مشق 11.2: متوازن تین دوری abc ستارہ نظام میں $\hat{V}_{ab} = 415\angle 0^\circ \,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔ دباو تار کا تکون شکل 11.2-الف کے طرز پر کھینچیں۔ ترسیمی طریقے سے موثر ستارہ دوری دباو حاصل کریں۔

جوابات: $\hat{V}_{an} = 239.4\angle -30^\circ \,\mathrm{V\,rms}$ ، $\hat{V}_{bn} = 239.4\angle -150^\circ \,\mathrm{V\,rms}$ ، $\hat{V}_{cn} = 239.4\angle 90^\circ \,\mathrm{V\,rms}$

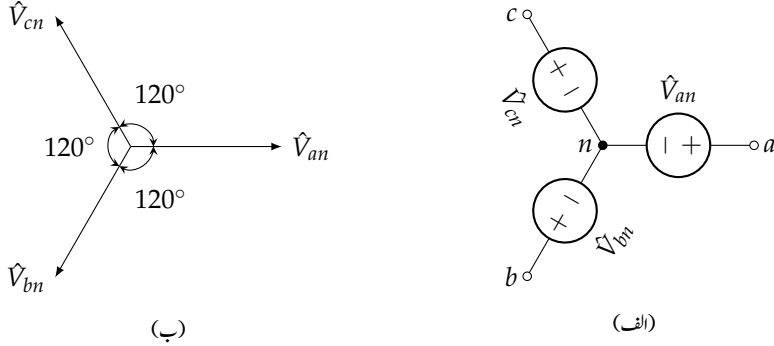
تین دوری نظام میں علیحدہ علیحدہ دور کے لمحاتی طاقت لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}
p_a(t) &= v_{an} i_{an} \\
&= V_0 I_0 \cos \omega t \cos(\omega t - \theta) \\
&= \frac{V_0 I_0}{2} [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta)] \\
p_b(t) &= v_{bn} i_{bn} \\
&= V_0 I_0 \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - 120^\circ - \theta) \\
&= \frac{V_0 I_0}{2} [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ)] \\
p_c(t) &= v_{cn} i_{cn} \\
&= V_0 I_0 \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t + 120^\circ - \theta) \\
&= \frac{V_0 I_0}{2} [\cos \theta + \cos(2\omega t - \theta + 240^\circ)]
\end{aligned}$$

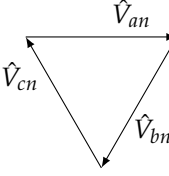
جہاں $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یوں مکمل نظام کا لمحاتی طاقت $p(t)$ درج بالا کا مجموعہ ہو گا۔

$$\begin{aligned}
p(t) &= p_a(t) + p_b(t) + p_c(t) \\
&= \frac{V_0 I_0}{2} [3 \cos \theta + \cos(2\omega t - \theta) + \cos(2\omega t - \theta - 240^\circ) + \cos(2\omega t - \theta + 240^\circ)]
\end{aligned}$$

درج بالا مساوات میں $2\omega t - \theta = \alpha$ لکھتے ہوئے اور مساوات 11.9 استعمال کرتے ہوئے آخری تین اجزاء کے مجموعے کو صفر کے برابر لکھا جا سکتا ہے۔یوں لمحاتی طاقت درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$p(t) = \frac{3 V_0 I_0}{2} \cos \theta = 3 V_{\mathrm{rms}} I_{\mathrm{rms}} \cos \theta \,\mathrm{W} \tag{11.10}$$

شکل 11.3: ستارہ (Y) جوڑ۔

آپ مساوات 11.10 کا $p_a(t) = \frac{V_0 I_0}{2}[\cos\theta + \cos(2\omega t - \theta)]$ کے ساتھ موازنہ کریں جو دگنی تعدد یعنی 2ω کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تین دوری نظام میں لمحاتی طاقت برقرار رہتا ہے۔یہ انتہائی اہم نتیجہ ہے۔ تین دور کا موٹر برقرار میکانی قوت پیدا کرے گا لہٰذا اس میں ترتراہٹ کم سے کم ہو گی جو میکانی خرابی کی وجہ بنتی ہے۔

11.2 ستارہ ستارہ (YY) جوڑ

مساوات 11.2 میں لمحہ $t = 0$ پر v_{an} کی چوٹی پائی جاتی ہے۔ہم کہتے ہیں کہ v_{an} کا زاویائی ہٹاو صفر کے برابر ہے۔اگر v_{an} کا زاویائی ہٹاو θ ہو تب تین دوری نظام کے دوری سمتیات درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \hat{V}_{an} &= 230\underline{/\theta}\,\mathrm{V\,rms} \\ \hat{V}_{bn} &= 230\underline{/\theta - 120^\circ}\,\mathrm{V\,rms} \\ \hat{V}_{cn} &= 230\underline{/\theta - 240^\circ}\,\mathrm{V\,rms} \end{aligned} \tag{11.11}$$

ایسی صورت میں شکل 11.1-ب کے تینوں دوری سمتیات θ زاویہ گھوم جائیں گے۔ تین دوری abc نظام کی بات کرتے ہوئے ہم v_{an} کا زاویہ ہٹاو صفر کے برابر لیں گے تا کہ بار بار زاویہ ہٹاو کا تعین نہ کرنا پڑے۔

شکل 11.1-الف کے تین دوری abc نظام کو شکل 11.3-الف میں ستارہ جڑا[4] دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی شکل-ب میں دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جو ستارہ شکل بناتے ہیں۔ تین دوری نظام کو اس طرح کاغذ پر بناتے ہوئے مکمل

[4] star connected, Y connected

شکل 11.4: تین دوری نظام کے تینوں دباو کا مجموعہ صفر کے برابر ہے۔

معلومات بغیر لکھے دی جاتی ہے۔یوں شکل 11.1-الف سے ظاہر ہے کہ v_{an} کا زاویہ ہٹاو صفر کے برابر ہے اور v_{bn} اس سے $120°$ پیچھے ہے۔یوں ظاہر ہے کہ اس نظام کی ترتیب abc ہے۔ساتھ ہی آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تینوں دباو کے حیطے برابر ہیں۔تینوں دباو کو نقطہ n سے ناپا جاتا ہے۔ستارہ جوڑ کو Y [5] جوڑ بھی کہتے ہیں۔

دوری سمتیات کا مجموعہ حاصل کرتے وقت ایک دوری سمتیہ کی نوک کے ساتھ دوسری دوری سمتیہ کی دم ملائی جاتی ہے۔اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے شکل 11.4 میں ترسیمی طریقے سے درج ذیل مساوات ثابت کی گئی ہے۔

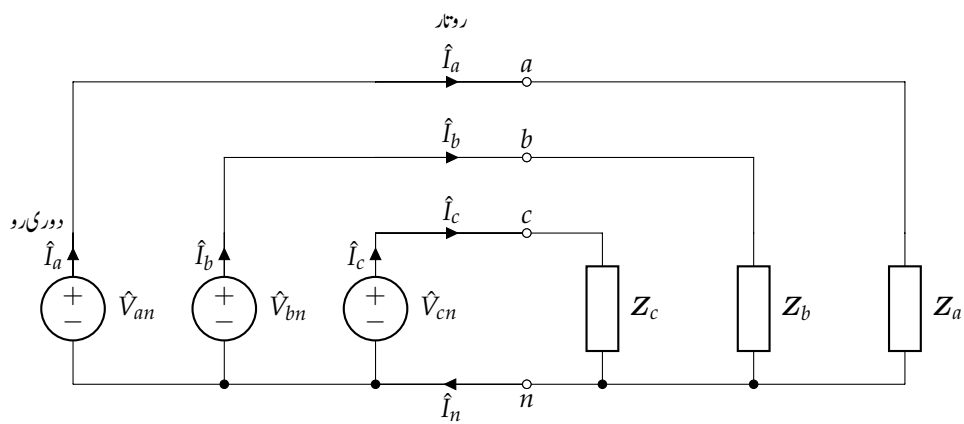
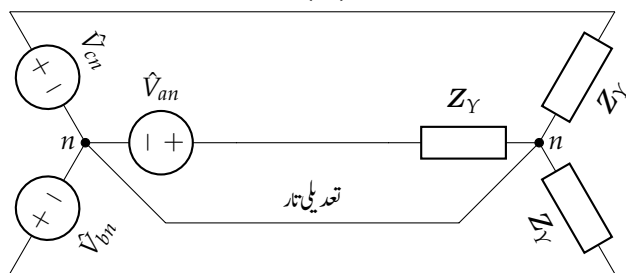
$$\hat{V}_{an}+\hat{V}_{bn}+\hat{V}_{cn}=0 \tag{11.12}$$

شکل 11.5-الف میں تین دوری نظام کے تینوں منبع پر بوجھ لدا دکھایا گیا ہے۔اسی کو شکل-ب میں ستارہ صورت میں دکھایا گیا ہے۔منبع اور بوجھ دونوں ستارہ جڑے ہیں اور انہیں جوڑنے میں چار عدد تار استعمال کئے گئے ہیں لہٰذا اس نظام کو چار تار، ستارہ ستارہ[6] نظام یا YY نظام کہا جاتا ہے۔شاخ a پر نظر ڈالتے ہوئے معلوم ہوتا ہے کہ منبع $\hat{V}_{an}$ کی دوری رو $\hat{I}_a$ ہی منبع سے بوجھ تک تار میں پائے جانے والی رو تار $\hat{I}_a$ ہے۔یوں ستارہ ستارہ نظام کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں مساوات 11.6 کو دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} I_{\text{تار}} &= I_{\text{دوری}} \\ V_{\text{تار}} &= \sqrt{3}V_{\text{دوری}} \end{aligned} \qquad \text{ستارہ ستارہ نظام میں دوری اور تار کے متغیرات کے تعلق} \tag{11.13}$$

متوازن ستارہ بوجھ کی صورت میں $Z_a=Z_b=Z_c=Z_Y$ ہو گا۔ایسی صورت میں شکل 11.5-الف میں

---

[5] ستارہ جوڑ کی شکل حرف Y سے مشابہت رکھتا ہے۔اسی لئے اس کو Y جوڑ بھی کہتے ہیں۔
[6] four-wire, star-star

شکل 11.5: متوازن چار تار، ستارہ ستارہ (YY) نظام۔

تین دوری رو درج ذیل ہوں گی جہاں $\hat{V}_a$ کا زاویہ ہٹاو صفر لیا گیا ہے اور $\frac{V_0}{Z_Y}$ کو I_0 لکھا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_a &= \frac{\hat{V}_a}{\boldsymbol{Z}_Y} = \frac{V_0\angle 0^\circ}{Z_Y\angle\theta_z} = \frac{V_0}{Z_Y}\angle -\theta_z = I_0\angle -\theta_z \\
\hat{I}_b &= \frac{\hat{V}_b}{\boldsymbol{Z}_Y} = \frac{V_0\angle -120^\circ}{Z_Y\angle\theta_z} = \frac{V_0}{Z_Y}\angle -120^\circ - \theta_z = I_0\angle -120^\circ - \theta_z \\
\hat{I}_c &= \frac{\hat{V}_c}{\boldsymbol{Z}_Y} = \frac{V_0\angle 120^\circ}{Z_Y\angle\theta_z} = \frac{V_0}{Z_Y}\angle 120^\circ - \theta_z = I_0\angle 120^\circ - \theta_z
\end{aligned}
\tag{11.14}
$$

شکل 11.5-الف میں منبعوں کے جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مدد سے تعدیلی تار میں رو $\hat{I}_n$ کی مساوات لکھتے ہیں

$$
\hat{I}_n = \hat{I}_a + \hat{I}_b + \hat{I}_c
$$

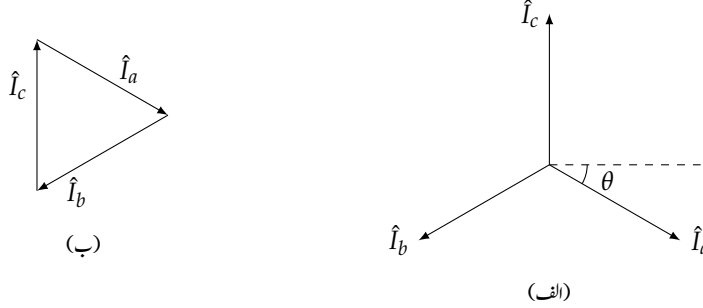
جس میں مساوات 11.14 پر کرتے ہوئے ثابت ہوتا ہے کہ $\hat{I}_n$ صفر کے برابر ہے۔

$$
\hat{I}_n = \hat{I}_a + \hat{I}_b + \hat{I}_c = 0 \qquad \text{متوازن ستارہ ستارہ میں تعدیلی رو صفر ہے} \tag{11.15}
$$

شکل 11.6 میں پیچھے جزو طاقت کی صورت میں ستارہ رو اور ان کا مجموعہ دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ متوازن ستارہ منبع اور متوازن ستارہ بوجھ کی صورت میں تعدیلی رو صفر ہو گی لہٰذا تعدیلی تار اتارنے سے نظام پر کوئی اثر نہیں ہو گا۔ ہاں اگر ایک بوجھ یا ایک منبع کی قیمت تبدیل کر دی جائے تب اس شاخ کی رو تبدیل ہو جائے گی اور یوں تینوں شاخوں کی رو کا مجموعہ صفر نہ رہ پائے گا لہٰذا غیر متوازن صورت میں تعدیلی رو پائی جائے گی۔ تعدیلی تار نہ استعمال کرنے سے تین تار، ستارہ ستارہ[7] نظام حاصل ہوتا ہے۔جیسا مثال 11.2 میں دکھایا گیا ہے، غیر متوازن تین تار، ستارہ ستارہ نظام میں بوجھ کے تینوں شاخوں پر مختلف دباو پائے جائیں گے لہٰذا غیر متوازن نظام میں تعدیلی تار کا استعمال کرنا نہایت اہم ہے۔

متوازن ستارہ ستارہ نظام میں تینوں رو کی قیمت برابر ہوتی ہے جبکہ ان میں زاویائی فاصلہ 120° پایا جاتا ہے۔یوں ہم صرف ایک منبع اور اس کے بوجھ کو حل کرتے ہوئے تمام جوابات اخذ کر سکتے ہیں۔اس نظام میں تینوں تار کی رکاوٹ بھی برابر ہوتی ہے لہٰذا تار کی رکاوٹ کے اثرات شامل کرتے ہوئے بھی صرف ایک دور حل کرنا پڑتا ہے۔چونکہ متوازن ستارہ ستارہ نظام کے تعدیلی تار میں رو صفر رہتی ہے لہٰذا اس تار کی رکاوٹ کا نظام میں دباو اور رو پر کوئی اثر نہیں ہوتا لہٰذا تعدیلی تار کی رکاوٹ غیر اہم ہے۔یوں تعدیلی تار کی رکاوٹ کچھ بھی تصور کی جا سکتی ہے۔ہم تعدیلی تار کی رکاوٹ صفر تصور کریں گے۔

---

[7] three-wire, star-star

شکل 11.6: متوازن منبع اور متوازن بوجھ کی صورت میں تعدیلی رو صفر ہو گی۔

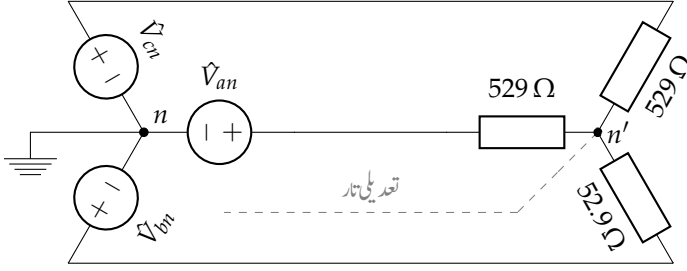
مثال 11.2: گھریلو صارفین کو تعدیلی تار اور ایک زندہ تار کے ذریعہ طاقت فراہم کیا جاتا ہے۔یوں ایک ہی محلے میں کچھ گھرانوں کو $\hat{V}_{an}$ فراہم کیا جائے گا، کچھ کو $\hat{V}_{bn}$ اور کچھ گھرانوں کو $\hat{V}_{cn}$ فراہم کیا جائے گا۔یوں اوسطاً ترسیلی نظام کو متوازن صورت حال نظر آتی ہے۔حقیقت میں گھریلو بوجھ غیر متوازن بوجھ ہے لہٰذا اس کو تعدیلی تار سے جوڑنا ضروری ہے۔آئیں دیکھیں کہ ایسا نہ کرنے کے کیا نتائج ہو سکتے ہیں۔

ٹرانسفارمر کے قریب تعدیلی تار کو زمین میں نمی کی گہرائی تک دھنسا جاتا ہے لہٰذا تعدیلی تار **ٹھنڈی تار** بھی کہلاتی ہے۔بعض اوقات تعدیلی تار کہیں سے ٹوٹ جاتی ہے۔شکل 11.7 میں ایسا ہی دکھایا گیا ہے جہاں ایک گھرانے نے 1 kW کا پمپ چالو کیا ہوا ہے جبکہ بقایا دو گھرانوں نے ایک ایک عدد 100 W کا بلب روشن کیا ہو ہے۔پمپ کو $52.9\,\Omega$ سے اور بلب کو $529\,\Omega$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔دوری موثر دباو $230\,\text{V rms}$ ہے۔گھروں میں تعدیلی تار یعنی نقطہ n' پر دباو دریافت کرتے ہوئے بلب پر دباو حاصل کریں۔

حل:نقطہ n' پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں۔اس نقطے سے رو کو نکلتا ہوا لیا گیا ہے۔

$$\frac{\hat{V}_n' - \hat{V}_{an}}{52.9} + \frac{\hat{V}_n' - \hat{V}_{bn}}{529} + \frac{\hat{V}_n' - \hat{V}_{cn}}{529} = 0$$

اس میں منبع کے دباو پر کرتے ہوئے

$$\frac{\hat{V}_n' - 230\underline{/0^\circ}}{52.9} + \frac{\hat{V}_n' - 230\underline{/-120^\circ}}{529} + \frac{\hat{V}_n - 230\underline{/120^\circ}}{529} = 0$$

شکل 11.7: مثال 11.2 کا دور۔

حل کرتے ہیں۔

$$\hat{V}'_n = 172.5\underline{/-120^\circ}\,\text{V rms}$$

یہاں غور کریں۔عام حالت میں تعدیلی تار پر صفر وولٹ کا دباو ہوتا ہے۔اسی لئے اس کو ٹھنڈی تار کہتے ہیں۔یہاں تعدیلی نقطے پر $172.5\,\text{V rms}$ کا خطرناک دباو پایا جاتا ہے۔آئیں اب بلب پر دباو دیکھیں۔

منبع $\hat{V}_{an}$ کے ساتھ جڑے بلب پر درج ذیل دباو ہو گا۔

$$230\underline{/0^\circ} - 172.5\underline{/-120^\circ} = 349.8\underline{/25^\circ}\,\text{V rms}$$

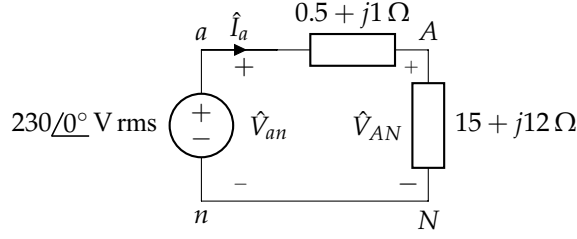
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $230\,\text{V rms}$ پر چلنے والا بلب $349.8\,\text{V rms}$ کا تاب نہ لاتے ہوئے جھلس[8] جائے گا۔

مثال 11.3: متوازن تین دوری ستارہ ستارہ abc نظام میں موثر دوری دباو $230\,\text{V rms}$ ہے جبکہ تار اور بوجھ کے رکاوٹ بالترتیب $0.5 + j1\,\Omega$ اور $15 + j12\,\Omega$ ہیں۔تمام دباو بوجھ اور تار کی رو دریافت کریں۔

حل: شاخ a کو صفر زاویے پر رکھتے ہوئے تین منبع کے دباو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{an} &= 230\underline{/0^\circ}\,\text{V rms}\\
\hat{V}_{bn} &= 230\underline{/-120^\circ}\,\text{V rms}\\
\hat{V}_{acn} &= 230\underline{/120^\circ}\,\text{V rms}
\end{aligned}$$

---

[8] یہ گھرانے خوش قسمت ہیں۔بلب کی جگہ قیمتی کمپیوٹر یا ٹیلی ویژن بھی ہو سکتا تھا۔

شکل 11.8: مثال 11.3 کا دور۔

ستارہ ستارہ نظام کے ایک شاخ کو شکل 11.8 میں دکھایا گیا ہے جہاں سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{I}_a = \frac{230\underline{/0^\circ}}{0.5 + j1 + 15 + j12} = 11.37\underline{/-40^\circ}\,\text{A rms}$$
$$\hat{V}_{AN} = \left(\frac{15 + j12}{0.5 + j1 + 15 + j12}\right) 230\underline{/0^\circ} = 218.4\underline{/-1.3^\circ}\,\text{V rms}$$

ان جوابات کو 120° ہٹاو دیتے ہوئے بقایا جوابات لکھتے ہیں۔

$$\hat{I}_b = 11.37\underline{/-120^\circ - 40^\circ} = 11.37\underline{/-160^\circ}\,\text{A rms}$$
$$\hat{I}_c = 11.37\underline{/+120^\circ - 40^\circ} = 11.37\underline{/80^\circ}\,\text{A rms}$$
$$\hat{V}_{BN} = 218.4\underline{/-120^\circ - 1.3^\circ} = 218.4\underline{/-121.3^\circ}\,\text{V rms}$$
$$\hat{V}_{CN} = 218.4\underline{/+120^\circ - 1.3^\circ} = 218.4\underline{/118.7^\circ}\,\text{V rms}$$

مشق 11.3: متوازن abc ستارہ جڑے منبع میں $\hat{V}_{an} = 100\underline{/180^\circ}$ V ہے۔ دباو تار حاصل کریں۔

جوابات: $\hat{V}_{ab} = 173.2\underline{/-150^\circ}$ V ، $\hat{V}_{ca} = 173.2\underline{/-30^\circ}$ V ، $\hat{V}_{bc} = 173.2\underline{/90^\circ}$ V

مشق 11.4: متوازن abc ستارہ جڑے منبع میں $\hat{V}_{ab}=180\underline{/150^\circ}\,\mathrm{V}$ ہے۔دوری دباو حاصل کریں۔

جوابات: $\hat{V}_{an}=86.6\underline{/90^\circ}\,\mathrm{V}$ ، $\hat{V}_{bn}=86.6\underline{/-30^\circ}\,\mathrm{V}$ ، $\hat{V}_{cn}=86.6\underline{/-150^\circ}\,\mathrm{V}$

مشق 11.5: ستارہ ستارہ abc ترتیب کے نظام میں بوجھ پر دباو $\hat{V}_{AN}=220\underline{/-15.6^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔ستارہ بوجھ کے ایک دور کی رکاوٹ $4+j2\,\Omega$ اور تار کی رکاوٹ $1+j1.5\,\Omega$ ہے۔ستارہ منبع کی دوری دباو حاصل کریں۔

جوابات: $\hat{V}_{an}=300\underline{/-7.2^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ، $\hat{V}_{bn}=300\underline{/-127.2^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ، $\hat{V}_{cn}=300\underline{/112.8^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$

مشق 11.6: متوازن ستارہ بوجھ کے ایک دور کی رکاوٹ $0.2-j0.12\,\Omega$ ہے۔اس کو متوازن ستارہ منبع سے طاقت فراہم کی جاتی ہے جس کا دباو دور $110\,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔نظام کی ترتیب abc ہے۔ دور a کا زاویہ ہٹاو صفر لیتے ہوئے تار کی رو دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_a=471\underline{/31^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$ ، $\hat{I}_b=471\underline{/-89^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$ ، $\hat{I}_c=471\underline{/151^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$

مشق 11.7: متوازن ستارہ ستارہ نظام میں تاروں میں کل ضیاع $962\,\mathrm{W}$ ہے۔بوجھ کا دوری دباو $v_{AN} = 240\underline{/38^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ جبکہ اس کا آگے جزو طاقت 0.69 ہے۔تار کی رکاوٹ $1.2 + j1.5\,\Omega$ ہے۔بوجھ کی دوری رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $10.13 - j10.63\,\Omega$

11.3 تین دوری تکونی(Δ) دباو

شکل 11.9-الف میں تین عدد منبع کو تین تاروں کے مابین **تکونی**[9] جوڑا گیا ہے۔مساوات 11.6 دباو تار اور دوری دباو کا تعلق دیتا ہے۔یوں اگر شکل-الف کے تکونی جڑے منبع کے دباو

$$\begin{aligned}\hat{V}_{ab} &= V_L\underline{/0^\circ}\\ \hat{V}_{bc} &= V_L\underline{/-120^\circ}\\ \hat{V}_{ca} &= V_L\underline{/+120^\circ}\end{aligned} \tag{11.16}$$

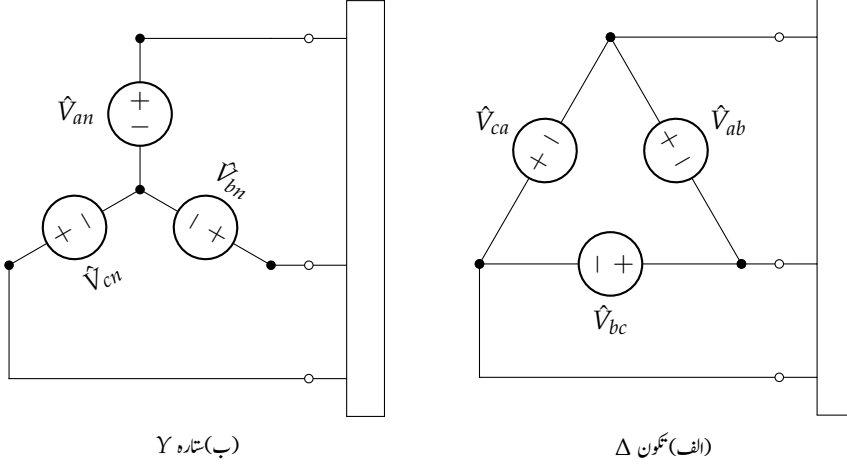
ہوں جہاں V_L دباو تار کا حیطہ ہے تب شکل-ب میں دکھائے گئے ان کے مساوی ستارہ منبع درج ذیل ہوں گے جہاں ستارہ جڑے منبع کے دباو کا حیطہ V_p لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_{an} &= \frac{V_L}{\sqrt{3}}\underline{/-30^\circ} = V_p\underline{/-30^\circ}\\ \hat{V}_{bn} &= \frac{V_L}{\sqrt{3}}\underline{/-150^\circ} = V_p\underline{/-150^\circ}\\ \hat{V}_{cn} &= \frac{V_L}{\sqrt{3}}\underline{/-270^\circ} = V_p\underline{/90^\circ}\end{aligned} \tag{11.17}$$

یوں جہاں بھی تکونی منبع نسب ہو، اس کی جگہ مساوی ستارہ منبع نسب کرتے ہوئے دور کو ستارہ منبع کے تمام طریقوں سے حل کیا جا سکتا ہے۔آئیں اس پر ایک مثال دیکھیں۔

کسی بھی تین عدد منبع کے منفی سر آپس میں جوڑنے سے ستارہ منبع حاصل ہو گا۔تین عدد منبع کو تکونی جوڑتے وقت چوکس رہنا ضروری ہے۔تکونی جوڑ میں ایک منبع کا منفی سر دوسرے منبع کے مثبت سر سے جڑتا ہے۔شکل 11.10-الف میں تین متوازن بدلتا رو منبع کو تکونی جوڑا گیا ہے۔یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ تین متوازی بدلتا رو منبع کو

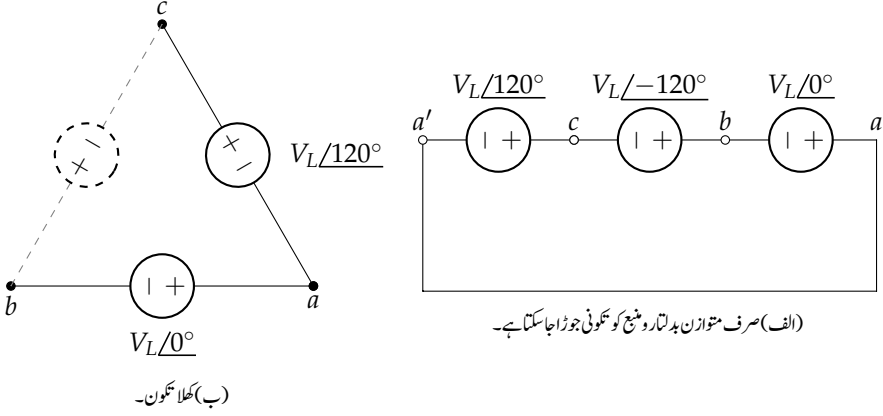
---

[9] delta connected, Δ

شکل 11.9: ستارہ اور تکونی دباو۔

سلسلہ وار جوڑتے ہوئے ابتدائی سر a' اور اختتامی سر a کے مابین صفر وولٹ دباو پایا جاتا ہے لہٰذا انہیں آپس میں جوڑا کر تکونی منبع حاصل کیا جاتا ہے۔یہاں یہ تسلی بھی کر لیں کہ V_L دباو کے یک سمت منبع کی صورت میں a' اور a کے مابین تین گنا دباو $(3V_L)$ پایا جائے گا لہٰذا انہیں کسی بھی صورت آپس میں نہیں جوڑا جا سکتا ہے۔یہاں یہ بھی تسلی کر لیں کہ تینوں منبع کے دباو کی مطلق قیمت بالکل برابر ہونا ضروری ہے اور ان میں $120°$ زاویائی فرق بھی لازم ہے۔آپ یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ تکونی منبع میں کسی ایک منبع کے الٹ جڑنے سے خطرناک نتائج رو نما ہو سکتے ہیں۔

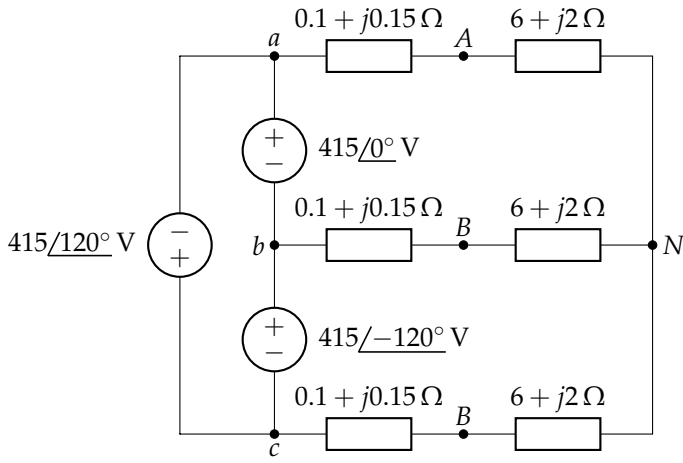
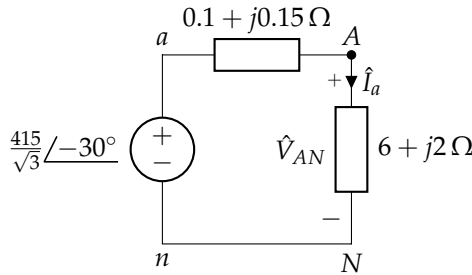
تکونی منبع میں ایک دلچسپ بات یہ ہے کہ اس میں سے کسی ایک منبع کے ہٹانے سے دباو تار تبدیل نہیں ہوتے۔شکل 11.10-ب میں نقطہ دار لکیر سے دکھائے گئے منبع کو ہٹاتے ہوئے تسلی کر لیں کہ تینوں دباو تار تبدیل نہیں ہوتے۔شکل-ب میں کھلا تکون[10] دکھایا گیا ہے۔چونکہ طاقت کی فراہمی منبع سے ہوتی ہے لہٰذا کھلا تکون پورے تکونی منبع کے $\frac{2}{3}$ گنا طاقت فراہم کرے گا۔

مشق 11.8: شکل 11.10-الف میں ثابت کریں کہ a' تا a دباو صفر کے برابر ہے۔

[10] open delta

شکل 11.10: تکونی منبع دباو۔

مشق 11.9: شکل 11.10-ب میں منبع $\hat{V}_{bc}$ نہیں پایا جاتا ہے۔بقایا دو منبع کے دباو سے نقطہ c تا b دباو $\hat{V}_{bc}$ حاصل کریں۔

جواب: $V_L\angle -120^\circ$

مثال 11.4: شکل 11.11-الف میں تکونی منبع کی جگہ مساوی ستارہ منبع نسب کرتے ہوئے تار کی رو اور بوجھ پر دباو حاصل کریں۔

شکل 11.11: مثال 11.4 کا دور۔

حل: شکل-ب میں تکونی منبع کا مساوی ستارہ منبع استعمال کرتے ہوئے ایک شاخ دکھایا گیا ہے جس سے درج ذیل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\hat{I}_a = \frac{\frac{415}{\sqrt{3}}\underline{/-30^\circ}}{0.1 + j0.15 + 6 + j2} = 37\underline{/-49^\circ}\,\text{A}$$

$$\hat{V}_{AN} = \frac{415}{\sqrt{3}}\underline{/-30^\circ}\left(\frac{6 + j2}{0.1 + j0.15 + 6 + j2}\right) = 234\underline{/-31^\circ}\,\text{V}$$

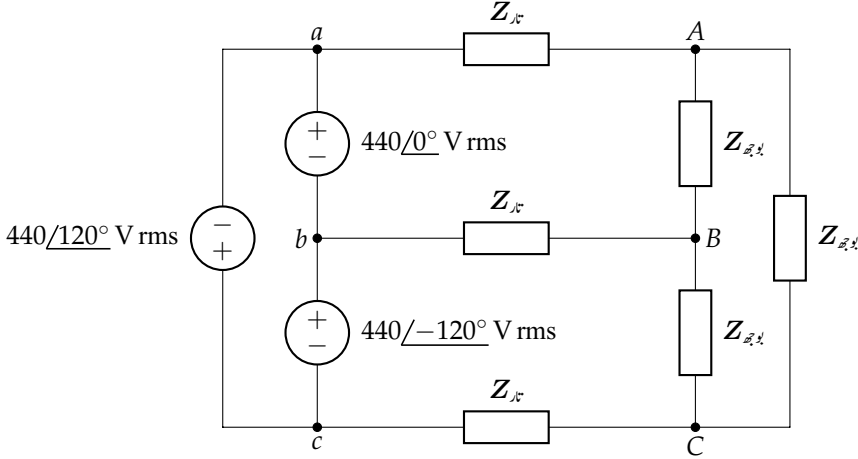
یوں بوجھ پر دباو تار $\sqrt{3}(234) = 405\,\text{V}$ ہو گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ منبع پر دباو تار کی قیمت بوجھ پر دباو تار سے زیادہ ہے لہٰذا دباو کی بات کرتے وقت مقام کی وضاحت ضروری ہے۔

مشق 11.10: شکل 11.11 میں تار کی رکاوٹ $0.8 + j1\,\Omega$ اور بوجھ کی دوری رکاوٹ $14 - j6\,\Omega$ جبکہ تکونی منبع کا دباو $\hat{V}_{ab} = 66\underline{/0^\circ}\,\text{V}$ لیتے ہوئے بوجھ کی رو اور دوری دباو حاصل کریں۔

جوابات: $\hat{I}_a = 2.4\underline{/-11^\circ}\,\text{A}$ ، $\hat{V}_{AN} = 37\underline{/-35^\circ}\,\text{V}$

مشق 11.11: شکل 11.12 میں $Z_{\text{تار}} = 0.4 + j0.2\,\Omega$ اور $Z_{\text{بوجھ}} = 12 + j4\,\Omega$ ہیں۔ بوجھ پر موثر دباو تار دریافت کریں۔

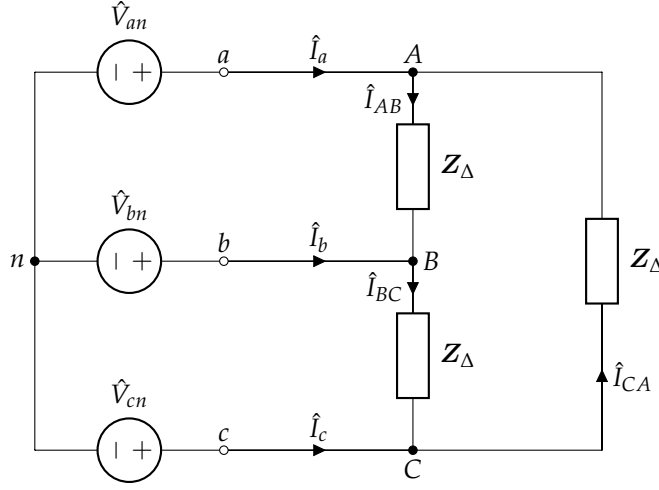
جواب: $V_L = 398\,\text{V rms}$

شکل 11.12: مشق 11.11 کا تکون تکون $\Delta\Delta$ دور۔

11.4 تکونی بوجھ

شکل 11.13 میں ستارہ منبع کے ساتھ تکونی بوجھ جوڑا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تکونی بوجھ یا تکونی منبع کی صورت میں تعدیلی تار استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے لہٰذا یہ تین تار کا نظام ہو گا۔بوجھ کے ایک شاخ پر دباو تار پایا جاتا ہے۔یوں اگر ستارہ دباو درج ذیل ہوں

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_{an} &= V_p\underline{/0^\circ}\\
\hat{V}_{bn} &= V_p\underline{/-120^\circ}\\
\hat{V}_{cn} &= V_p\underline{/+120^\circ}
\end{aligned}
$$

تب دباو تار درج ذیل ہوں گے جہاں تار کی رکاوٹ نہ ہونے کی وجہ سے منبع اور بوجھ پر برابر دباو تار پایا جاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_{ab} &= \sqrt{3}V_p\underline{/30^\circ} = V_L\underline{/30^\circ} = \hat{V}_{AB}\\
\hat{V}_{bc} &= \sqrt{3}V_p\underline{/-90^\circ} = V_L\underline{/-90^\circ} = \hat{V}_{BC}\\
\hat{V}_{ca} &= \sqrt{3}V_p\underline{/-210^\circ} = V_L\underline{/150^\circ} = \hat{V}_{CA}
\end{aligned}
$$

شکل 11.13: تین تار، ستارہ تکونی نظام۔

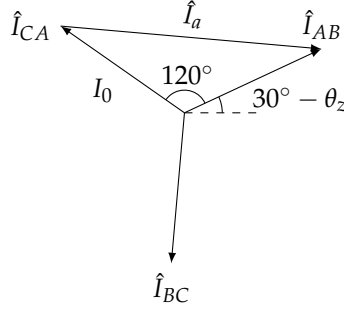
شکل 11.13 کو دیکھ کر

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_{AB} &= \frac{\hat{V}_{AB}}{Z_\Delta} = \frac{V_L\angle 30^\circ}{Z\angle\theta_z} = I_0\angle 30^\circ - \theta_z \\
\hat{I}_{BC} &= \frac{\hat{V}_{BC}}{Z_\Delta} = \frac{V_L\angle -90^\circ}{Z\angle\theta_z} = I_0\angle -90^\circ - \theta_z \\
\hat{I}_{CA} &= \frac{\hat{V}_{CA}}{Z_\Delta} = \frac{V_L\angle 150^\circ}{Z\angle\theta_z} = I_0\angle 150^\circ - \theta_z
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں $Z_\Delta = Z\angle\theta_z$ ہے اور مساوات میں $\frac{V_L}{Z} = I_0$ لکھا گیا ہے۔درج بالا رو آپس میں 120° زاویائی فاصلے پر پائے جاتے ہیں جبکہ تینوں رو کی مطلق قیمت برابر ہے۔ تکونی بوجھ کی رو کو شکل 11.14 میں دکھایا گیا ہے۔

درج بالا حاصل کردہ بوجھ کی رو استعمال کرتے ہوئے تار کی رو حاصل کرتے ہیں۔شکل 11.13 کو دیکھ کر کرخوف مساوات رو سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$
\hat{I}_a = \hat{I}_{AB} - \hat{I}_{CA}
$$

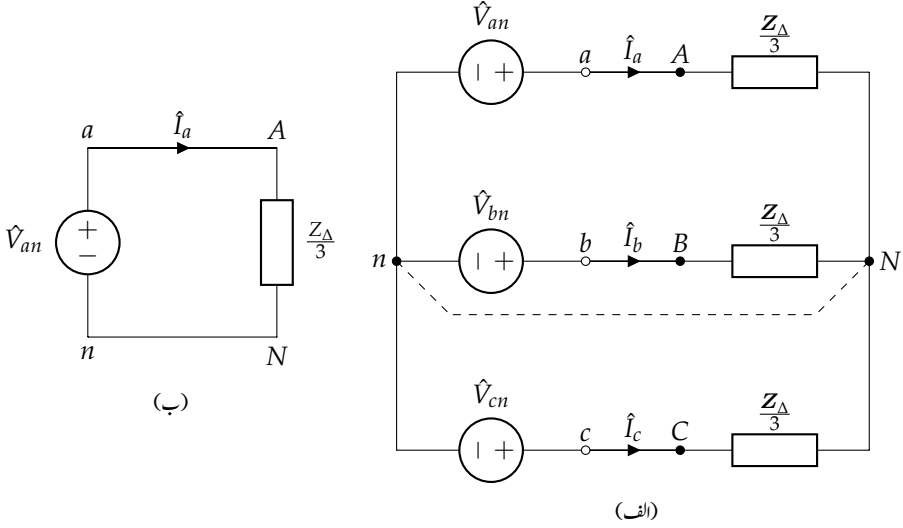
جسے شکل 11.14 میں ترسیمی طریقے سے حل کرنا دکھایا گیا ہے۔اس شکل میں دکھائے گئے تکون کا زاویہ 120° اور اس کے دونوں اطراف I_0 کے برابر ہیں۔یوں تار کے رو کا حیطہ کوسائن کے کلیے سے درج ذیل حاصل ہوتا

شکل 11.14: تکونی بوجھ کی رو سے تار کی رو کا حصول۔

ہے

$$I_a = \sqrt{I_0^2 + I_0^2 - 2I_0^2 \cos 120^\circ} = \sqrt{3}I_0$$

جبکہ اس کا زاویہ $-\theta_z$ ہے لہٰذا تار کی رو $\hat{I}_a = \sqrt{3}I_0\underline{/-\theta_z}$ ہے۔بقایا دو تاروں کی رو بھی اسی طرح حاصل کی جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_a &= \sqrt{3}I_0\underline{/-\theta_z}\\ \hat{I}_b &= \sqrt{3}I_0\underline{/-120^\circ - \theta_z}\\ \hat{I}_c &= \sqrt{3}I_0\underline{/+120^\circ - \theta_z}\end{aligned} \tag{11.18}$$

شکل 11.13 میں تکونی بوجھ کی جگہ اس کا مساوی ستارہ بوجھ نسب کرنے سے شکل 11.15-الف حاصل ہوتا ہے۔صفحہ 98 پر ستارہ-تکون تبادلہ پر غور کیا گیا ہے جہاں مساوات 2.61 متوازن تکونی مزاحمتی بوجھ کا مساوی ستارہ بوجھ دیتا ہے۔یہی مساوات متوازن رکاوٹی بوجھ کے لئے بھی قابل استعمال ہے لہٰذا متوازن تکونی بوجھ کا مساوی ستارہ بوجھ $\frac{Z_\Delta}{3}$ ہے۔تکونی جوڑ میں تعدیلی نقطہ N نہیں پایا جاتا ہے۔شکل 11.15-الف میں مساوی ستارہ بوجھ کا تعدیلی نقطہ N دکھایا گیا ہے جسے ستارہ منبع کے تعدیلی نقطہ n کے ساتھ سے جوڑا گیا ہے۔تعدیلی تار کو نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ہم جانتے ہیں کہ متوازن نظام میں تعدیلی تار میں رو صفر کے برابر ہوتی ہے اور اس کو استعمال کرنے یا نہ کرنے سے جوابات پر کوئی اثر نہیں ہوتا۔موجودہ دور میں تعدیلی تار کے استعمال سے دور کو حل کرنے میں مدد ملتی ہے لہٰذا اس کو استعمال کیا گیا ہے۔شکل-ب میں ستارہ ستارہ دور کی ایک شاخ دکھائی گئی ہے جس سے تار کی

شکل 11.15: تکونی بوجھ کی جگہ مساوی ستارہ بوجھ نسب کیا گیا ہے۔

رو لکھتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_a &= \frac{\hat{V}_{an}}{\frac{Z_\Delta}{3}}\\
&= \frac{3V_p\underline{/0^\circ}}{Z\underline{/\theta_z}}\\
&= \frac{\sqrt{3}V_L\underline{/-\theta_z}}{Z}\\
&= \sqrt{3}I_0\underline{/-\theta_z}
\end{aligned}
$$

جہاں $V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$ اور $\frac{V_L}{Z} = I_0$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ تکونی بوجھ کا مساوی ستارہ بوجھ استعمال کرنے سے دور حل کرنے میں مدد ملتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ تین دوری نظام کو حل کرتے ہوئے پہلے ستارہ ستارہ دور حاصل کیا جاتا ہے۔اس ستارہ ستارہ دور کو حل کیا جاتا ہے اور آخر میں درکار جوابات ستارہ تکونی تبادلہ سے حاصل کئے جاتے ہیں۔

مثال 11.5: متوازی تکونی بوجھ کے ایک شاخ کی رکاوٹ $5+j3\,\Omega$ ہے۔اس پر متوازن دباو تار لاگو کی جاتی ہے۔بوجھ کے تمام شاخوں کی رو اور تمام تاروں کی رو دریافت کریں۔ستارہ منبع کے ایک شاخ کا دباو $\hat{V}_{an}=240\underline{/42^\circ}\,\mathrm{V}$ ہے۔

حل:دباو تار درج ذیل ہیں جہاں تار کی رکاوٹ نہ ہونے کی وجہ سے منبع اور بوجھ کے دباو تار برابر ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_{ab}&=240\sqrt{3}\underline{/72^\circ}=\hat{V}_{AB}\\
\hat{V}_{bc}&=240\sqrt{3}\underline{/-48^\circ}=\hat{V}_{BC}\\
\hat{V}_{ca}&=240\sqrt{3}\underline{/192^\circ}=\hat{V}_{CA}
\end{aligned}
$$

یوں بوجھ کے شاخوں کی رو درج ذیل ہو گی۔

$$
\hat{I}_{AB}=\frac{\hat{V}_{AB}}{5+j3}=71.3\underline{/41^\circ}\,\mathrm{A}
$$

بقایا دو شاخوں کی رو $\mp 120^\circ$ زاویائی فاصلے پر ہو گی یعنی

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_{BA}&=71.3\underline{/-79^\circ}\,\mathrm{A}\\
\hat{I}_{CA}&=71.3\underline{/161^\circ}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

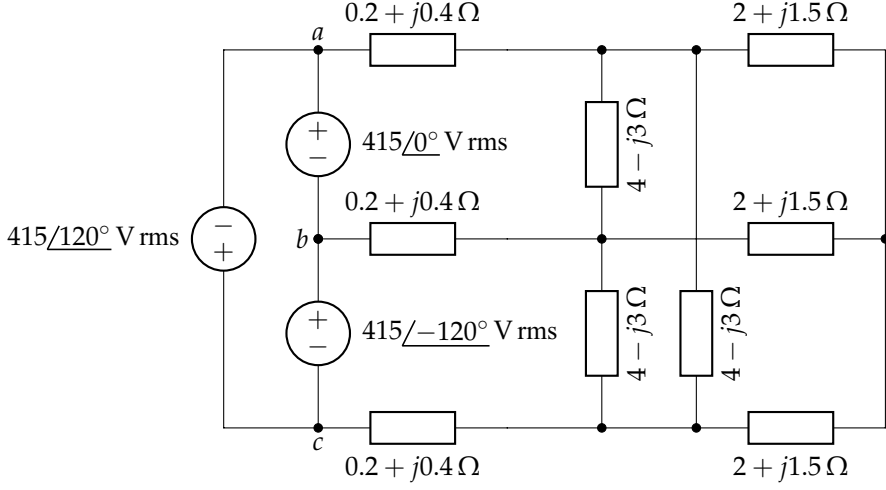
تار کی رو حاصل کرنے کی خاطر ستارہ بوجھ استعمال کرتے ہیں۔

$$
\boldsymbol{Z}_Y=\frac{\boldsymbol{Z}_\Delta}{3}=\frac{5+j3}{3}=\frac{5}{3}+j1\,\Omega
$$

یوں تار کی رو درج ذیل ہو گی۔

$$
\hat{I}_a=\frac{\hat{V}_{an}}{\boldsymbol{Z}_Y}=\frac{240\underline{/42^\circ}}{\frac{5}{3}+j1}=123.5\underline{/11^\circ}\,\mathrm{A}
$$

بقایا دو تاروں کی رو $\mp 120^\circ$ زاویائی فاصلے پر ہوں گی۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_b&=123.5\underline{/-109^\circ}\,\mathrm{A}\\
\hat{I}_c&=123.5\underline{/131^\circ}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

شکل 11.16: مشق 11.12 کا دور۔

مشق 11.12: شکل 11.16 میں تکونی منبع کے ساتھ $4 - j3\,\Omega$ کا تکونی بوجھ اور $2 + j1.5\,\Omega$ کا ستارہ بوجھ متوازی جڑے ہیں۔تار کی رو دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_a = 166.5\underline{/-38.7^\circ}\,\text{A rms}$ ، $\hat{I}_b = 166.5\underline{/-158.7^\circ}\,\text{A rms}$ ، $\hat{I}_c = 166.5\underline{/81.3^\circ}\,\text{A rms}$

11.5 طاقت کے کلیات

چاہے بوجھ ستارہ جڑا ہو یا تکونی، فی دور حقیقی طاقت اور متعاملی طاقت درج ذیل ہوں گے جہاں V_p موثر دوری دباو، I_p موثر دوری رو اور θ ان کے مابین زاویہ یعنی زاویہ رکاوٹ θ_z ہیں۔

$$
\begin{aligned}
P_p &= V_p I_p \cos\theta \\
Q_p &= V_p I_p \sin\theta
\end{aligned}
\tag{11.19}
$$

ستارہ جڑے نظام میں $I_p = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$ اور $V_p = V_L$ جبکہ تکونی نظام میں $V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$ اور $I_p = I_L$ لکھے جا سکتے ہیں جہاں V_L دباو تار اور I_L رو تار ہیں۔ اس طرح مساوات 11.20 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
P_p &= \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \cos\theta \\
Q_p &= \frac{V_L I_L}{\sqrt{3}} \sin\theta
\end{aligned} \tag{11.20}
$$

جس سے تینوں دور کی کل طاقت درج ذیل حاصل ہوتی ہے جہاں یاد رہے کہ θ درحقیقت کسی ایک شاخ کے بوجھ کا زاویہ θ_z ہے۔

$$
\begin{aligned}
P_T &= 3P_p = \sqrt{3} V_L I_L \cos\theta \\
Q_T &= 3Q_p = \sqrt{3} V_L I_L \sin\theta
\end{aligned} \tag{11.21}
$$

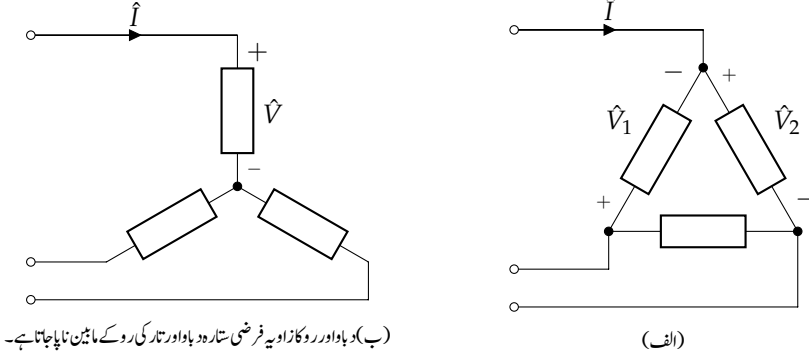
یوں مخلوط طاقت کی مطلق قیمت اور زاویہ درج ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
S_T &= \sqrt{P_T^2 + Q_Y^2} \\
&= \sqrt{3} V_L I_L \\
\underline{/\mathbf{S_T}} &= \theta
\end{aligned} \tag{11.22}
$$

مثال 11.6: شکل 11.17-الف میں تکونی بوجھ دکھایا گیا ہے۔ جزو طاقت کے لئے دباو اور رو کے مابین زاویائی فرق جاننا ضروری ہے۔ رو $\hat{I}$ کا زاویہ دباو $\hat{V}_1$ سے ناپا جائے گا کہ دباو $\hat{V}_2$ سے ناپا جائے گا؟

حل: تار کی رو کا زاویہ ان دونوں دباو سے نہیں ناپا جاتا بلکہ ستارہ دباو کے ساتھ ناپا جاتا ہے۔ شکل-ب میں درست ستارہ شاخ کی نشاندہی کی گئی ہے۔ تکونی بوجھ کی صورت میں فرضی ستارہ دباو دریافت کرتے ہوئے صحیح زاویہ ناپا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ جزو طاقت کا زاویہ حقیقت میں بوجھ کے رکاوٹ کا زاویہ ہے۔

(ب) دباو اور رو کا زاویہ فرضی ستارہ دباو اور تار کی رو کے مابین ناپا جاتا ہے۔

(الف)

شکل 11.17: تین دوری نظام میں جزو طاقت۔

مثال 11.7: ایک ستارہ تکونی نظام میں بوجھ کا امالی زاویہ $34°$ اور دباو تار $400\,\mathrm{V\,rms}$ ہیں۔ بوجھ کا حقیقی طاقت $3\,\mathrm{kW}$ ہے۔ ہمیں تار کی رو اور تکونی بوجھ کی رکاوٹ درکار ہے۔

حل: مساوات 11.21 سے رو تار حاصل کرتے ہیں۔

$$I_L = \frac{P_T}{\sqrt{3}V_L \cos\theta} = \frac{3000}{\sqrt{3}400\cos 34°} = 5.2231\,\mathrm{A\,rms}$$

یوں تکونی بوجھ کی شاخ میں درج ذیل رو پائی جائے گی۔

$$I_\Delta = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \frac{5.2231}{\sqrt{3}} = 3.0156\,\mathrm{A\,rms}$$

اس طرح تکونی بوجھ کی ایک شاخ کے رکاوٹ کی مطلق قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$|\boldsymbol{Z}_\Delta| = \frac{V_L}{I_\Delta} = \frac{400}{3.0156} = 132.64\,\Omega$$

چونکہ امالی بوجھ کا زاویہ $34°$ ہے للہذا بوجھ کی رکاوٹ درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{Z}_\Delta = 132.64\underline{/34°} = 110 + j74\,\Omega$$

مثال 11.8: ستارہ ستارہ نظام میں منبع کا دوری دباو $200\,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔تار کی رکاوٹ $0.5+j0.8\,\Omega$ اور بوجھ کے ایک شاخ کی رکاوٹ $10+j4\,\Omega$ ہے۔بوجھ کے ایک شاخ پر حقیقی اور متعاملی طاقت دریافت کریں۔منبع کی کل حقیقی، متعاملی اور مخلوط طاقت دریافت کریں۔

حل:ہم حزب معمول $\hat{V}_{an}=200\underline{/0^\circ}\,\mathrm{rms}$ لیتے ہیں۔تار کی رو اور بوجھ کا دوری دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I}_a=\frac{200\underline{/0^\circ}}{0.5+j0.8+10+j4}=17.323\underline{/-24.567^\circ}\,\mathrm{rms}$$

$$\hat{V}_{AN}=200\underline{/0^\circ}\left(\frac{10+j4}{0.5+j0.8+10+j4}\right)=186.578\underline{/-2.766^\circ}\,\mathrm{rms}$$

یوں بوجھ کے ایک شاخ کی مخلوط طاقت

$$\boldsymbol{S}_{\text{بوجھ}}=\hat{V}_{AN}\hat{I}_a^*=(186.578\underline{/-2.766^\circ})(17.323\underline{/-24.567^\circ})=3000+j1200\,\mathrm{V\,A}$$

ہے یعنی بوجھ کے ایک شاخ کا حقیقی طاقت $3\,\mathrm{kW}$ اور متعاملی طاقت $1.2\,\mathrm{kvar}$ ہیں۔

منبع کے ایک شاخ پر مخلوط طاقت حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{S}_{\text{منبع}}=\hat{V}_{an}\hat{I}_a^*=(200\underline{/0^\circ})(17.323\underline{/-24.567^\circ})=3151+j1400\,\mathrm{V\,A}$$

اس طرح منبع کا کل حقیقی طاقت $9.453\,\mathrm{kW}$ ، کل متعاملی طاقت $4.2\,\mathrm{kvar}$ اور کل ظاہری طاقت $10.344\,\mathrm{kV\,A}$ ہے۔

مثال 11.9: تین دوری abc منبع سے درج ذیل بوجھ کو طاقت فراہم کی جاتی ہے۔

- پہلا بوجھ: $15\,\mathrm{kW}$ امالی طاقت جس کا جزو طاقت 0.83 ہے۔
- دوسرا بوجھ: $6\,\mathrm{kW}$ مزاحمت بوجھ۔

- تیسرا بوجھ: $10\,\mathrm{kV\,A}$ برق گیر بوجھ جس کا جزو طاقت 0.92 ہے۔

بوجھ پر دباو تار $425\,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔ تار کی رو دریافت کریں اور تمام بوجھ کا مجموعی جزو طاقت حاصل کریں۔

حل: دی گئی معلومات سے مخلوط طاقت لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_1 &= 15000 + j1080\\
\boldsymbol{S}_2 &= 6000\\
\boldsymbol{S}_3 &= 9200 - j3919
\end{aligned}$$

اس سے کل مخلوط طاقت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} &= 30200 + j6161\\
&= 30822\underline{/11.53^\circ}\,\mathrm{V\,A}
\end{aligned}$$

یوں کل بوجھ کا امالی جزو طاقت اور رو تار درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf} &= \cos(11.53^\circ) = 0.98\\
I_L &= \frac{|\boldsymbol{S}|}{\sqrt{3}V_L}\\
&= \frac{30822}{425\sqrt{3}}\\
&= 41.87\,\mathrm{A\,rms}
\end{aligned}$$

مثال 11.10: مثال 11.9 میں تار کی رکاوٹ $0.06 + j0.08\,\Omega$ لیتے ہوئے منبع پر دباو تار اور جزو طاقت حاصل کریں۔

حل: تینوں ترسیلی تار کی کل مخلوط طاقت دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}_{\text{تار}} &= 3I_L^2\boldsymbol{Z}_{\text{تار}}\\
&= 3(41.87^2)(0.06 + j0.08)\\
&= 315.557 + j420.743
\end{aligned}$$

یوں منبع کی مخلوط طاقت حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\text{منبع}} &= \boldsymbol{S}_{\text{بوجھ}} + \boldsymbol{S}_{\text{تار}}\\ &= 30200 + j6161 + 315.557 + j420.743\\ &= 31\,217\underline{/12.17^\circ}\end{aligned}$$

منبع پر دباو تار حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}V_{L\text{منبع}} &= \frac{S_{\text{منبع}}}{\sqrt{3}I_L}\\ &= \frac{31\,217}{\sqrt{3}(41.87)}\\ &= 430\,\text{V rms}\end{aligned}$$

منبع کے مخلوط طاقت کے زاویے سے امالی جزو طاقت لکھتے ہیں۔

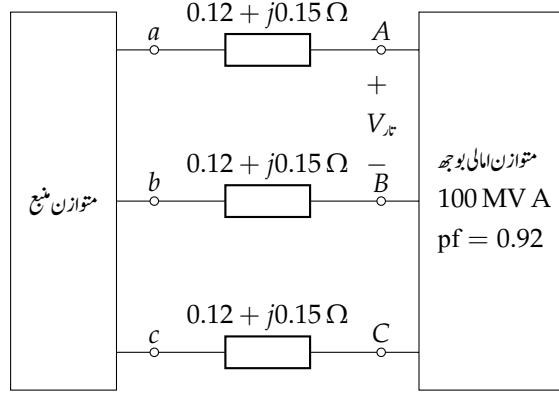
$$\text{pf} = \cos 12.17^\circ = 0.977$$

مثال 11.11: شکل 11.18 میں متوازن تین دوری نظام دکھایا گیا ہے۔تار میں کل ضیاع کو بوجھ پر $11\,\text{kV rms}$ دباو تار اور $133\,\text{kV rms}$ دباو تار کی صورت میں دریافت کریں۔

حل: پہلے $11\,\text{kV rms}$ پر رو تار اور تار میں ضیاع دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}I_L &= \frac{S}{\sqrt{3}V_L} = \frac{100\times 10^6}{\sqrt{3}(11\,000)} = 5248\,\text{A rms}\\ P_{\text{تار}} &= 3I_L^2R_{\text{تار}} = 3(5248^2)(0.12) = 9.91\,\text{MW}\end{aligned}$$

اب $133\,\text{kV rms}$ پر رو تار اور تار میں ضیاع دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}I_L &= \frac{S}{\sqrt{3}V_L} = \frac{100\times 10^6}{\sqrt{3}(133\,000)} = 434\,\text{A rms}\\ P_{\text{تار}} &= 3I_L^2R_{\text{تار}} = 3(434^2)(0.12) = 68\,\text{kW}\end{aligned}$$

شکل 11.18: مثال 11.11 کا دور۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ دباو پر طاقت کی ترسیل انتہائی زیادہ سودمند ثابت ہوتی ہے۔یہی وجہ ہے کہ طاقت کی ترسیل زیادہ سے زیادہ ممکنہ دباو پر کی جاتی ہے۔

ہمارے ملک پاکستان میں برقی طاقت کا بیشتر حصہ پانی کے ڈیم سے حاصل کیا جاتا ہے۔یہ ڈیم عموماً شہروں سے دور پائے جاتے ہیں۔ڈیم پر نسب **دباو بڑھاتا ٹرانسفارمر**[11] پیدا کردہ طاقت کے دباو تار کو بڑھا کر 133 kV rms یا اس سے بھی زیادہ کرتا ہے۔ترسیل کے بعد شہر میں **دباو گھٹاتا ٹرانسفارمر**[12] دباو تار کو گھٹا کر 11 kV rms کرتا ہے۔شہر کے اندر طاقت کی ترسیل 11 kV rms کے نسبتاً کم دباو پر ہوتی ہے۔آپ کے گھر کے قریب دباو گھٹاتا ٹرانسفارمر 400 V rms دباو تار پیدا کرتا ہے جو آپ کو مہیا کا جاتا ہے۔

مشق 11.13: ستارہ ستارہ نظام میں بوجھ کو کل 42 kW طاقت 0.86 امالی جزو طاقت پر فراہم کی جا رہی ہے۔بوجھ پر دباو تار 440 V rms ہے۔ بوجھ کے ایک شاخ کی رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $3.96\underline{/30.68^\circ}\,\Omega$

step up transformer[11]
step down transformer[12]

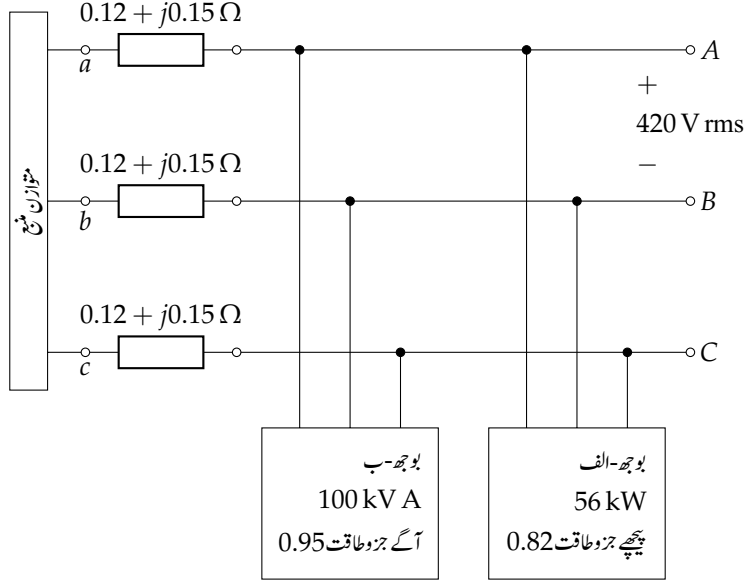
مشق 11.14: ستارہ ستارہ نظام $55\,\mathrm{kV\,A}$ ، امالی جزو طاقت 0.64 اور $22\,\mathrm{kV\,A}$ ، امالی جزو طاقت 0.78 کے بوجھوں کو طاقت فراہم کرتا ہے۔ بوجھ پر دباو تار $560\,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔ تار کی رو دریافت کریں۔

جواب: $79\,\mathrm{A\,rms}$

مشق 11.15: شکل 11.19 میں رو تار اور طاقت منبع دریافت کریں۔

جوابات: $468.8\,\mathrm{V\,rms}$ ، 0.987 پیچھے۔

مثال 11.12: کسی بھی ملک میں متعدد جنریٹر متوازی جوڑتے ہوئے پورے ملک کو طاقت فراہم کی جاتی ہے۔ ان جنریٹروں کی تعداد سیکڑوں یا ہزاروں میں ہو سکتی ہے اور ان کے درمیان فاصلہ سیکڑوں کلومیٹر ہو سکتا ہے۔ پاکستان میں تمام ڈیم اور دیگر جنریٹر قومی ترسیلی نظام سے جڑے ہیں۔ تمام جنریٹروں کی تعدد ٹھیک $50\,\mathrm{Hz}$ ہونا لازم ہے۔ اس قومی نظام اور کسی ایک جنریٹر کے مابین زاویائی فرق سے طاقت کے بہاو کی سمت قابو کی جاتی ہے۔

شکل 11.20 میں $\hat{V}_{ab} = 11000\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ اور $\hat{V}_{mn} = 11000\underline{/6^\circ}\,\mathrm{V\,rms}$ ہیں۔ طاقت کا بہاو کس جانب کو ہے؟

شکل 11.19: مشق 11.15 کا دور۔

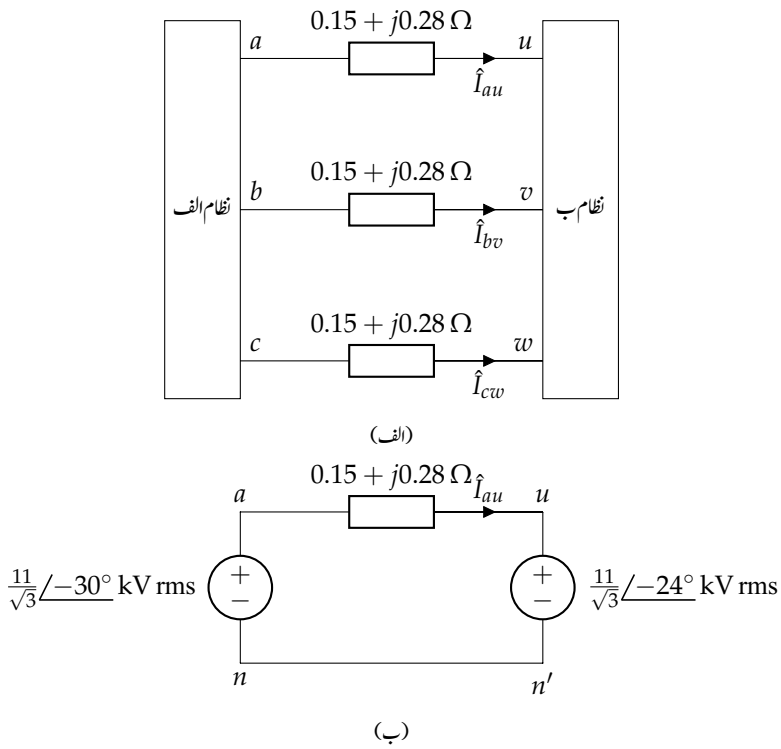
حل: آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دونوں نظام کے دباو کے حیطے برابر ہیں۔ شکل-ب میں ستارہ ستارہ کا ایک شاخ دکھایا گیا ہے جس سے رو لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_{au} &= \frac{\hat{V}_{an} - \hat{V}_{un'}}{0.01 + j0.02} \\
&= \frac{\frac{11000}{\sqrt{3}}\angle{-30^\circ} - \frac{11000}{\sqrt{3}}\angle{-24^\circ}}{0.15 + j0.28} \\
&= 2093\angle{181.18^\circ}\,\text{A}
\end{aligned}
$$

یوں نظام-ب کو درج ذیل کل اوسط طاقت فراہم کی جا رہی ہے۔

$$
\begin{aligned}
P_{\text{ب}} &= \sqrt{3} V_{uv} I_{au} \cos(\theta_{V_{un'}} - \theta_{I_{au}}) \\
&= \sqrt{3}(11000)(2093)\cos(-24^\circ - 181.18^\circ) \\
&= -36.1\,\text{MW}
\end{aligned}
$$

منفی جواب کا مطلب ہے کہ نظام-ب در حقیقت طاقت پیدا کر رہا ہے اور نظام-الف طاقت جذب کر رہا ہے۔ نظام-

شکل 11.20: مثال 11.12 کا دور۔

الف کو فراہم طاقت حاصل کرنے کی خاطر رو کی سمت الٹاتے ہیں۔

$$\hat{I}_{ua} = -\hat{I}_{au} = 2093\angle 1.18^\circ\,\text{A}$$

یوں طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
P_{\text{الف}} &= \sqrt{3} V_{ab} I_{ua} \cos(\theta_{V_{an} - \theta_{I_{ua}}}) \\
&= \sqrt{3}(11000)(2093)\cos(-30^\circ - 1.18^\circ) \\
&= 34.11\,\text{MW}
\end{aligned}$$

دونوں نظام کے طاقت میں فرق ترسیلی تاروں کے ضیاع کی بدولت ہے۔

11.6 جزو طاقت کی درستگی

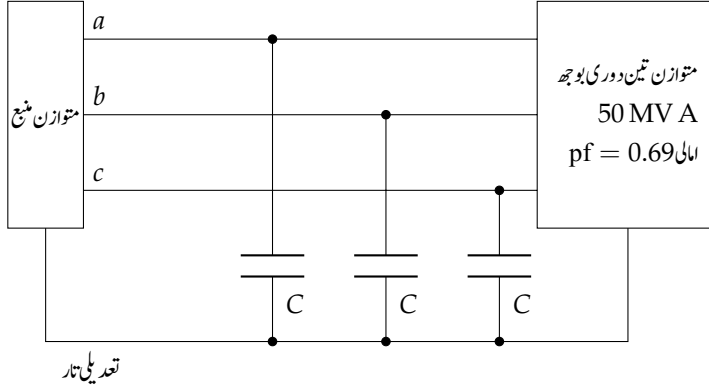
یک دوری نظام کا جزو طاقت بہتر کرنے پر حصہ 9.7 میں غور کیا گیا۔ تین دوری نظام کا جزو طاقت بالکل اسی طرح درست کیا جاتا ہے البتہ تین دوری نظام میں تین عدد برق گیر استعمال کئے جائیں گے۔ جزو طاقت درست کرنے والے برق گیر کو تکونی یا ستارہ نما بوجھ کے متوازی جوڑا جا سکتا ہے۔

صفحہ 597 پر مساوات 9.54 جزو طاقت درست کرنے کے لئے درکار برق گیر دیتا ہے جہاں $\boldsymbol{S}_C$ کو شکل 9.30-پ سے حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{S}_C = -j\omega C V_{\text{rms}}^2$$

درج بالا مساوات میں $\hat{V}_{\text{rms}}$ انفرادی برق گیر پر لاگو دباو ہے۔

جزو طاقت کے درستگی کے لئے دستیاب برق گیر کی گنجائش kvar میں بتلائی جاتی ہے۔ ساتھ ہی استعمال کی تعدد اور موثر دباو بھی بتلایا جاتا ہے۔ ہمارے ہاں 50 Hz درکار تعدد ہے۔

جزو طاقت بہتر بنانے والے برق گیر کو بوجھ کے قریب نسب کیا جاتا ہے نہ کہ منبع کے قریب۔ جزو طاقت بہتر کرنے سے درکار مخلوط طاقت کی قیمت گھٹتی ہے۔ یوں تار میں رو کی قیمت گھٹتی ہے لہٰذا تار میں طاقت کا ضیاع بھی کم ہوتا ہے۔ اسی طرح جنریٹر سے بوجھ تک ترسیل کے راستے میں آنے والے ٹرانسفارمروں میں بھی رو گھٹنے سے طاقت کا ضیاع کم ہوتا ہے۔ جنریٹر میں بھی رو کی قیمت گھٹنے سے طاقت کا ضیاع کم ہوتا ہے۔

شکل 11.21: مثال 11.13 کا دور۔

مثال 11.13: شکل 11.21 میں متوازن، abc نظام دکھایا گیا ہے جس میں موثر دباو تار $11\,\mathrm{kV\,rms}$ اور تعدد $50\,\mathrm{Hz}$ ہے۔ جزو طاقت 0.97 آگے کرنے کی خاطر درکار برق گیر C کی گنجائش دریافت کریں۔

حل: یک دوری نظام کی طرح حل کرتے ہوئے پہلے $\boldsymbol{S}_{\text{پرانا}}$ اور $\boldsymbol{S}_{\text{نیا}}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\text{پرانا}} &= 50\underline{/\cos^{-1} 0.69}\,\mathrm{MV\,A}\\ &= 50\underline{/46.37^\circ}\,\mathrm{MV\,A}\\ &= 34.5 + j36.19\,\mathrm{MV\,A}\end{aligned}$$

نیا زاویہ $-acos0.97 = -14.07^\circ$ کے برابر ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\text{نیا}} &= 34.5 - j34.5\tan(-14.07^\circ)\,\mathrm{MV\,A}\\ &= 34.5 - j8.66\,\mathrm{MV\,A}\end{aligned}$$

ہو گا۔اس طرح درکار برق گیر کی مخلوط طاقت درج ذیل ہو گی

$$\boldsymbol{S}_{\text{نیا}} - \boldsymbol{S}_{\text{پرانا}} = -j44.84\,\mathrm{MV\,A}$$

جو $-j\omega C' V_{\text{rms}}^2$ کے برابر ہو گا جہاں C' کل برق گیر ہے اور $V_{\text{rms}} = \frac{11\,\text{kV rms}}{\sqrt{3}}$ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} C' &= \frac{-j44.84\,\text{MV A}}{-j2\pi 50\left(\frac{11000}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= 3.54\,\text{mF} \end{aligned}$$

ہو گا۔یوں شکل 11.21 میں برق گیر کی قیمت درج ذیل ہو گی

$$C = \frac{C'}{3} = 1.18\,\text{mF}$$

لہٰذا تین عدد برق گیر ستارہ جوڑے جائیں گے جہاں ایک کی متعاملی سکت تقریباً $15\,\text{Mvar}$ ہو گی۔

مشق 11.16: مثال 11.13 میں 0.97 امالی جزو طاقت حاصل کرنے کی خاطر C کی قیمت دریافت کریں۔

جواب: $C = 725\,\mu\text{F}$

مشق 11.17: مثال 11.13 میں برق گیر کو ستارہ کی بجائے تکونی نسب کرتے ہوئے 0.97 امالی جزو طاقت حاصل کیا جاتا ہے۔برق گیر C کی گنجائش دریافت کریں۔

جواب: تکونی جڑے برق گیر کا ایک شاخ اب بھی تقریباً $15\,\text{Mvar}$ کا ہو گا البتہ $C = 242\,\mu\text{F}$ ہو گا۔

سوالات

سوال 11.1: تین دوری abc نظام میں $V_{an} = 220\underline{/90^\circ}\,\text{V rms}$ ہے۔ تینوں دباو تار دریافت کریں۔

جوابات: $V_{ab} = 381\underline{/120^\circ}\,\text{V rms}$ ، $V_{bc} = 381\underline{/0^\circ}\,\text{V rms}$ ، $V_{ca} = 381\underline{/-120^\circ}\,\text{V rms}$

سوال 11.2: تین دوری abc نظام میں $V_{an} = 100\underline{/30^\circ}\,\text{V rms}$ ہے۔ تینوں دباو تار دریافت کریں۔

جوابات: $V_{ab} = 173\underline{/60^\circ}\,\text{V rms}$ ، $V_{bc} = 173\underline{/0^\circ}\,\text{V rms}$ ، $V_{ca} = 173\underline{/-60^\circ}\,\text{V rms}$

سوال 11.3: تین دوری abc نظام میں $V_{ab} = 200\underline{/60^\circ}\,\text{V rms}$ ہے۔ تینوں دباو دور دریافت کریں۔

جوابات: $V_{an} = 115\underline{/30^\circ}\,\text{V rms}$ ، $V_{bn} = 115\underline{/-90^\circ}\,\text{V rms}$ ، $V_{cn} = 115\underline{/150^\circ}\,\text{V rms}$

سوال 11.4: تین دوری abc نظام میں $V_{an} = 240\underline{/45^\circ}\,\text{V rms}$ ہے۔ تینوں دباو تار دریافت کریں۔

جوابات: $V_{ab} = 416\underline{/75^\circ}\,\text{V rms}$ ، $V_{bc} = 416\underline{/-45^\circ}\,\text{V rms}$ ، $V_{ca} = 416\underline{/-165^\circ}\,\text{V rms}$

سوال 11.5: شکل 11.22-الف میں مساوی تکونی رکاوٹ Z_{ab} ، Z_{bc} اور Z_{ca} حاصل کریں۔

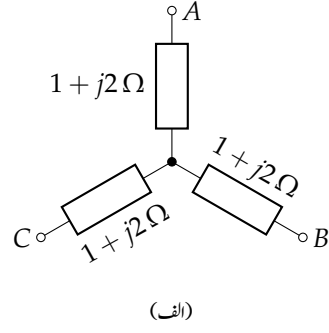
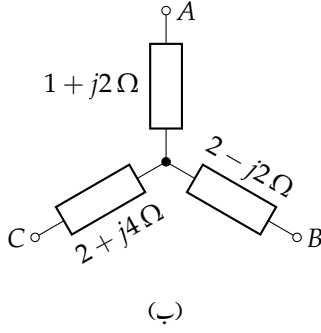
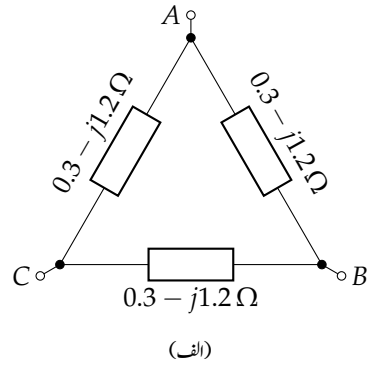
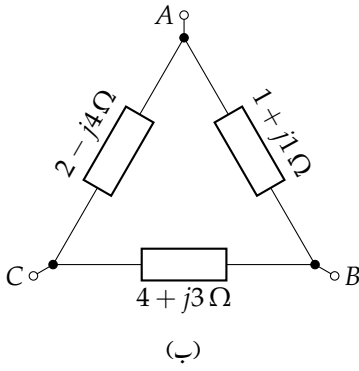
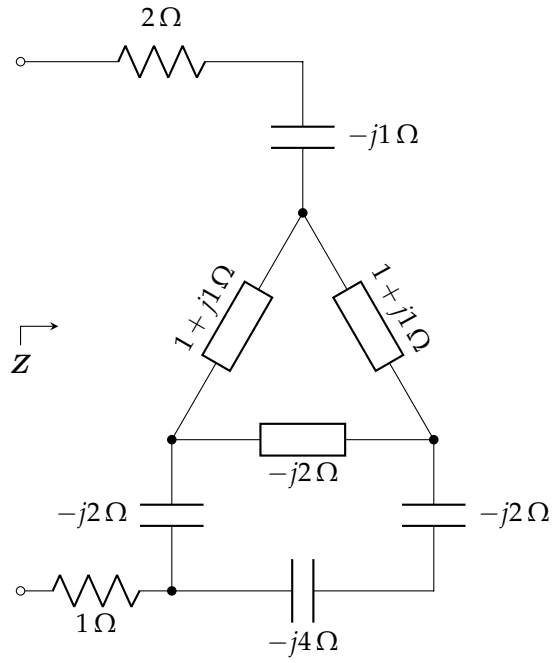
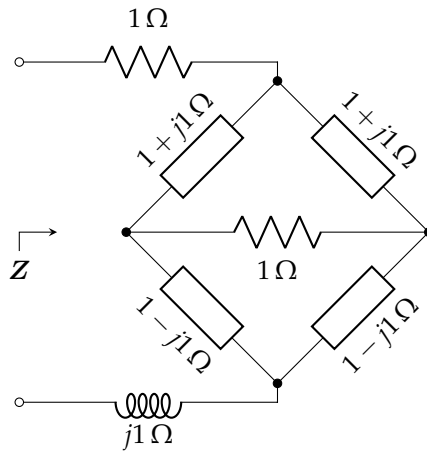
جوابات: $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = 3 + j6\,\Omega$

سوال 11.6: شکل 11.22-ب میں مساوی تکونی رکاوٹ Z_{ab} ، Z_{bc} اور Z_{ca} حاصل کریں۔

جوابات: $Z_{ab} = 4 - j1\,\Omega$ ، $Z_{bc} = 8 - j2\,\Omega$ ، $Z_{ca} = -0.5 + j6.5\,\Omega$

سوال 11.7: شکل 11.23-الف میں مساوی ستارہ رکاوٹ Z_a ، Z_b اور Z_c حاصل کریں۔

جوابات: $Z_a = Z_b = Z_c = 0.1 - j0.4\,\Omega$

سوال 11.8: شکل 11.23-ب میں مساوی ستارہ رکاوٹ Z_a ، Z_b اور Z_c حاصل کریں۔

شکل 11.22: سوال 11.5 اور سوال 11.6 کے ادوار۔

شکل 11.23: سوال 11.7 اور سوال 11.8 کے ادوار۔

شکل 11.24: سوال 11.9 کا دور۔

شکل 11.25: سوال 11.10 کا دور۔

جوابات: $Z_a = 0.86 - j0.29\,\Omega$ ، $Z_b = 0.14 - j1\,\Omega$ ، $Z_c = 2.86 - j1.43\,\Omega$

سوال 11.9: شکل 11.24 کا مساوی رکاوٹ Z دریافت کریں۔

جوابات: $Z = 3.58 - j2.12\,\Omega$

سوال 11.10: شکل 11.25 کا مساوی رکاوٹ Z دریافت کریں۔

جوابات: $Z = 2 + j1\,\Omega$

سوال 11.11: متوازن ستارہ بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔ دباو تار $215\,\mathrm{V\,rms}$ ہے جبکہ ستارہ بوجھ $12 + j8\,\Omega$ ہے۔ $\angle \hat{V}_{an} = 0^\circ$ لیتے ہوئے تینوں تار کی رو دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_a = 8.61\underline{/-33.7^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$ ، $\hat{I}_b = 8.61\underline{/-153.7^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$ ، $\hat{I}_c = 8.61\underline{/86.31^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$

سوال 11.12: متوازن ستارہ بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔ تار کی رکاوٹ $0.5 + j0.8\,\Omega$ ، منبع پر دباو $\hat{V}_{an} = \frac{240}{\sqrt{3}}\underline{/30^\circ}\,\mathrm{rms}$ ہے جبکہ ستارہ بوجھ $6 + j4\,\Omega$ ہے۔ تینوں تار کی رو دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_a = 17.1\underline{/-6.4^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$ ، $\hat{I}_b = 17.1\underline{/-126.4^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$ ، $\hat{I}_c = 17.1\underline{/113.6^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$

سوال 11.13: متوازن ستارہ بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔ تار کی رکاوٹ $0.2 + j0.6\,\Omega$ ، منبع پر دباو $\hat{V}_{ab} = 460\underline{/45^\circ}\,\mathrm{rms}$ ہے جبکہ تار کی رو $\hat{I}_a = 78\underline{/34^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$ ہے۔ ستارہ بوجھ کی رکاوٹ دریافت کریں۔

جوابات: $Z_Y = 3.22 - j1.11\,\Omega$

سوال 11.14: متوازن تکون بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔ منبع پر دباو $\hat{V}_{ab} = 440\underline{/20^\circ}\,\mathrm{rms}$ ہے جبکہ تکونی بوجھ $Z_\Delta = 15 + j12\,\Omega$ ہے۔ رو تار دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_a = 39.7\underline{/-48.7^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$ ، $\hat{I}_b = 39.7\underline{/-168.7^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$ ، $\hat{I}_c = 39.7\underline{/71.3^\circ}\,\mathrm{A\,rms}$

سوال 11.15: متوازن تکون بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔منبع پر دباو $\hat{V}_{ab} = 380\underline{/80^\circ}\,\text{rms}$ ہے، تکونی بوجھ $Z_\Delta = 6 + j9\,\Omega$ اور تار کی رکاوٹ $0.1 + j0.2\,\Omega$ ہے۔ستارہ منبع کی رو $\hat{I}_{an}$ اور بوجھ کی رو $\hat{I}_{AB}$ دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_{an} = 57.3\underline{/-6.7^\circ}\,\text{A}\,\text{rms}$ ، $\hat{I}_{AB} = 33.1\underline{/23.3^\circ}\,\text{A}\,\text{rms}$

سوال 11.16: متوازن ستارہ بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔بوجھ پر دباو $\hat{V}_{AN} = 215\underline{/17^\circ}\,\text{rms}$ ہے، بوجھ $Z_Y = 8 + j8\,\Omega$ اور تار کی رکاوٹ $1 + j2\,\Omega$ ہے۔ستارہ منبع کا دباو $\hat{V}_{an}$ دریافت کریں۔

جواب: $\hat{V}_{an} = 256\underline{/20^\circ}\,\text{V}\,\text{rms}$

سوال 11.17: متوازن ستارہ بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔بوجھ پر دباو $\hat{V}_{AN} = 120\underline{/33^\circ}\,\text{rms}$ ہے، بوجھ $Z_Y = 2 + j3\,\Omega$ اور تار کی رکاوٹ $0.8 + j1\,\Omega$ ہے۔ستارہ منبع پر دباو $\hat{V}_{ab}$ دریافت کریں۔

جواب: $\hat{V}_{ab} = 281\underline{/61.7^\circ}\,\text{V}\,\text{rms}$

سوال 11.18: متوازن تکون بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔منبع دباو $\hat{V}_{an} = 120\underline{/40^\circ}\,\text{rms}$ ہے، بوجھ $Z_\Delta = 24 + j18\,\Omega$ اور تار کی رکاوٹ $0.5 + j0.4\,\Omega$ ہے۔تکونی بوجھ کی رو دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_{AB} = 6.5\underline{/33^\circ}\,\text{A}\,\text{rms}$ ، $\hat{I}_{BC} = 6.5\underline{/-87^\circ}\,\text{A}\,\text{rms}$ ، $\hat{I}_{CA} = 6.5\underline{/153^\circ}\,\text{A}\,\text{rms}$

سوال 11.19: متوازن ستارہ بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔منبع دباو $\hat{V}_{an} = 120\underline{/0^\circ}\,\text{rms}$ ، بوجھ پر دباو $\hat{V}_{AN} = 111.62\underline{/-1.33^\circ}\,\text{V}\,\text{rms}$ اور بوجھ $Z_Y = 8 + j4\,\Omega$ ہے۔اور تار کی رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $0.499 + j0.499\,\Omega$

سوال 11.20: متوازن ستارہ بوجھ کو ستارہ منبع abc سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔جزو بوجھ 0.8 امالی جبکہ دباو بوجھ $\hat{V}_{AN} = 210\underline{/0^\circ}\,\text{rms}$ ہے۔کل تار کا ضیاع $300\,\text{W}$ ہے۔تار کی رکاوٹ $0.8 + j1.2\,\Omega$ ہے۔بوجھ کی رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $15 - j11.3\,\Omega$

سوال 11.21: ستارہ بوجھ $10+j16\,\Omega$ پر دباو $\hat{V}_{an}=220\underline{/0^\circ}\,\text{rms}$ ہے۔ منبع دباو $\hat{V}_{AN}=235\underline{/7^\circ}\,\text{rms}$ ہے۔ متوازن بوجھ قصر دور ہونے پر رو تار کی مقدار حاصل کریں۔

جواب: $\hat{I}_a=86.8\underline{/-116^\circ}\,\text{A rms}$

سوال 11.22: ستارہ بوجھ $10+j8\,\Omega$ کو $1.4+0.6j\,\Omega$ رکاوٹ کے تار سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔ بوجھ پر دباو کا زاویہ $\underline{/\hat{V}_{AN}}=45^\circ$ ہے۔ تاروں میں کل طاقت کا ضیاع $450\,\text{W}$ ہے۔ دباو بوجھ اور دباو منبع حاصل کریں۔

جواب: $\hat{V}_{AN}=132.6\underline{/45^\circ}\,\text{V rms}$ ، $\hat{V}_{an}=147.8\underline{/43.4^\circ}\,\text{V rms}$

سوال 11.23: ستارہ بوجھ $10+j8\,\Omega$ کو $1.4+0.6j\,\Omega$ رکاوٹ کے تار سے طاقت مہیا کیا جاتا ہے۔ بوجھ کا کل طاقت $15\,\text{kW}$ ہے۔ تاروں میں کل طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

جواب: $2.1\,\text{kW}$

سوال 11.24: سلسلہ وار $10\,\Omega$ اور $20\,\text{mH}$ تکونی بوجھ کو $50\,\text{Hz}$ کے ستارہ abc منبع سے طاقت فراہم کیا جاتا ہے۔ تار کی رکاوٹ کو نظر انداز کرتے ہوئے تمام رو دریافت کریں۔ منبع دباو $\hat{V}_{an}=230\underline{/0^\circ}\,\text{V rms}$ ہے۔

جوابات: $\hat{I}_a=58.4\underline{/-32.1^\circ}\,\text{A rms}$ ، $\hat{I}_b=58.4\underline{/-152.1^\circ}\,\text{A rms}$ ، $\hat{I}_c=58.4\underline{/87.9^\circ}\,\text{A rms}$ ، $\hat{I}_{ab}=33.7\underline{/-2.1^\circ}\,\text{A rms}$ ، $\hat{I}_{bc}=33.7\underline{/-122.1^\circ}\,\text{A rms}$ ، $\hat{I}_{ca}=33.7\underline{/117.9^\circ}\,\text{A rms}$

سوال 11.25: ستارہ بوجھ $4+j2\,\Omega$ کو تکونی abc منبع $\hat{V}_{ab}=420\underline{/10^\circ}\,\text{V rms}$ طاقت فراہم کرتا ہے۔ تار کی رکاوٹ $0.2+j0.4\,\Omega$ ہے۔ بوجھ پر دباو $\hat{V}_{AB}$ حاصل کریں۔ سوال 11.25، سوال 11.26 اور سوال 11.27 میں صرف بوجھ تبدیل کیا گیا ہے۔ بوجھ کی تبدیلی کا بوجھ کے دباو پر اثر آپ دیکھ سکتے ہیں۔

جوابات: $335\underline{/1.7^\circ}\,\text{V rms}$

سوال 11.26: ستارہ بوجھ $4+j8\,\Omega$ کو تکونی abc منبع $\hat{V}_{ab}=420\underline{/10^\circ}\,\text{V rms}$ طاقت فراہم کرتا ہے۔ تار کی رکاوٹ $0.2+j0.4\,\Omega$ ہے۔ بوجھ پر دباو $\hat{V}_{AB}$ حاصل کریں۔

جوابات: $365\underline{/10^\circ}\,\text{V rms}$

سوال 11.27: ستارہ بوجھ $4 - j8\,\Omega$ کو تکونی abc منبع $\hat{V}_{ab} = 420\angle 10^\circ\,\mathrm{V\,rms}$ طاقت فراہم کرتا ہے۔تار کی رکاوٹ $0.2 + j0.4\,\Omega$ ہے۔بوجھ پر دباو $\hat{V}_{AB}$ حاصل کریں۔

جوابات: $458\angle 2.5^\circ\,\mathrm{V\,rms}$

سوال 11.28: ستارہ بوجھ کو ستارہ abc منبع $\hat{V}_{an} = 235\angle 50^\circ\,\mathrm{V\,rms}$ طاقت فراہم کرتا ہے۔تار کی رکاوٹ $1 + j1\,\Omega$ اور $\hat{I}_a = 10\angle 20^\circ\,\mathrm{A\,rms}$ ہے۔بوجھ کی رکاوٹ حاصل کریں۔

جوابات: $\boldsymbol{Z}_Y = 19.4 + j10.7\,\Omega$

سوال 11.29: ستارہ بوجھ $10 + j8\,\Omega$ کو تکونی abc منبع طاقت فراہم کرتا ہے۔تار کی رکاوٹ $0.6 + j0.8\,\Omega$ اور $\hat{I}_a = 8\angle -40^\circ\,\mathrm{A\,rms}$ ہے۔منبع کا دوری دباو حاصل کریں۔

جوابات: $\hat{V}_{ab} = 191\angle 29.7^\circ\,\mathrm{V\,rms}$

سوال 11.30: تکونی بوجھ $9 + j12\,\Omega$ کو تکونی abc منبع طاقت فراہم کرتا ہے۔تار کی رکاوٹ $0.4 + j0.2\,\Omega$ اور بوجھ کی رو $\hat{I}_{AB} = 15\angle 40^\circ\,\mathrm{A\,rms}$ ہے۔منبع کا دوری دباو حاصل کریں۔

جوابات: $\hat{V}_{ab} = 243\angle 91^\circ\,\mathrm{V\,rms}$

سوال 11.31: تکونی بوجھ $24 + j12\,\Omega$ اور ستارہ بوجھ $12 + j8\,\Omega$ متوازی جڑے ہیں۔انہیں تکونی منبع $\hat{V}_{ab} = 440\angle 60^\circ\,\mathrm{V\,rms}$ سے طاقت فراہم کیا جاتا ہے۔تار کی رکاوٹ $1 + j0.8\,\Omega$ ہے۔تار کی رو اور تکونی بوجھ کا کل طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_a = 37.4\angle -1^\circ\,\mathrm{A\,rms}$ ، $p_\Delta = 12.816\,\mathrm{kW}$

سوال 11.32: تین دوری $50\,\mathrm{Hz}$ منبع درج ذیل بوجھ کو طاقت فراہم کرتا ہے۔

- 0.8 امالی جزو طاقت کا $60\,\mathrm{kV\,A}$ بوجھ اور
- 0.7 پیچھے جزو طاقت کا $40\,\mathrm{kV\,A}$ بوجھ۔

بوجھ پر موثر دباو تار $440\,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔رو تار اور بوجھ پر کل جزو طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $I_a = 131\,\mathrm{A\,rms}$ ، امالی جزو طاقت 0.762 ہے۔

سوال 11.33: تین دوری $50\,\mathrm{Hz}$ منبع درج ذیل بوجھ کو طاقت فراہم کرتا ہے۔

- 0.8 امالی جزو طاقت کا 20 kV A بوجھ،
- 0.8 آگے جزو طاقت کا 10 kV A بوجھ اور
- 0.75 آگے جزو طاقت کا 12 kW بوجھ۔

بوجھ پر موثر دباو تار 440 V rms ہے۔تار کی رکاوٹ کو نظر انداز کرتے ہوئے منبع پر موثر دباو تار اور جزو طاقت دریافت کریں۔

جوابات: 440 V rms ، آگے جزو طاقت 0.992 ہے۔

سوال 11.34: تین دوری 50 Hz منبع درج ذیل بوجھ کو طاقت فراہم کرتا ہے۔

- 0.8 امالی جزو طاقت کا 15 kV A بوجھ،
- 0.6 آگے جزو طاقت کا 10 kV A بوجھ،
- اکائی جزو طاقت کا 10 kW بوجھ اور
- 0.7 امالی جزو طاقت کا 15 kW بوجھ

تار کی رکاوٹ $0.2 + j0.6\,\Omega$ ہے جبکہ بوجھ پر موثر دباو تار 415 V rms ہے۔منبع پر دباو تار اور جزو طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $V_{ab} = 462\,\text{V rms}$ ، امالی جزو طاقت 0.887 ہے۔

باب 12

تعددی رد عمل

گزشتہ ابواب میں ہم RLC ادوار کو حل کر چکے ہیں جہاں تعدد غیر متغیر تھی۔اس باب میں تعدد تبدیل کرتے ہوئے ادوار کا رد عمل بالمقابل تعدد دیکھا جائے گا۔آئیں شروع میں سادہ ترین پرزوں کا تعددی رد عمل دیکھیں۔سادہ ترین پرزے مزاحمت، امالہ اور برق گیر ہیں۔تعددی رد عمل دیکھتے ہوئے سائن نما اشارات زیر استعمال لائے جائیں گے۔

شکل 12.1-الف میں مزاحمت دکھایا گیا ہے۔مزاحمت کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

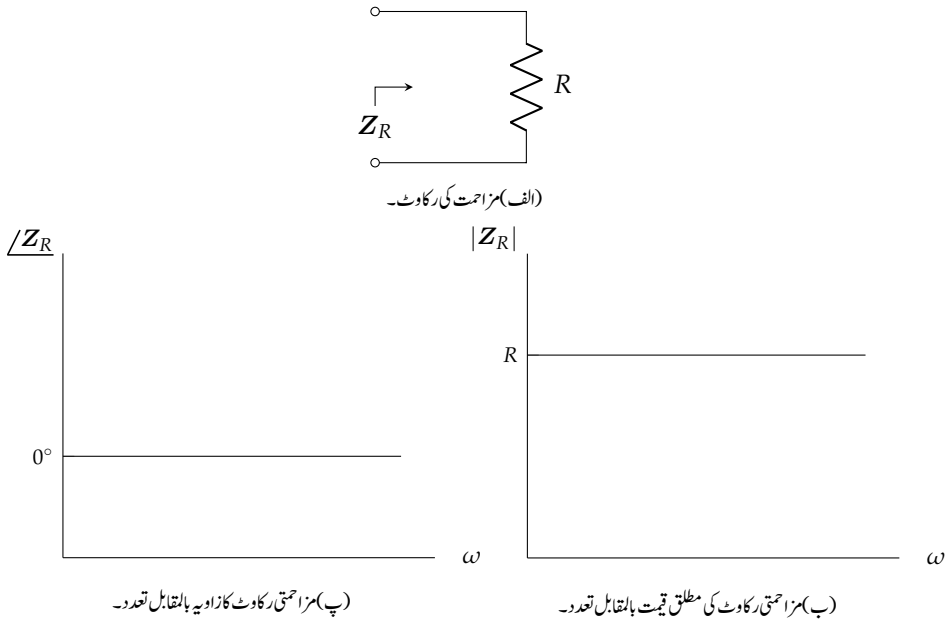
$$Z_R = R\underline{/0^\circ} \tag{12.1}$$

یوں مزاحمت کی رکاوٹ پر تعدد ω کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔مزاحمت کے رکاوٹ کی مطلق قیمت $|Z_R|$ تمام تعدد پر R کے برابر ہے جبکہ اس کا زاویائی ہٹاو $\underline{/Z_R}$ تمام تعدد پر صفر درجہ رہتا ہے۔یہ حقائق شکل 12.1-ب اور شکل 12.1-پ میں دکھائے گئے ہیں۔

امالہ گیر کو شکل 12.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔امالہ گیر کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

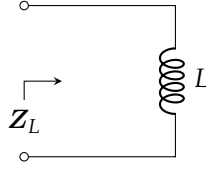
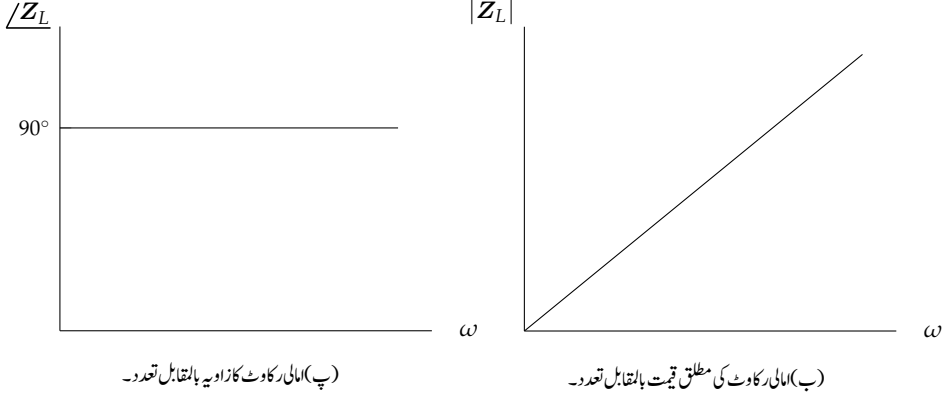
$$\boldsymbol{Z}_L = j\omega L = \omega L\underline{/90^\circ} \tag{12.2}$$

اس طرح امالہ گیر کے رکاوٹ کی مطلق قیمت تعدد بڑھانے سے بڑھتی ہے۔رکاوٹ کی مقدار کا تعدد کے ساتھ راست تناسبی رشتہ ہے۔

$$|\boldsymbol{Z}_L| = \omega L \tag{12.3}$$

شکل 12.1: مزاحمتی رکاوٹ کا تعددی رد عمل۔

(الف)امالہ گیر کی رکاوٹ۔

(ب)امالی رکاوٹ کی مطلق قیمت بالمقابل تعدد۔

(پ)امالی رکاوٹ کا زاویہ بالمقابل تعدد۔

شکل 12.2: امالی رکاوٹ کا تعدد رد عمل۔

صفر تعدد پر امالہ گیر کی رکاوٹ $0\,\Omega$ ہو جاتی ہے اور یہ قصر دور خاصیت رکھتا ہے جبکہ لا متناہی تعدد پر رکاوٹ کی مقدار لا متناہی ہو جاتی ہے اور امالہ گیر بطور کھلا دور عمل کرتا ہے۔امالی رکاوٹ کا زاویہ تمام تعدد پر 90° رہتا ہے۔

$$\angle Z_L = 90^\circ \tag{12.4}$$

شکل 12.2-ب اور شکل 12.2-پ میں ان حقائق کو دکھایا گیا ہے۔

برق گیر کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔برق گیر کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle{-90^\circ} \tag{12.5}$$

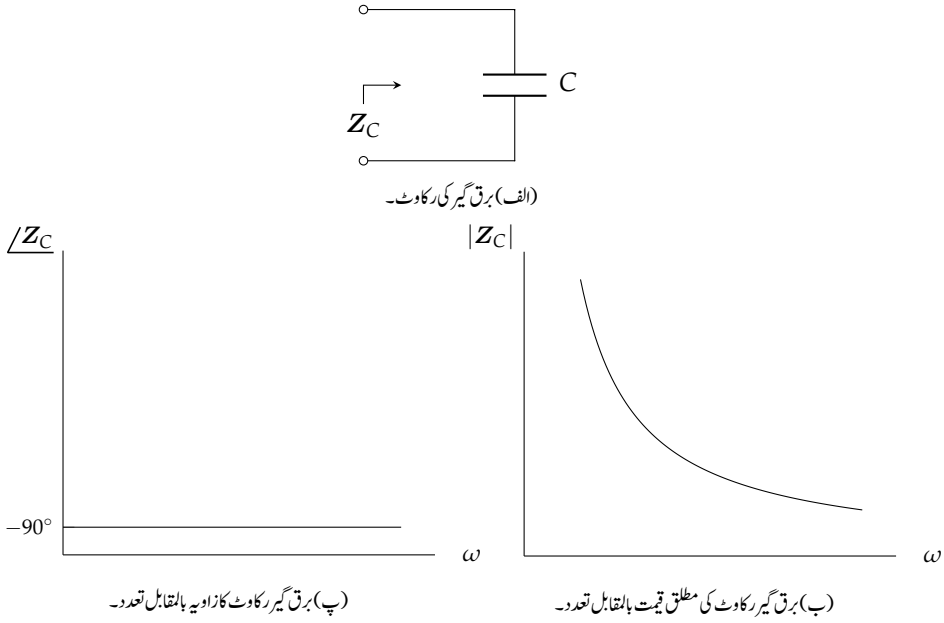
اس طرح برق گیر کے رکاوٹ کی مقدار کا تعدد کے ساتھ بالعکس تناسب کا رشتہ ہے جبکہ اس کا زاویہ تمام تعدد پر -90° رہتا ہے۔

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C} \tag{12.6}$$

$$\angle Z_C = -90^\circ \tag{12.7}$$

(الف) برق گیر کی رکاوٹ۔

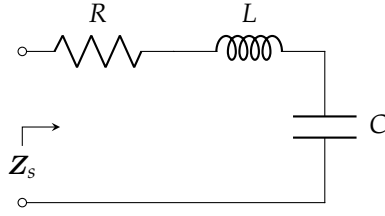
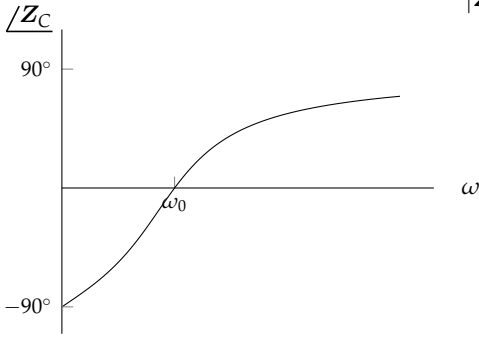
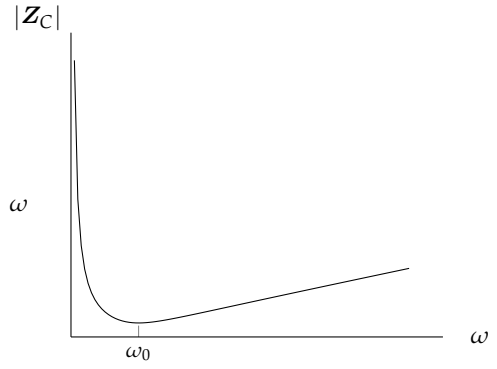
(ب) برق گیر رکاوٹ کی مطلق قیمت بالمقابل تعدد۔

(پ) برق گیر رکاوٹ کا زاویہ بالمقابل تعدد۔

شکل 12.3: برق گیر رکاوٹ کا تعدد رد عمل۔

ان تعلقات کو شکل 12.3-ب اور شکل 12.3-پ میں دکھایا گیا ہے۔ صفر تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ لامتناہی ہو جاتی ہے لہٰذا یہ بطور کھلا دور عمل کرتا ہے جبکہ لامتناہی تعدد پر رکاوٹ کی مقدار صفر ہو جاتی ہے اور یہ قصر دور کردار ادا کرتا ہے۔

سادہ ترین پرزوں کو نپٹانے کے بعد ذرہ مشکل ادوار دیکھتے ہیں۔ شکل میں مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر سلسلہ وار جڑے دکھائے گئے ہیں۔ ان کی کل رکاوٹ Z_s لکھتے ہیں

$$
\begin{aligned}
Z_s &= Z_R + Z_L + Z_C \\
&= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\
&= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)
\end{aligned}
$$

اس تفاعل کو شکل 12.4-ب اور شکل 12.4-پ میں دکھایا گیا ہے۔

شکل 12.4: سلسلہ وار جڑے مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کا تعددی رد عمل۔

مثال 12.1: شکل 12.5-الف میں مزاحمت پر دباو حاصل کریں۔اس کے مقدار بالمقابل تعدد اور زاویہ بالمقابل تعدد کے خط کھینچیں۔

حل: دور سے مزاحمت کا دباو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{V}_R = \frac{(4)(20\underline{/0^\circ})}{4 + j(2\pi f 0.15 - \frac{1}{2\pi f 0.004})}$$

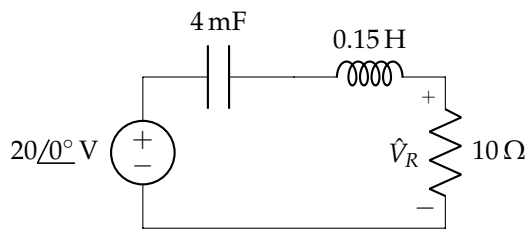
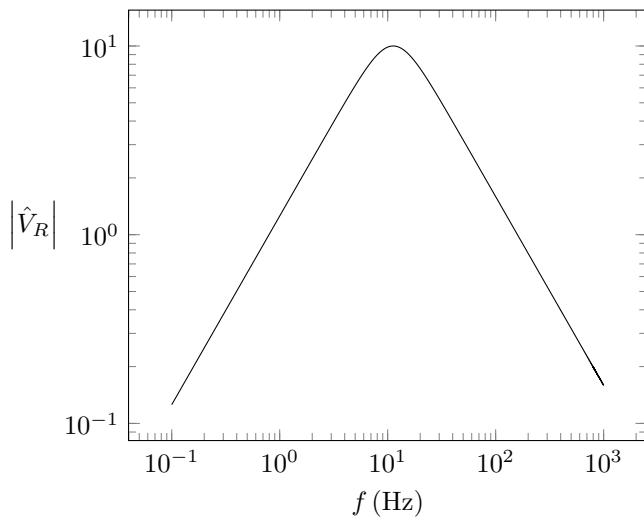
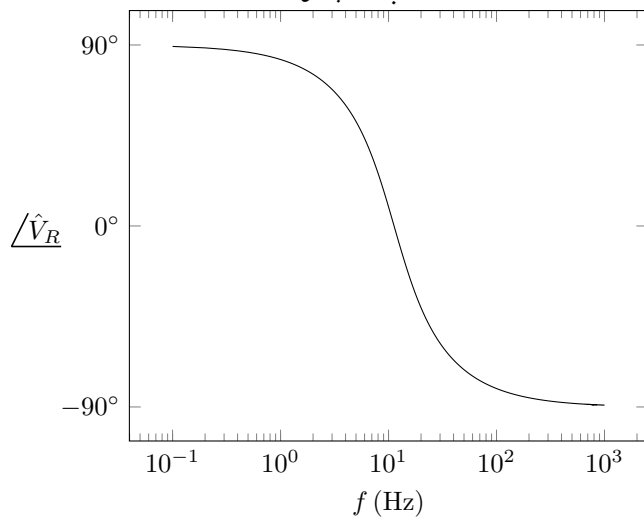
جو مخلوط تفاعل ہے۔اس کی مطلق مقدار $\hat{V}_R$ بالمقابل تعدد f کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس ترسیم میں دونوں محور کی پیمائش **لوگارتھم**[1] میں ہے۔اس طرز کے ترسیم کو **لوگارتھم لوگارتھم**[2] ترسیم کہا جاتا ہے۔مقدار بالمقابل تعدد کے خط عموماً لوگارتھم لوگارتھم محور پر دکھائے جاتے ہیں۔ زاویہ دباو $\underline{/\hat{V}_R}$ بالمقابل تعدد کو شکل-پ میں **نیم لوگارتھم**[3] محور پر دکھایا گیا ہے۔کم تعدد پر دباو کا زاویہ $+90^\circ$ جبکہ بلند تعدد پر زاویہ -90° ہے۔

یہاں لوگارتھم لوگارتھم اور نیم لوگارتھم محور پر قیمتیں پڑھنا سیکھ لیں چونکہ اس باب میں انہیں کا استعمال ہو گا۔یوں شکل 12.5-ب میں مطلق مقدار کی چوٹی 10^1 یعنی دس ہرٹز پر پائی جاتی ہے۔یہ چوٹی 10^1 یعنی دس وولٹ کو ظاہر کرتی ہے۔اسی طرح $10^2\,\text{Hz}$ یعنی سو ہرٹز پر دباو تقریباً $1.6\,\text{V}$ ہے۔

سمعی[4] اشارات کو **عددی صورت**[5] میں تبدیل کرتے ہوئے کمپیوٹر میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ انہیں کو دوبارہ **مماثلی صورت**[6] میں تبدیل کرتے ہوئے سنا جا سکتا ہے۔آئیں ان اشارات پر ایک مثال دیکھیں۔

کمپیوٹر سے حاصل موسیقی کے مماثلی اشارات کی چوٹی $1.5\,\text{V}$ ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ **سمعی دباو ایمپلیفائر**[7] استعمال کرتے ہوئے $8\,\Omega$ کے **سپیکر**[8] کو $10\,\text{W}$ طاقت فراہم کی جائے۔ان حقائق سے ایمپلیفائر کے داخلی مماثل اشارہ

---

[1] log
[2] log-log
[3] semilog
[4] audio
[5] digital form
[6] analog form
[7] voltage amplifier
[8] loud speaker

شکل 12.5: مثال 12.1 کا دور۔

کی موثر قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$v_m = \frac{1.5}{\sqrt{2}} = 1.061\,\text{V rms}$$

طاقت کے کلیے $P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}$ سے آٹھ اوہم کے سپیکر کو دس واٹ طاقت کے لئے درکار موثر دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0 = \sqrt{(10)(8)} = 8.944\,\text{V rms}$$

یوں ایمپلیفائر کی درکار افزائش دباو درج ذیل ہے۔

$$A_v = \frac{v_0}{v_m} = \frac{8.944}{1.061} = 8.43\,\text{V}\,\text{V}^{-1}$$

شکل 12.6-الف میں ایمپلیفائر اور سپیکر دکھائے گئے ہیں جہاں v_m کمپیوٹر سے حاصل مماثل سمعی اشارہ ہے اور $A_v = 10.53\,\text{V}\,\text{V}^{-1}$ ۔ انسان $20\,\text{Hz}$ تا $20\,\text{kHz}$ کے سمعی اشارات سن سکتا ہے لہٰذا ہمارے ایمپلیفائر کو اس **تعددی پٹی**[9] کے اشارات کا حیطہ بڑھانا ہو گا۔حیطہ بڑھاتے ہوئے اصل آواز کی خاصیت تبدیل نہیں ہونی چاہیے۔اگر پوری تعددی پٹی پر ایمپلیفائر کی افزائش کی قیمت یکساں ہو تب آواز کی خاصیت برقرار رہے گی۔یوں ہم چاہیں گے $20\,\text{Hz}$ تا $20\,\text{kHz}$ پر ایمپلیفائر کی افزائش $8.43\,\text{V}\,\text{V}^{-1}$ رہے۔ایمپلیفائر کے افزائش بالمقابل تعددی خط کو شکل 12.7-الف میں دکھایا گیا ہے۔

برق گیر کی رکاوٹ $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ لکھی جاتی ہے جس میں $j\omega = s$ پر کرتے ہوئے $Z_C = \frac{1}{sC}$ لکھا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے ایمپلیفائر کو دوبارہ شکل 12.6-ب میں دکھایا گیا ہے۔آپ میں سے کچھ طلبہ s کو پہچان گئے ہوں گے۔یہ **لاپلاس بدل**[10] کا متغیرہ ہے۔

آئیں شکل 12.6-ب کو حل کریں۔داخلی جانب بالائی جوڑ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

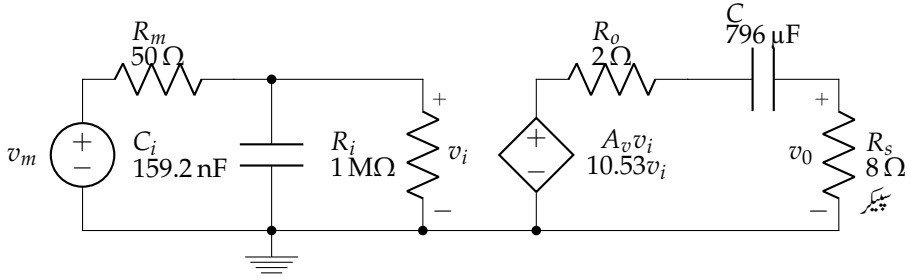
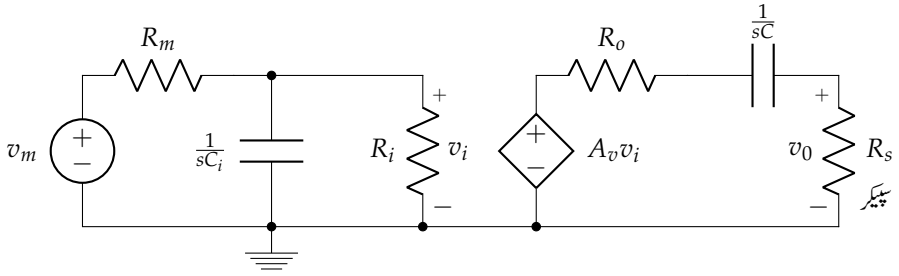
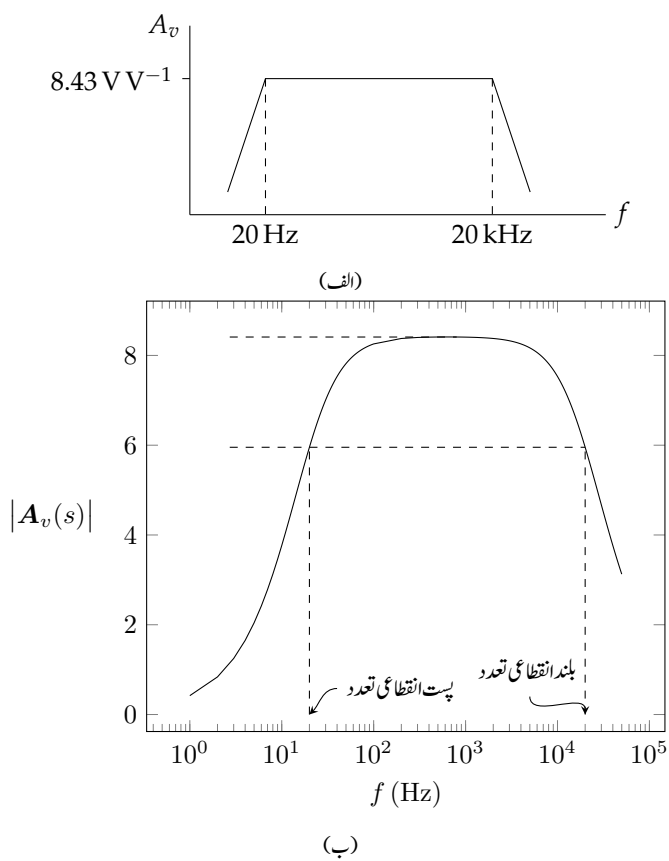
$$\frac{v_i - v_m}{R_m} + sC_i v_i + \frac{v_i}{R_i} = 0$$

جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_i \left(\frac{1}{R_m} + sC_i + \frac{1}{R_i} \right) = \frac{v_m}{R_m}$$

---

[9] frequency band
[10] Laplace transform

شکل 12.6: ایمپلیفائر اور اس کی افزائش بالمقابل تعددی خط۔

شکل 12.7: ایمپلیفائر کی افزائش بالمقابل تعددی خط۔

اس میں قوسین کے اندر مزاحمتوں کو قریب قریب لکھتے ہوئے v_i کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$v_i = \frac{v_m}{R_m\left(\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}+sC_i\right)}$$

شکل 12.6-ب کے دائیں جانب تقسیم دباو کے کلیے سے v_0 لکھتے ہیں۔

$$v_0 = \frac{A_v v_i R_s}{R_o + R_s + \frac{1}{sC}}$$

اس میں v_i کی قیمت پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
v_0 &= \left(\frac{A_v R_s}{R_o+R_s+\frac{1}{sC}}\right)\frac{v_m}{R_m\left(\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}+sC_i\right)}\\
&= \left[\frac{sCR_sA_v}{1+sC(R_o+R_s)}\right]\frac{v_m}{R_m\left(\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}\right)\left(1+\frac{sC_i}{\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}}\right)}\\
&= \frac{R_sA_vv_m}{R_m\left(\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}\right)}\left[\frac{sC}{1+sC(R_o+R_s)}\right]\frac{1}{\left(1+\frac{sC_i}{\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}}\right)}
\end{aligned}$$

جہاں دوسری قدم پر دائیں نچلی قوسین سے $\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}$ باہر نکالا گیا اور تیسری قدم پر اسی کو پہلی قوسین کا حصہ بنایا گیا۔اس مساوات میں

$$\begin{aligned}
\omega_{p1} &= \frac{1}{C(R_o+R_s)}\\
\omega_{p2} &= \frac{1}{C_i}\left(\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}\right)
\end{aligned}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل صاف ستھرا مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں ω_{p1} اور ω_{p2} مساوات کے قطب[11] کہلاتے ہیں اور انہیں تعدد کی اکائی یعنی ہرٹز Hz یا ریڈیئن فی سیکنڈ $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ میں ناپا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}_v(s) = \frac{v_0}{v_m} = \frac{R_sA_v}{R_m\left(\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}\right)}\frac{sC}{\left(1+\frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_{p2}}\right)} \tag{12.8}$$

---

[11] pole

شکل 12.6-الف میں دی گئی مزاحمتوں اور برق گیروں کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\omega_{p1} = \frac{1}{796 \times 10^{-6}(2+8)} = 125.63\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$
$$\omega_{p2} = \frac{1}{159.2 \times 10^{-9}}\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{1000000}\right) = 125.634\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$$
$$\frac{R_s A_v}{R_m\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}\right)} = \frac{8 \times 10.53}{50\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{1000000}\right)} \approx 84.2$$

یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}_v(s) = 84.2\frac{sC}{\left(1 + \frac{s}{125.63}\right)\left(1 + \frac{s}{125634}\right)} \tag{12.9}$$

آئیں اس میں واپس $s = j\omega = j2\pi f$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_v(s) &= 84.2\frac{j2\pi f \times 796 \times 10^{-6}}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{125.63}\right)\left(1 + \frac{j2\pi f}{125634}\right)}\\ &= \frac{j0.421f}{\left(1 + \frac{jf}{20}\right)\left(1 + \frac{jf}{20000}\right)}\end{aligned} \tag{12.10}$$

اس کے مطلق قیمت $\left|\boldsymbol{A}_v(s)\right|$ بالمقابل تعدد f کو شکل 12.7-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$\left|\boldsymbol{A}_v(s)\right| = \frac{0.421f}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{20}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{f}{20000}\right)^2}}$$

شکل 12.7-ب میں $20\,\mathrm{Hz}$ کو **پست انقطاعی تعدد**[12] اور $20\,\mathrm{kHz}$ کو **بلند انقطاعی تعدد**[13] کہتے ہیں۔ انہیں خط کے **کونے کی تعدد**[14] بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 12.7 میں انقطاعی تعدد کے مابین **درمیانی تعدد خطے**[15] میں ایمپلیفائر کی افزائش $8.41\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے جو ہمیں درکار تھی۔ اس کو درمیانی تعدد پر افزائش کہتے ہیں۔ البتہ انقطاعی تعدد کے قریب ایمپلیفائر کی افزائش گھٹ جاتی

[12] low cut-off frequency
[13] high cut-off frequency
[14] corner frequencies
[15] mid-frequency range

ہے۔یوں پست اور بلند انقطاعی تعدد پر افزائش $5.95\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔جس تعدد پر افزائش کی قیمت درمیانی تعدد کے افزائش کے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا رہ جاتی ہے اس کو انقطاعی تعدد کہتے ہیں۔چونکہ طاقت $P=\frac{V_{\text{rms}}^2}{R}$ کے برابر ہے لہٰذا دباو کی قیمت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہو جانے سے طاقت کی قیمت نصف ہو جاتی ہے۔یوں انقطاعی تعدد اس تعدد کو کہتے ہیں جس پر اشارے کی طاقت نصف رہ جاتی ہے۔ہمارے ایمپلیفائر کی درمیانی تعدد پر افزائش $8.41\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔اس کا $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا $8.4\times\frac{1}{\sqrt{2}}=5.95\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔

حقیقت میں پرزوں کی قیمتیں یوں رکھی جائیں گی کہ پست انقطاعی تعدد $20\,\mathrm{Hz}$ سے کئی گنا کم ہو اور اسی طرح بلند انقطاعی تعدد $20\,\mathrm{kHz}$ سے کئی گنا زیادہ ہو۔یوں حقیقی ایمپلیفائر میں آپ انقطاعی تعدد کو $2\,\mathrm{Hz}$ اور $200\,\mathrm{kHz}$ رکھیں گے تاکہ پوری تعددی پٹی پر ایمپلیفائر سے درکار افزائش میسر ہو۔

مساوات 12.10 میں درمیانی تعددی پٹی پر انقطاعی تعدد سے دور تعدد

$$20\,\mathrm{Hz}\ll f\ll 20\,000\,\mathrm{Hz}$$

کی صورت میں $1\ll\frac{f}{20}$ اور $\frac{f}{20000}\ll 1$ ہو گا۔یوں مساوات 12.10 کے بائیں قوسین میں $1+\frac{jf}{20}=\frac{jf}{20}$ اور دائیں قوسین میں $1+\frac{jf}{20000}=1$ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو درمیانی تعدد پر افزائش ہے۔

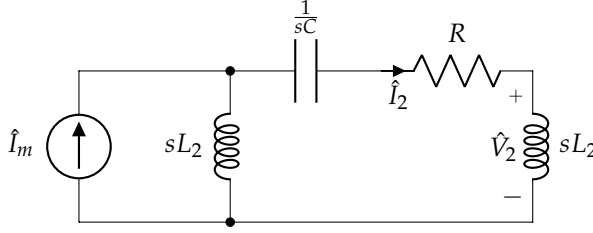
$$\boldsymbol{A}_v(s)\approx\frac{j0.421f}{\left(\frac{jf}{20}\right)(1)}=8.42\qquad(20\,\mathrm{Hz}\ll f\ll 20\,\mathrm{kHz})$$

12.1 جال

کسی بھی دور میں متعدد پرزے اور تار پائے جاتے ہیں جسے پرزوں اور تاروں کا جال تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں دور کو برقی جال یا صرف جال[16] بھی کہا جاتا ہے۔گزشتہ حصے میں ایمپلیفائر کی افزائش دباو $\boldsymbol{A}_v(s)$ کی بات کی گئی جو جال کے مختلف تفاعل $\boldsymbol{H}(s)$ میں سے ایک ہے۔جال میں کسی مقام پر رد عمل اور داخلی اشارے کی تناسب کو $\boldsymbol{H}(s)$ لکھا جاتا ہے۔چونکہ جال میں عموماً رد عمل کو اس مقام پر نہیں ناپا جاتا جس پر داخلی اشارہ لاگو کیا گیا ہو لہٰذا $\boldsymbol{H}(s)$ کو تبادلی تفاعل[17] کہا جاتا ہے۔داخلی اشارہ دباو یا رو کا ہو سکتا ہے۔اسی طرح رد عمل بھی دباو یا رو کی صورت میں ممکن ہے لہٰذا تبادلی تفاعل کے چار اقسام ممکنہ پائے جاتے ہیں جنہیں جدول 12.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

---
[16] network
[17] transfer function

جدول 12.1: جال کے تبادلی تفاعل

داخلی	خارجی	تبادلی تفاعل	علامت
دباو	دباو	افزائش دباو	$\boldsymbol{A}_v(s)$
رو	رو	افزائش رو	$\boldsymbol{A}_i(s)$
دباو	رو	موصل نما افزائش	$\boldsymbol{A}_g(s)$
رو	دباو	دباو نما افزائش	$\boldsymbol{A}_r(s)$

شکل 12.8: مثال 12.2 کا دور۔

مثال 12.2: شکل 12.8 میں تبادلی تفاعل $\boldsymbol{A}_i(s) = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_m}$ اور $\boldsymbol{A}_r(s) = \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_m}$ حاصل کریں۔

حل: تقسیم رو کے کلیے سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$\hat{I}_2 = \frac{sL_1\hat{I}_m}{sL_1 + \frac{1}{sC} + R + sL_2}$$

جس سے افزائش رو کی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}_i(s) = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_m} = \frac{s^2L_1C}{s^2(L_1+L_2)C + sRC + 1}$$

رو $\hat{I}_2$ جانتے ہوئے $\hat{V}_2$ لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= sL_2\hat{I}_2\\ &= \frac{s^3L_1L_2C\hat{I}_m}{s^2(L_1+L_2)C + sRC + 1}\end{aligned}$$

جس سے مزاحمت نما افزائش لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}_r(s)=\frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_m}=\frac{s^3L_1L_2C}{s^2(L_1+L_2)C+sRC+1}$$

12.2 صفر اور قطب

درج بالا مثال میں ہم نے دیکھا کہ تبادلی تفاعل کو دو سلسلوں کا تناسب $\frac{A(s)}{B(s)}$ لکھا جا سکتا ہے جن کا متغیرہ s ہے۔چونکہ ادوار میں پرزوں کی قیمت اور تابع یا غیر تابع منبع کی قیمت حقیقی اعداد ہوتے ہیں لہٰذا ان سلسلوں کے سر حقیقی اعداد ہوں گے۔یوں کسی بھی جال کا تبادلی تفاعل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_ms^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_2s^2+a_1s+a_0}{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_2s^2+b_1s+b_0} \tag{12.11}$$

جہاں شمار کنندہ کثیر رکنی m درجہ کی ہے جبکہ نسب نما کثیر رکنی n درجے کا ہے۔مساوات 12.11 کو بذریعہ تجزی درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \tag{12.12}$$

یہاں غور کریں کہ اگر $s=-z_1$ ہو تب $\boldsymbol{H}(s)=0$ ہو گا۔اسی طرح اگر $s=-z_2$ یا $s=-z_3$ ہو تو $\boldsymbol{H}(s)=0$ ہو گا۔یہی وجہ ہے کہ $-z_1$ تا $-z_m$ تفاعل کے صفر[18] کہلاتے ہیں۔اس کے برعکس اگر $s=-p_1$ ہو یا $s=-p_2$ ہو تب $\boldsymbol{H}(s)$ کی قیمت لامتناہی ہو گی۔اسی لئے $-p_1$ تا $-p_n$ تفاعل کے قطب[19] کہلاتے ہیں۔تفاعل کے صفر اور قطب مخلوط اعداد ہو سکتے ہیں۔مخلوط اعداد کی صورت میں ان کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں جہاں جوڑی کے دونوں اعداد ایک دوسرے کے جوڑی دار مخلوط[20] ہوتے ہیں۔ایسی جوڑی کے قوسین ضرب کرنے سے حقیقی سر والے کثیر رکنی دیتے ہیں جو ادوار کو ظاہر کر سکتے ہیں۔مساوات 12.12 کسی بھی خطی اور وقت کے ساتھ نہ بدلنے والے نظام کے تبادلی تفاعل لکھنے کا انتہائی اہم طریقہ ہے چونکہ اس کے قطبین کو دیکھ کر تفاعل کی خاصیت کے بارے میں جانا جا سکتا ہے۔ایسے نظام کے تبادلی تفاعل کو عموماً اسی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

---

[18] zeroes
[19] poles
[20] complex conjugate

مساوات 12.12 میں شمار کنندہ سے z_1 تا z_m اور نسب نما سے p_1 تا p_n باہر نکالتے اور ترتیب دیتے ہوئے ذیل ملتا ہے

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{K(z_1z_2\cdots z_m)(1+\frac{s}{z_1})(1+\frac{s}{z_2})\cdots(1+\frac{s}{z_m})}{(p_1p_2\cdots p_n)(1+\frac{s}{p_1})(1+\frac{s}{p_2})\cdots(1+\frac{s}{p_n})}$$

جس میں $K_0=\frac{K(z_1z_2\cdots z_m)}{(p_1p_2\cdots p_n)}$ لکھتے ہوئے مساوات کی معیاری شکل ملتی ہے۔

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{K_0(1+\frac{s}{z_1})(1+\frac{s}{z_2})\cdots(1+\frac{s}{z_m})}{(1+\frac{s}{p_1})(1+\frac{s}{p_2})\cdots(1+\frac{s}{p_n})} \tag{12.13}$$

مثال 12.3: درج ذیل تفاعل کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھیں۔

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{5s+2}{2s^2+5s+3}$$

حل: نسب نما $2s^2+5s+3$ کے جذر $s_1=-1$ اور $s_2=-\frac{3}{2}$ ہیں۔آپ یہاں غلط فہمی[21] سے درج بالا کو $\frac{5s+2}{(s+1)(s+\frac{3}{2})}$ لکھ سکتے ہیں لیکن قوسین کو ضرب دیتے ہوئے واپس اصل تفاعل حاصل کرتے ہوئے $\frac{5s+2}{s^2+\frac{5}{2}s+\frac{3}{2}}$ حاصل ہوتا ہے جو درج بالا مساوات سے مختلف ہے۔ایسی غلطی سے بچنے کی خاطر پہلے دئے گئے تفاعل کے نسب نما اور شمار کنندہ کو یوں لکھیں کہ ان کے بلند تر درجہ s کا عددی سر اکائی کے برابر ہو۔

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{5(s+\frac{2}{5})}{2\left(s^2+\frac{5}{2}s+\frac{3}{2}\right)}$$

نسب نما میں $s^2+\frac{5}{2}s+\frac{3}{2}$ کے جذر اب بھی $s_1=-1$ اور $s_2=-\frac{3}{2}$ ہیں لہٰذا درج بالا مساوات کو ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{5(s+\frac{2}{5})}{2(s+1)(s+\frac{3}{2})}$$

[21] میں یہ غلطی بار بار کر چکا ہوں۔

مشق 12.1: شکل 12.6-الف کا تبادلی تفاعل مساوات 12.9 میں دیا گیا ہے۔ اس کے صفر اور قطب دریافت کریں۔

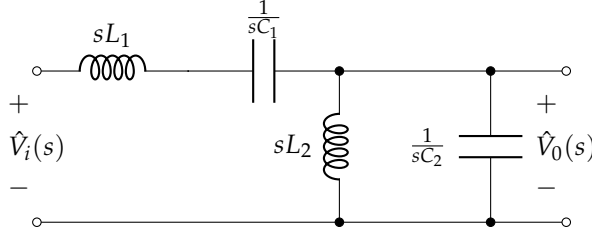
جوابات: $-z_1 = 0\,\text{Hz}$ ، $-p_1 = -20\,\text{Hz}$ ، $-p_2 = -20\,\text{kHz}$

مشق 12.2: شکل 12.6-الف میں داخلی اشارے کو درپیش رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $R_m + \frac{R_i}{1+sR_iC_i}$

مشق 12.3: شکل 12.9 میں تبادلی تفاعل $\frac{\hat{V}_0(s)}{\hat{V}_i(s)}$ حاصل کریں۔

جواب:

$$\frac{\hat{V}_0(s)}{\hat{V}_i(s)} = \frac{s^2 L_2 C_1}{s^4 L_1 L_2 C_1 C_2 + s^2 (L_1 C_1 + L_2 C_2 + L_2 C_1) + 1}$$

شکل 12.9: مثال 12.3 کا دور۔

12.3 سائن نما تعددی تجزیہ

بعض اوقات ہم جال کو کسی مخصوص تعدد پر چلاتے ہیں۔اس کی مثال 50 Hz پر چلنے والا واپڈا کا نظام ہے۔اس کے برعکس کئی ادوار بدلتا تعدد پر استعمال کئے جاتے ہیں۔ سمعی ایمپلیفائر ایسا دور ہے جو 20 Hz تا 20 kHz کے تعدد پر چلایا جاتا ہے۔ہم یہاں ادوار کی کارکردگی بالمقابل تعدد میں دلچسپی رکھتے ہیں۔تبادلی تفاعل مخلوط عدد ہے لہٰذا اس کو زاویائی طرز میں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|e^{j\phi(\omega)} \tag{12.14}$$

جہاں مطلق مقدار کا تفاعل $\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|$ اور زاویائی تفاعل $\phi(\omega)$ دونوں تعدد پر منحصر ہیں۔ مطلق مقدار بالمقابل تعدد کے خط کو **مقداری خصلت**[22] اور زاویہ بالمقابل تعدد کے خط کو **زاویائی خصلت**[23] کہتے ہیں۔

12.3.1 بوڈا خطوط

افقی محور پر $\log_{10}\omega$ اور عمودی محور پر $20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|$ رکھنے سے **مقداری بوڈا خط**[24] ملتا[25] ہے۔ جیسے آپ آگے جا کر دیکھیں گے، تبادلی تفاعل کو دیکھ کر بوڈا خط کھینچا جاتا ہے۔یہی بوڈا خطوط کی مقبولیت کی وجہ ہے۔**تعدد تابع**[26] ادوار مثلاً ایمپلیفائر، چھلنی وغیرہ کے تجزیے اور تخلیق میں بوڈا خطوط نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ مقداری بوڈا خط کے عمودی محور کی پیمائش **ڈیسی بیل**[27] dB میں کی جاتی ہے۔ڈیسی بیل کو بنیادی طور پر آواز کے طاقت کی تناسب ناپنے کے لئے استعمال کیا جاتا تھا جہاں دو طاقتوں کے تناسب کے لوگارتھم $\log_{10}\frac{P_2}{P_1}$ کو **بیل**[28] میں ناپا

[22] magnitude characteristic
[23] phase characteristic
[24] Bode plots
[25] ہینڈرک واڈ بوڈا نے اس طرز کو دریافت کیا۔
[26] frequency dependent
[27] decibel
[28] Bell

جاتا تھا۔ جیسے ایک میٹر $1\,\mathrm{m}$ میں دس ڈیسی میٹر $10\,\mathrm{dm}$ ہوتے ہیں، اسی طرح ایک بیل میں دس ڈیسی بیل ہوتے ہیں لہٰذا ڈیسی بیل کا کلیہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \tag{12.15}$$

اگر دونوں طاقت یکساں قیمت کے مزاحمت R کو مہیا کی جائے تب $P = I^2R$ اور $P = \frac{V^2}{R}$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} &= 10\log_{10}\frac{\left|\hat{I}_2\right|^2 R}{\left|\hat{I}_1\right|^2 R} = 20\log_{10}\frac{\left|\hat{I}_2\right|}{\left|\hat{I}_1\right|}\\ \text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} &= 10\log_{10}\frac{\left|\hat{V}_2\right|^2 /R}{\left|\hat{V}_1\right|^2 /R} = 20\log_{10}\frac{\left|\hat{V}_2\right|}{\left|\hat{V}_1\right|}\end{aligned} \tag{12.16}$$

مساوات 12.16 میں دیے ڈیسی بیل کے کلیے اتنے مقبول ہوئے ہیں کہ غیر یکساں مزاحمت کی صورت میں بھی دباو کی تناسب یا رو کی تناسب کو انہیں کلیوں سے ڈیسی بیل میں ناپا جاتا ہے۔

مشق 12.4: ایک ایمپلیفائر کو $P_i = 10\,\mathrm{mW}$ طاقت کا داخلی اشارہ فراہم کیا جاتا ہے جبکہ ایمپلیفائر خارجی جانب سپیکر کو $P_o = 15\,\mathrm{W}$ طاقت فراہم کرتا ہے۔ایمپلیفائر کی افزائش طاقت $A_p = \frac{P_o}{P_i}$ کو ڈیسی بیل میں حاصل کریں۔

جواب: $A_p = 31.76\,\mathrm{dB}$

مشق 12.5: ایک ایمپلیفائر کی افزائش دباو $A_v = 22\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔اس کی افزائش دباو کو ڈیسی بیل میں لکھیں۔

جواب: $A_v = 26.85\,\text{dB}$

مشق 12.6: سلسلہ وار جڑے $414\,\Omega$ اور $1000\,\Omega$ مزاحمتوں کو $\hat{V}_i = 100\,\text{V rms}$ کا داخلی اشارہ مہیا کیا جاتا ہے جبکہ $1\,\text{k}\Omega$ پر خارجی اشارہ $\hat{V}_0$ ناپا جاتا ہے۔ جال کی افزائش دباو کو ڈیسی بیل میں دریافت کریں۔

جواب: خارجی دباو $\hat{V}_0 = \frac{100\times1000}{1000+414} = 70.72\,\text{V rms}$ ہے جو داخلی دباو کے 0.7072 گنا ہے۔ دباو کی قیمت 0.7072 گنا ہونے سے طاقت کی قیمت 0.5 گنا رہ جاتی ہے جو $-3\,\text{dB}$ کے برابر ہے۔

بوڈا مقداری خط کھینچنا چند مثالوں سے سیکھتے ہیں۔ پہلی مثال میں تبادلی تفاعل درج ذیل لیتے ہیں جس میں ایک عدد صفر پایا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = K(j\omega + z_1) \tag{12.17}$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے معیاری شکل میں لکھتے ہیں جہاں دوسری قدم پر $Kz_1 = K_0$ لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\omega) &= Kz_1\left(1 + j\frac{\omega}{z_1}\right)\\ &= K_0\left(1 + j\frac{\omega}{z_1}\right)\end{aligned} \tag{12.18}$$

اس کی مطلق قیمت

$$\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = K_0\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} \tag{12.19}$$

کا $20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|$ لیتے ہیں

$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10} K_0 + 20\log_{10}\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} \tag{12.20}$$

جس میں $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 12.20 پر غور کریں۔اس کا پہلا جزو ایک مستقل ہے جو تعدد پر منحصر نہیں ہے۔اس کو شکل 12.10-الف میں دکھایا گیا ہے۔مساوات کے دوسرے جزو کو دو مختلف تعدد کے پٹیوں پر دیکھتے ہیں۔اگر تعدد کی قیمت z_1 سے بہت کم ہو یعنی $\omega \ll z_1$ تب $\frac{\omega^2}{z_1^2} \ll 1$ ہو گا لہٰذا دوسرے جزو میں $\frac{\omega^2}{z_1^2}$ کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے دوسرا جزو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\log_{10} 1 = 0$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z_1^2}} \approx 20\log_{10}\sqrt{1+0} = 0\,\text{dB}$$

شکل 12.10-الف میں z_1 سے بہت کم تعدد پر دوسرا جزو $0\,\text{dB}$ کے برابر ہو گا۔نقطہ a پر $\omega = \frac{z_1}{100}$ ہے لہٰذا اس نقطے پر دوسرا جزو صفر ڈیسی بیل دکھایا گیا ہے۔اس نقطے کی نشاندہی دائرے سے کی گئی ہے۔اسی طرح نقطہ b پر $\omega = \frac{z_1}{10}$ ہے لہٰذا یہاں بھی دوسرا جزو صفر ڈیسی بیل کے برابر ہے۔

آئیں اب مساوات 12.20 کے دوسرے جزو کو z_1 سے بہت زیادہ تعدد پر دیکھیں۔اگر $\omega \gg z_1$ ہو تب اس جزو میں $\frac{\omega^2}{z_1^2} \gg 1$ ہو گا لہٰذا اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

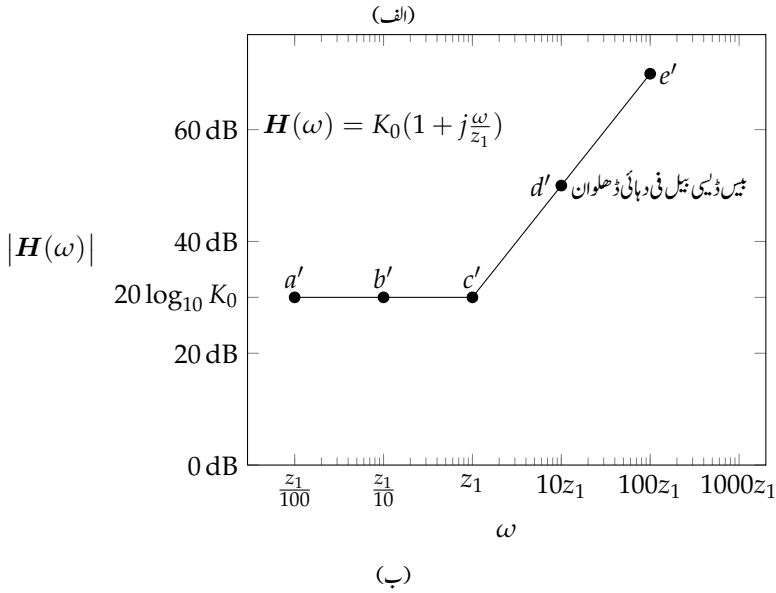
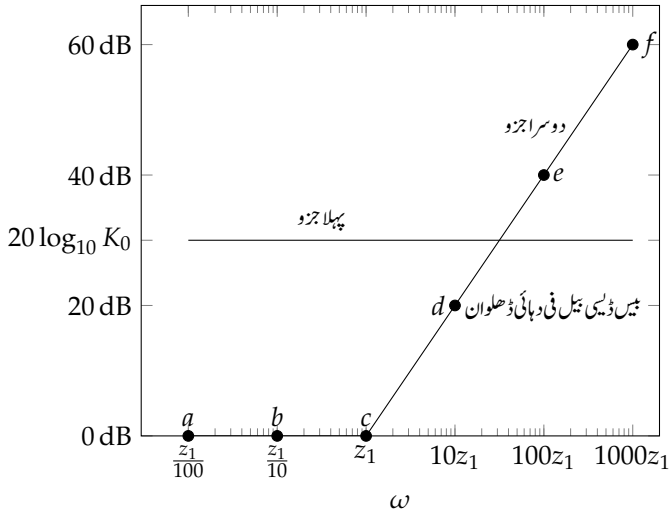
$$20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z_1^2}} \approx 20\log_{10}\sqrt{\frac{\omega^2}{z_1^2}} = 20\log_{10}\frac{\omega}{z_1}$$

جس کی قیمت $\omega = z_1$ پر

$$20\log_{10}\frac{\omega}{z_1} = 20\log_{10}\frac{z_1}{z_1} = 20\log_{10} 1 = 0\,\text{dB}$$

اور $\omega = 10z_1$ پر

$$20\log_{10}\frac{\omega}{z_1} = 20\log_{10}\frac{10z_1}{z_1} = 20\log_{10} 10 = 20\,\text{dB}$$

حاصل ہوتی ہے۔ان قیمتوں کو شکل 12.10-الف میں نقطہ c اور d ظاہر کرتی ہیں۔اسی طرح $\omega = 100z_1$ اور $\omega = 1000z_1$ پر اس جزو کی قیمتیں $40\,\text{dB}$ اور $60\,\text{dB}$ حاصل ہوتی ہیں جنہیں شکل میں نقطہ e اور f ظاہر کرتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\omega = z_1$ سے سیدھا خط نکلتا ہے جس کی قیمت $10z_1$ تعدد پر بڑھ کر $20\,\text{dB}$ ہو جاتی ہے۔یوں نقطہ c پر تعدد z_1 کے برابر ہے اور مساوات 12.20 کے دوسرے جزو کی قیمت $0\,\text{dB}$ ہے۔تعدد دس گنا یعنی $\omega = 10z_1$ کرنے سے اس جزو کی قیمت $20\,\text{dB}$ ہو جاتی ہے جسے

شکل 12.10: ایک عدد صفر والے تبادلی تفاعل کا مقداری بوڈا خط۔

نقطہ d ظاہر کرتا ہے۔تعدد مزید دس گنا بڑھانے $\omega = 100z_1$ سے اس جزو کی قیمت مزید $20\,\mathrm{dB}$ بڑھ کر $40\,\mathrm{dB}$ ہو جاتی ہے جس سے نقطہ e حاصل ہوتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ $\omega = z_1$ تعدد سے شروع ہوتے اس خط کی ڈھلوان بیس ڈیسی بیل فی دہائی کے برابر ہے۔

مساوات 12.20 کے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے شکل 12.10-ب حاصل ہوتا ہے۔شکل-الف میں $\omega = \frac{z_1}{100}$ تعدد پر پہلا جزو $20\log_{10} K_0$ اور دوسرا جزو $0\,\mathrm{dB}$ کے برابر ہے لہٰذا ان کا مجموعہ $20\log_{10} K_0'$ کے برابر ہو گا جسے شکل-ب میں نقطہ a' دکھایا گیا ہے۔اسی طرح بقایا تعدد پر مجموعہ لیتے ہوئے b' ، c' ، d' اور e' نقطے حاصل کئے جاتے ہیں۔

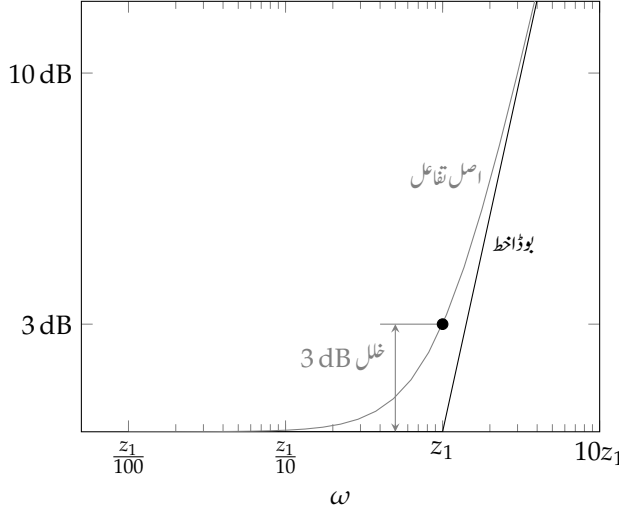
شکل 12.10-ب کو دیکھتے ہوئے درج بالا تمام قصے کا نچوڑ یہ ہے۔صفر تعدد سے z_1 تعدد تک مساوات 12.18 کے تبادلی تفاعل کی مقدار $20\log_{10} K_0$ رہتی ہے جبکہ z_1 تعدد سے اس کی مقدار بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنے شروع ہو جاتی ہے اور مسلسل اسی شرح سے بڑھتی ہے۔یوں مساوات 12.20 سے K_0 اور z_1 حاصل کرتے ہوئے مقداری بوڈا خط کھینچا جا سکتا ہے۔

شکل 12.11 میں مساوات 12.20 کے دوسرے جزو $20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z_1^2}}$ کو ہلکی سیاہی میں کھینچا گیا ہے اور ساتھ ہی اس کا بوڈا خط گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔آئیں دونوں کی قیمتیں کونے پر حاصل کریں۔کونا $\omega = z_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر اس جزو کی اصل قیمت درج ذیل ہے

$$20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z_1^2}} = 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{z_1^2}{z_1^2}} = 20\log_{10}\sqrt{2} = 3\,\mathrm{dB} \tag{12.21}$$

جبکہ بوڈا خط کی قیمت اس تعدد پر $0\,\mathrm{dB}$ ہے۔یوں بوڈا خط کے قیمت میں کونے پر $3\,\mathrm{dB}$ کا خلل پایا جاتا ہے جو بوڈا خط اور اصل تفاعل کے قیمت میں زیادہ سے زیادہ فرق ہے۔شکل 12.11 میں اس خلل کی وضاحت کی گئی ہے۔اس شکل میں یہ بھی دیکھا جا سکتا ہے کہ کونے سے دس گنا کم تعدد $\omega = \frac{z_1}{10}$ یا دس گنا زیادہ تعدد $\omega = 10z_1$ پر اصل تفاعل اور بوڈا خط میں فرق قابل نظر انداز ہوتا ہے۔

آئیں اب درج ذیل تبادلی تفاعل لیتے ہیں جس میں ایک قطب پایا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{K}{j\omega + p_1} \tag{12.22}$$

شکل 12.11: کونے پر بوڈا خط میں 3 dB خلل پایا جاتا ہے۔

اس کو ترتیب دے کر لکھتے ہیں جہاں $\frac{K}{p_1} = K_0$ لکھا گیا ہے۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{K}{p_1\left(1 + j\frac{\omega}{p_1}\right)} = \frac{K_0}{1 + j\frac{\omega}{p_1}} \tag{12.23}$$

اس کی مطلق قیمت حاصل کرتے ہیں

$$\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p_1^2}}} \tag{12.24}$$

جس کو $20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|$ صورت میں لکھتے ہیں

$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10} K_0 - 20\log_{10}\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p_1^2}} \tag{12.25}$$

جہاں $\log_{10}\frac{x}{y} = \log_{10} x - \log_{10} y$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 12.25 کے دو اجزاء پائے جاتے ہیں جنہیں شکل 12.12-الف میں دکھایا گیا ہے جبکہ ان کے مجموعے کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ p_1 سے کم تعدد پر تبادلی تفاعل کی مطلق قیمت $20\log_{10} K_0$

رہتی ہے جبکہ p_1 تعدد سے شروع ہو کر اس کی قیمت مسلسل منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی تبدیل ہوتی ہے۔شکل-الف میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے اصل دوسرا جزو بھی دکھایا ہے جہاں بوڈا خط میں $-3\,\mathrm{dB}$ کا خلل واضح ہے۔شکل-ب میں پورا تفاعل اور پورے تفاعل کا بوڈا خط دکھائے گئے ہیں۔بوڈا خط میں کونے پر منفی بیس ڈیسی بیل کا خلل پایا جاتا ہے۔بوڈا خط اور اصل تفاعل میں زیادہ سے زیادہ خلل کونے پر پایا جاتا ہے۔اگر کونا تفاعل کے صفر پر ہو تب خلل $3\,\mathrm{dB}$ ہوتا ہے اور اگر کونا تفاعل کے قطب کی وجہ سے ہو تب خلل $-3\,\mathrm{dB}$ ہوتا ہے۔

مثال 12.4: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega) = 10(j\omega + 10)$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

حل:اس کو ترتیب دیتے ہوئے معیاری شکل میں لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = 100\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

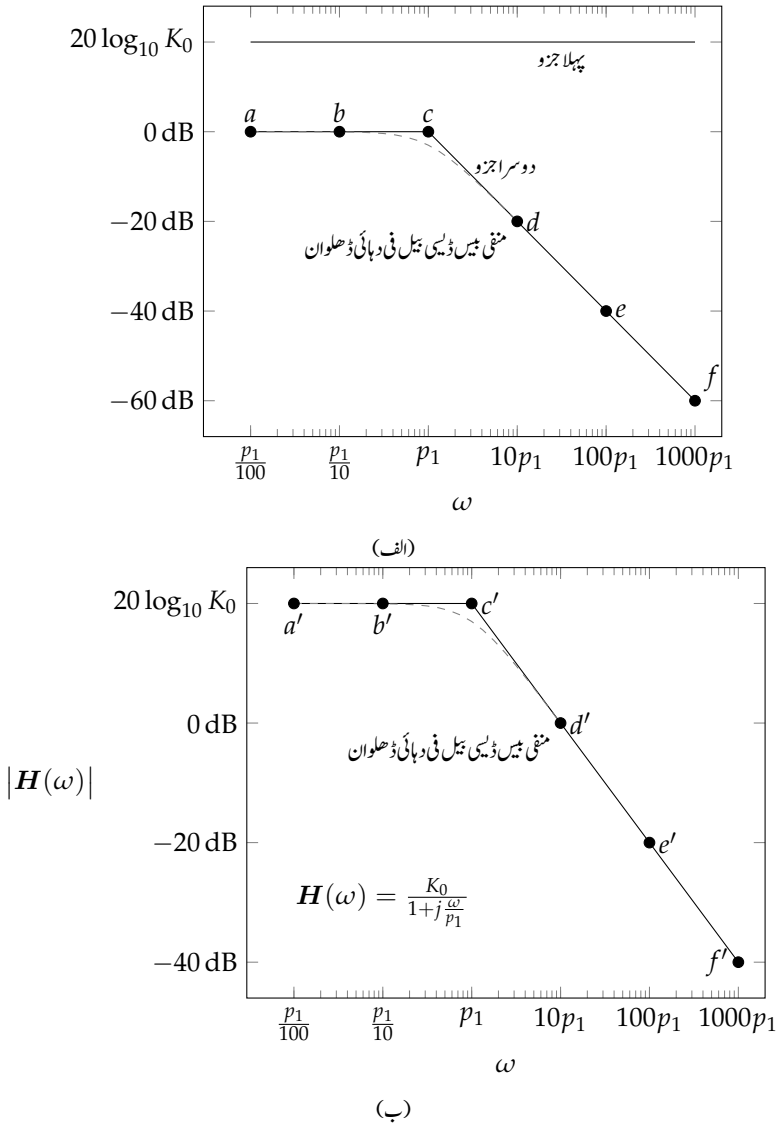
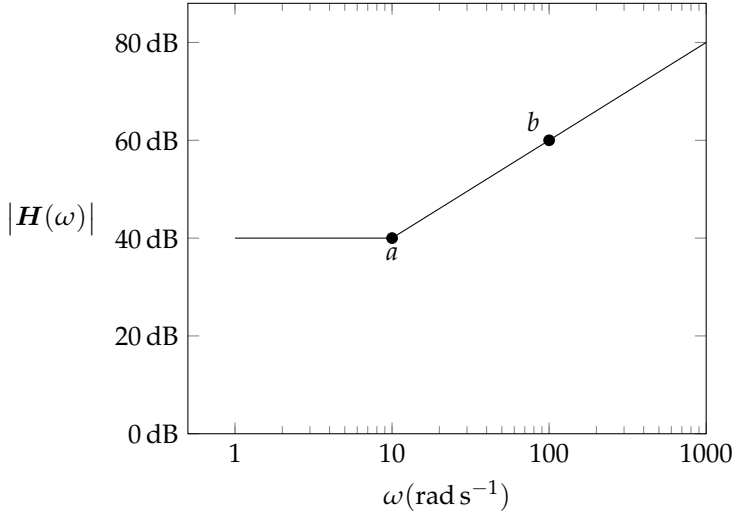
یوں نیم لوگارتھم محور پر خط کھینچتے ہوئے $10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے کم تعدد پر تفاعل کی مطلق قیمت $20\log_{10}100 = 40\,\mathrm{dB}$ ہو گی جبکہ اس تعدد سے زیادہ تعدد پر مطلق قیمت بتدریج بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھے گی۔ان نتائج کو شکل 12.13 میں دکھایا گیا ہے۔نقطہ a پر تعدد $10\,\mathrm{radian/s}$ اور تفاعل کی مطلق قیمت $40\,\mathrm{dB}$ ہے۔تعدد کو دس گنا کرنے سے $\omega = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ حاصل ہوتا ہے جس پر تفاعل کی مطلق مقدار بڑھ پر $40\,\mathrm{dB} + 20\,\mathrm{dB} = 60\,\mathrm{dB}$ ہو جاتی ہے جسے نقطہ b سے ظاہر کیا گیا ہے۔ان دو نقطوں سے گزرتی سیدھی خط کھینچی گئی ہے جس کی ڈھلوان بیس ڈیسی بیل فی دہائی ہو گی۔

مثال 12.5: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{1000(j\omega+100)}{j\omega+10000}$ کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

حل:اس کو معیاری شکل میں لکھتے ہوئے

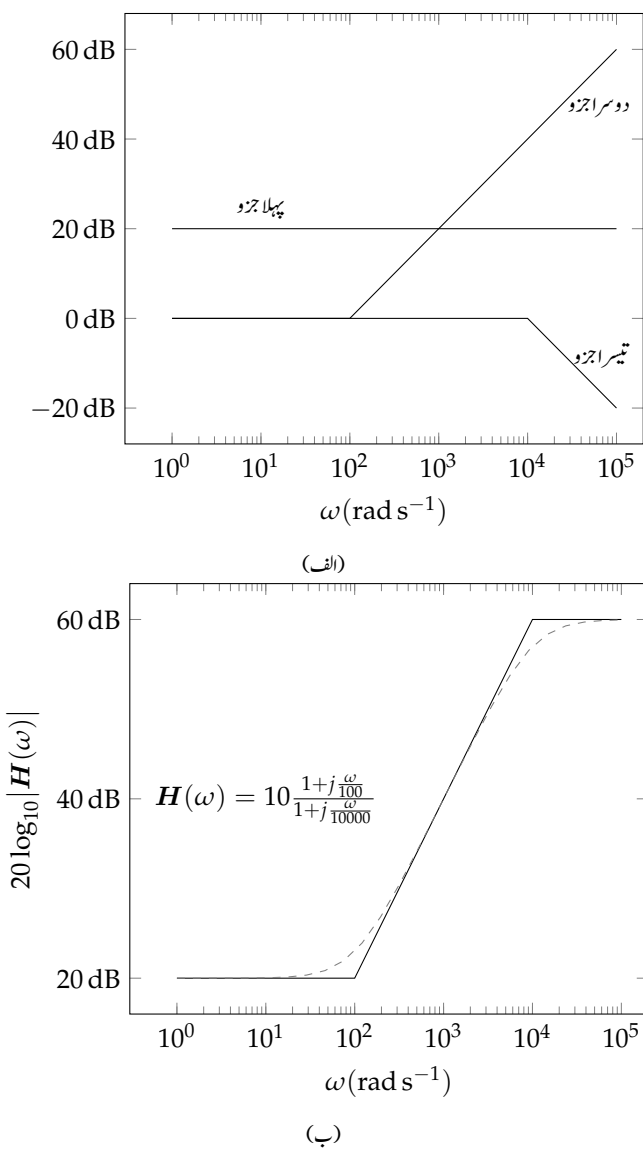
$$\boldsymbol{H}(\omega) = 10\left(\frac{1 + j\frac{\omega}{100}}{1 + j\frac{\omega}{10000}}\right)$$

(الف)

(ب)

شکل 12.12: ایک عدد قطب والے تبادلی تفاعل کا مقداری بوڈا خط۔

شکل 12.13: مثال 12.4 کا دور۔

مطلق قیمت کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10}10 + 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100^2}} - 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10000^2}}$$

درج بالا مساوات کے تینوں اجزاء کو شکل 12.14-الف میں اور ان کے مجموعے کو شکل 12.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔ درج بالا مساوات کو دیکھ کر بوڈا مقداری خط کھینچا جاتا ہے جہاں $\omega = 100\,\text{rad s}^{-1}$ سے کم تعدد پر مقدار $20\log_{10}10 = 20\,\text{dB}$ ہے، ٹھیک $20\log_{10}10 = 20\,\text{dB}$ تعدد پر مقدار کی قیمت بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنا شروع ہو جاتی ہے۔ تعدد $\omega = 10\,\text{krad s}^{-1}$ سے زیادہ تعدد پر دوسرے جزو کے مثبت بیس ڈیسی بیل فی دہائی کو تیسرے جزو کا منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی مکمل طور پر ختم کرتا ہے لہٰذا بوڈا خط اسی قیمت پر برقرار رہتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے اصل تفاعل کا خط بھی دکھایا گیا ہے جہاں بوڈا خط کے کونوں پر $\mp 3\,\text{dB}$ خلل واضح ہے۔

شکل 12.14: مثال 12.5 کا بوڈا خط۔

آئیں اب تبادلی تفاعل کے زاویائی بوڈا خط[29] کھینچنا سیکھیں۔ہم درج ذیل تفاعل کو مثال بناتے ہیں

$$\boldsymbol{H}(\omega) = K_0 \left(1 + j\frac{\omega}{z_1}\right) \tag{12.26}$$

جس کا زاویہ ذیل ہے

$$\underline{/\boldsymbol{H}(\omega)} = \underline{/\tan^{-1} \tfrac{\omega}{z_1}} \tag{12.27}$$

جس کو شکل 12.15 میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔عین کونے $(\omega = z_1)$ پر زاویہ

$$\underline{/\boldsymbol{H}(z_1)} = \underline{/\tan^{-1} \tfrac{\omega}{z_1}} = \underline{/\tan^{-1} \tfrac{z_1}{z_1}} = \underline{/45^\circ}$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ کونے سے دس گنا زیادہ تعدد $(\omega = 10z_1)$ پر

$$\underline{/\boldsymbol{H}(10z_1)} = \underline{/\tan^{-1} \tfrac{10z_1}{z_1}} = \underline{/84.3^\circ}$$

اور کونے سے دس گنا کم تعدد $(\omega = \frac{z_1}{10})$ پر

$$\underline{/\boldsymbol{H}(10z_1)} = \underline{/\tan^{-1} \tfrac{\frac{z_1}{10}}{z_1}} = \underline{/5.7^\circ}$$

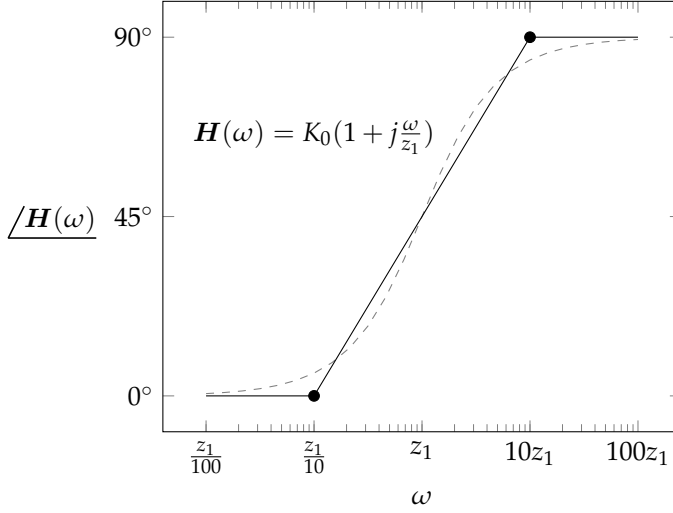
زاویے حاصل ہوتے ہیں۔بوڈا زاویائی خط میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کونے سے دس گنا کم تعدد $(\omega = \frac{z_1}{10})$ پر 0° اور کونے سے دس گنا زیادہ تعدد $(\omega = 10z_1)$ پر 90° چنتے ہوئے انہیں سیدھی لکیر سے ملایا جاتا ہے جبکہ $\omega < \frac{z_1}{10}$ پر زاویہ 0° اور $\omega > 10z_1$ پر زاویہ 90° رکھا جاتا ہے۔شکل 12.15 میں سیدھے خطوط پر مبنی بوڈا زاویائی خط کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 12.6: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{50}{1+j\frac{\omega}{300}}$ کا زاویائی بوڈا خط کھینچیں۔

حل:اس تفاعل کا زاویہ ذیل ہے جہاں کونا $\omega = 300\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر پایا جاتا ہے۔

$$\underline{/\boldsymbol{H}(\omega)} = \frac{1}{\underline{/\tan^{-1} \frac{\omega}{300}}} = \underline{/-\tan^{-1} \tfrac{\omega}{300}} \tag{12.28}$$

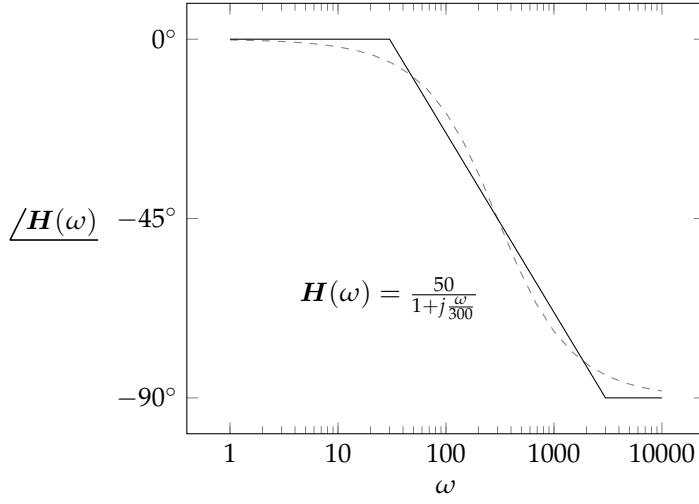
---

[29] Bode phase plot

شکل 12.15: ایک صفر والے تفاعل کا زاویائی بوڈا خط۔

اس تفاعل کو شکل 12.16 میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

بوڈا خط میں کونے سے دس گنا کم تعدد پر زاویہ $0°$ اور کونے سے دس گنا زیادہ تعدد پر زاویہ $-90°$ چنتے ہوئے ان نقطوں کو سیدھے خط سے ملایا جاتا ہے۔یوں $\omega = 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $0°$ اور $\omega = 3000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $90°$ چنتے ہوئے انہیں سیدھے لکیر سے ملایا گیا ہے۔مزید $\omega = 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے کم تعدد پر زاویہ $0°$ ہی رکھا جاتا ہے جبکہ $\omega = 3000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے زیادہ تعدد پر زاویہ $-90°$ رکھا جاتا ہے۔بوڈا زاویائی خط کو شکل 12.16 میں گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

یوں کونے $(\omega = 300\,\mathrm{rad\,s^{-1}})$ پر، کونے سے دس گنا زیادہ تعدد $(\omega = 3000\,\mathrm{rad\,s^{-1}})$ پر اور کونے سے دس گنا کم تعدد $(\omega = 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}})$ پر زاویے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

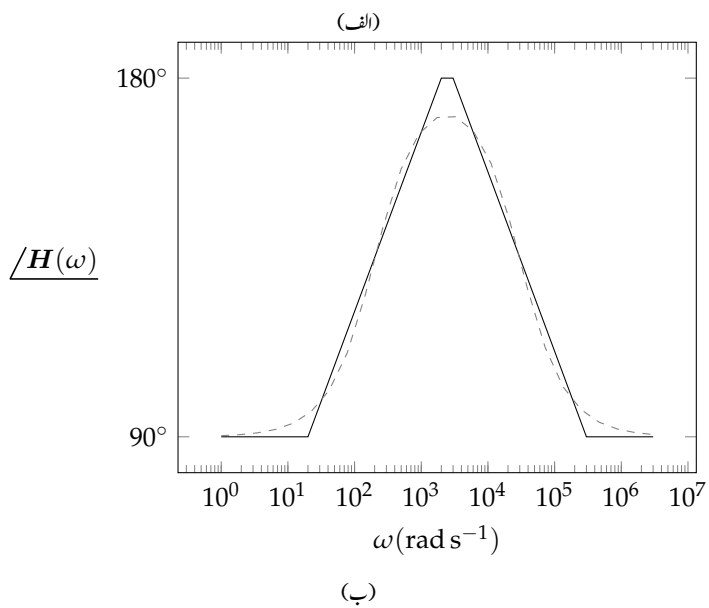
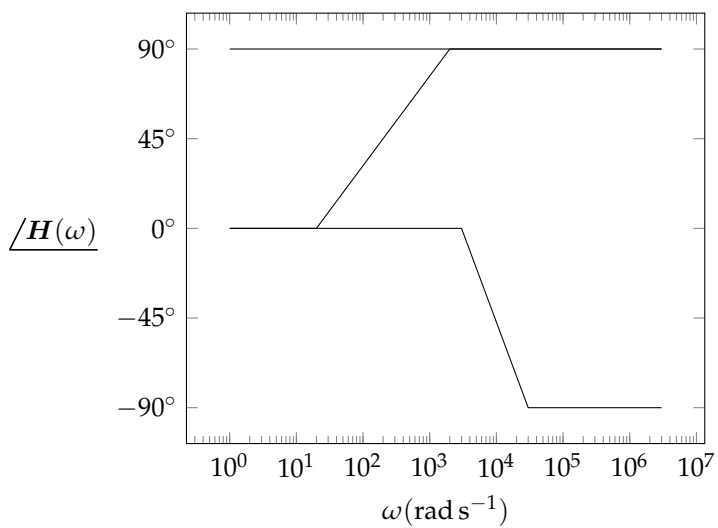
$$\angle \boldsymbol{H}(200) = \angle -\tan^{-1}\tfrac{300}{300} = \angle -45°$$
$$\angle \boldsymbol{H}(2000) = \angle -\tan^{-1}\tfrac{3000}{300} = \angle -84.3°$$
$$\angle \boldsymbol{H}(20) = \angle -\tan^{-1}\tfrac{30}{300} = \angle -5.7°$$

شکل 12.16: ایک قطب والے تفاعل کا بوڈا زاویائی خط۔

مثال 12.7: تبادلی تفاعل $H(\omega)=\frac{j20\omega(1+j\frac{\omega}{200})}{1+j\frac{\omega}{30000}}$ کا زاویائی بوڈا خط کھینچیں۔

حل: اس تفاعل کا زاویہ لکھتے ہیں۔

$$\underline{/H(\omega)}=\underline{/90^\circ}+\underline{/\tan^{-1}\frac{\omega}{200}}-\underline{/\tan^{-1}\frac{\omega}{30000}}$$

شمار کنندہ میں $j20\omega=0+j20\omega$ لکھتے ہوئے زاویہ $\tan^{-1}\frac{j20\omega}{0}=90^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا رکن $20\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر 0° اور $2\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ پر 90° جبکہ تیسرا رکن $300\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر 0° اور $300\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ پر -90° ہے۔ ان تمام ارکان کو شکل 12.17 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 12.8: تبادلی تفاعل $H(\omega)=\frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{100})(1+j\frac{\omega}{10000})}$ کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

شکل 12.17: مثال 12.7 کا زاویائی بوڈا خط۔

حل: اس تفاعل کی مطلق قیمت

$$\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = \frac{10\omega}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100^2}}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10000^2}}}$$

کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$20\log_{10} 10 + 20\log_{10}\omega - 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100^2}} - 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10000^2}} \tag{12.29}$$

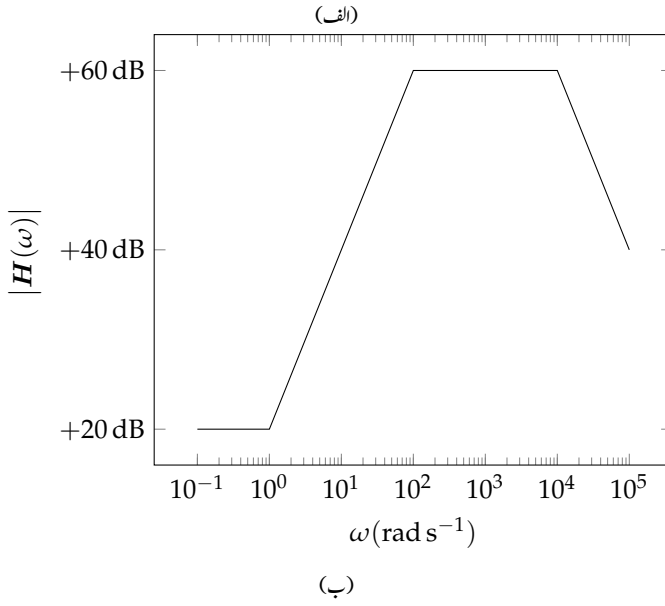
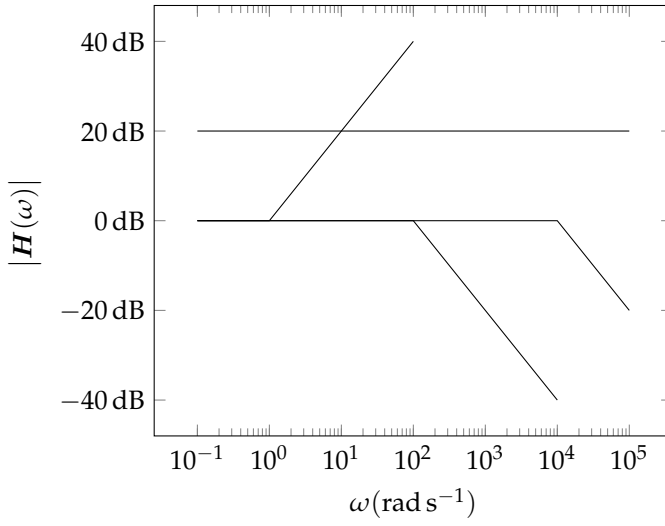
مساوات 12.29 کا پہلا رکن $20\,\mathrm{dB}$ کا مستقل ہے۔اس کا دوسرا رکن $\omega = 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $0\,\mathrm{dB}$ کے برابر ہے جبکہ اس تعدد سے زیادہ تعدد پر بتدریج بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھتا ہے۔تیسرے اور چوتھے ارکان کے بوڈا خط بالترتیب $100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ اور $10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ تعدد پر منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی گھٹنا شروع ہوتے ہیں۔ان تمام ارکان کو شکل 12.18-الف اور ان کا مجموعہ شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

ہمیں عموماً درمیانی تعدد پر بوڈا خط میں زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔ایسی صورت میں بوڈا مقداری خط درمیانی تعدد $(100\,\mathrm{rad\,s^{-1}} < \omega < 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}})$ سے شروع کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔دونوں کونوں سے دور یعنی $\omega \ll 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور $\omega \gg 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $1+\frac{\omega^2}{100^2} \approx \frac{\omega^2}{100^2}$ اور $1+\frac{\omega^2}{10000^2} = 1$ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = \frac{10\omega}{\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{100^2}}\right)\left(\sqrt{1}\right)} = 1000$$

لہٰذا درمیانی تعددی پٹی پر ڈیسی بیل میں مقدار درج ذیل ہو گی

$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10} 1000 = 60\,\mathrm{dB}$$

جسے شکل 12.18-ب میں $\omega = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ تا $10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ دکھایا گیا ہے۔چونکہ حقیقت میں پست تعددی کونے سے کم تعدد پر مقدار مسلسل بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھتے ہوئے عین $\omega = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $60\,\mathrm{dB}$ تک پہنچتی ہے لہٰذا پست تعددی کونے سے بیس ڈیسی بیل فی دہائی ڈھلوان کا خط کھینچیں۔اسی طرح بلند تعدد کونے پر بھی بیس ڈیسی بیل فی دہائی ڈھلوان کا خط کھینچیں۔یوں مکمل بوڈا خط حاصل ہو گا۔

شکل 12.18: ایک صفر اور دو قطب والے تفاعل کا بوڈا مقداری خط۔

مثال 12.9: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{10\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)\left(1+j\frac{\omega}{1000}\right)}{\left(1+j\frac{\omega}{100\,000}\right)^2\left(1+j\frac{\omega}{1\,000\,000}\right)^2}$ کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

حل: تفاول کی مقدار کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔ان کا مجموعہ شکل 12.19 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| &= 20\log_{10}10+20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega}{10^2}}+20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^6}}\\&\quad-40\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^10}}-40\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^{12}}}\end{aligned}$$

یہاں $10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر درج بالا مساوات کا دوسرا جزو بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنا شروع ہو جات ہے جبکہ تیسرا جزو اسی شرح سے $1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر بڑھنا شروع ہوتا ہے۔یوں ان کا مجموعہ لیتے ہوئے $1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ تعدد سے خط کی ڈھلوان $40\,\mathrm{dB}$ فی دہائی ہو گی۔اسی طرح $100\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ پر چھوتا جزو $40\,\mathrm{dB}$ فی دہائی سے گھٹنا شروع ہوتا ہے جو دوسرے اور تیسرے اجزاء کو ختم کرتا ہے لہٰذا بوڈا خط برقرار $140\,\mathrm{dB}$ پر رہتا ہے۔آخر کار $1\,\mathrm{Mrad\,s^{-1}}$ پر پانچواں جزو چالیس ڈیسی بیل فی دہائی سے گھٹنا شروع ہوتا ہے۔

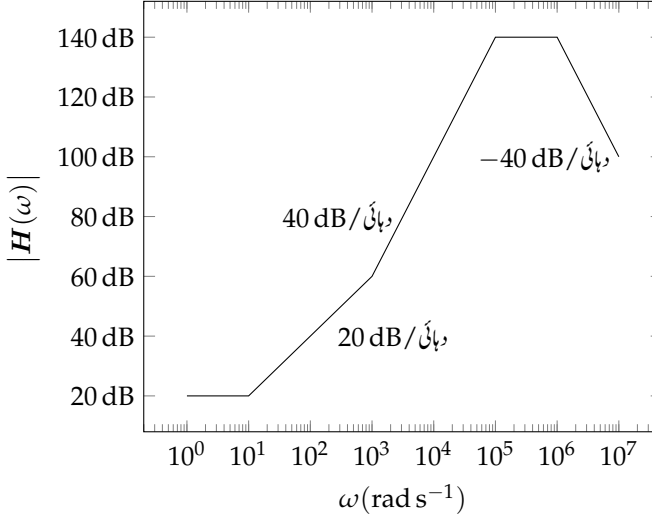
تبادلی تفاعل کے صفر اور قطب مخلوط اعداد بھی ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں ان کے جوڑی دار جوڑے پائے جاتے ہیں۔آئیں ان پر غور کریں۔تبادلی تفاعل

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

کے قوسین کو ضرب دیتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(s)&=\frac{K}{s^2+s(a+b)+ab}\\&=\frac{K}{ab[1+\frac{s(a+b)}{ab}+\frac{s^2}{ab}]}\end{aligned}$$

اس کو درج ذیل معیاری صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{K_0}{1+2\zeta(s\tau)+(s\tau)^2}\tag{12.30}$$

شکل 12.19: مثال 12.9 کا مقداری بوڈا خط۔

جہاں

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$
$$\zeta = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 12.30 میں ζ کو **تقصیری تناسب**[30] کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ ہمیں مساوات 12.30 دی گئی ہے اور ہم اس کے قطب جاننا چاہتے ہیں۔ قطب جاننے کے لئے نسب نما کے جذر حاصل کرنے ہوں گے جنہیں دو درجی مساوات کے کلیے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$s = \frac{-2\zeta\tau \mp \sqrt{4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2}}{2\tau^2}$$

جذر کی علامت کے اندر مقدار کی قیمت صفر سے زیادہ، صفر کے برابر یا صفر سے کم ممکن ہے یعنی

$$4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2 > 0$$
$$4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2 = 0$$
$$4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2 < 0$$

[30] damping ration

جن سے بالترتیب درج ذیل شرائط حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\zeta > 1 && \text{حقیقی دو عدد مختلف قطب} \\ &\zeta = 1 && \text{حقیقی دو عدد یکساں قطب} \\ &\zeta < 1 && \text{جوڑی دار مخلوط قطب} \end{aligned} \tag{12.31}$$

تقصیری تناسب کی قیمت اکائی سے زیادہ یا اکائی کے برابر ہونے کی صورت میں حقیقی قطب پائے جاتے ہیں جن پر ہم غور کر چکے ہیں۔آئیں مخلوط قطب پر غور کریں۔

مشق 12.7: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s) = \frac{35}{4s^2+2s+1}$ کا τ اور ζ حاصل کریں۔اس تفاعل کے قطب بھی دریافت کریں۔تفاعل کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھیں۔

جواب: $\tau = 2$ ، $\zeta = 0.5$ ، $p_1 = -s_1 = \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، $p_2 = -s_2 = \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، $\boldsymbol{H}(s) = \frac{35}{(s+\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4})(s+\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4})}$

مساوات 12.30 میں $s = j\omega$ پر کر کے ترتیب دیتے ہوئے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(\omega) &= \frac{K_0}{1 + 2\zeta(j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2} \\ &= \frac{K_0}{1 - \omega^2\tau^2 + j2\zeta\omega\tau} \end{aligned}$$

اس کی مطلق مقدار کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10} K_0 - 20\log_{10}\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2 + (2\zeta\omega\tau)^2} \tag{12.32}$$

مساوات 12.32 کا پہلا جزو مستقل ہے جبکہ دوسرے جزو کی مقدار کا دارومدار تعدد کے علاوہ تقصیری تناسب پر بھی منحصر ہے۔ شکل 12.20-الف میں مختلف ζ کے لئے مساوات 12.32 کے دوسرے جزو کے خطوط دکھائے گئے ہیں۔اب تک ہم دیکھتے آرہے ہیں کہ قطب پر مقداری خط گھٹنے شروع ہوتا ہے لیکن یہاں ایسا نہیں ہو رہا ہے۔مخلوط

قطبین کی صورت میں مقداری خط گھٹنے سے پہلے بڑھتا ہے۔ بڑھنے کی مقدار کا دارومدار ζ پر ہے۔ تقصیری تناسب کی قیمت صفر $(\zeta = 0)$ ہونے کی صورت میں $\omega\tau = 1$ پر تفاعل بے قابو بڑھتا ہے۔ شکل میں $\zeta = 0.02$ کے خط کو نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ تقصیری تناسب کی قیمت صفر ہونا دور میں گونج یا گمک[31] کو ظاہر کرتی ہے۔

شکل 12.20-ب میں تبادلی تفاعل کا زاویائی خط $\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ کے لئے دکھایا گیا ہے۔

12.4 گمکی ادوار

سلسلہ وار گمک

شکل 12.21 میں سلسلہ وار دور دکھایا گیا ہے جس کی رکاوٹ

$$\boldsymbol{Z}(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \tag{12.33}$$

ہے۔ قوسین کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں اس دور کی رکاوٹ حقیقی مقدار

$$\boldsymbol{Z}(\omega) = R \tag{12.34}$$

یعنی مزاحمتی ہو گی۔ ایسا ایک مخصوص تعدد ω_0 پر ممکن ہے جسے قوسین صفر کے برابر پر کرنے

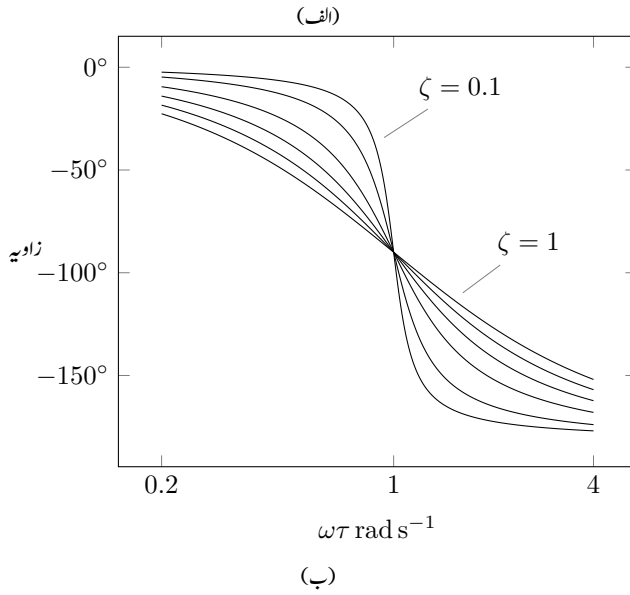
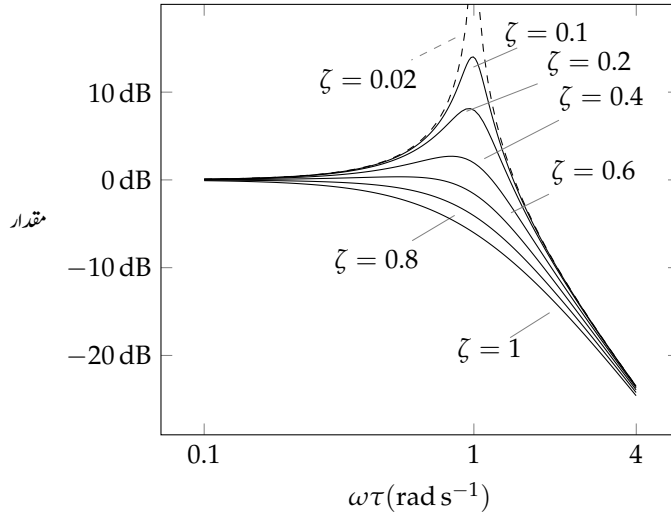
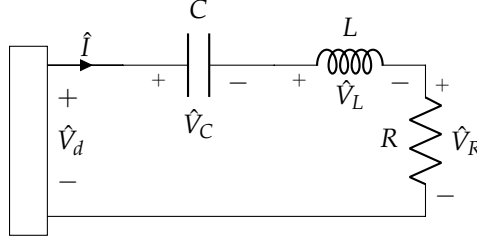
$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{گمکی تعدد} \tag{12.35}$$

اس تعدد (ω_0) کو دور کی گمکی تعدد[32] کہتے ہیں اور اس تعدد پر دور گونجتا یا گمکتا ہے۔ ایسا دور جو گونج سکتا ہو کو گمکی دور[33] کہتے ہیں۔

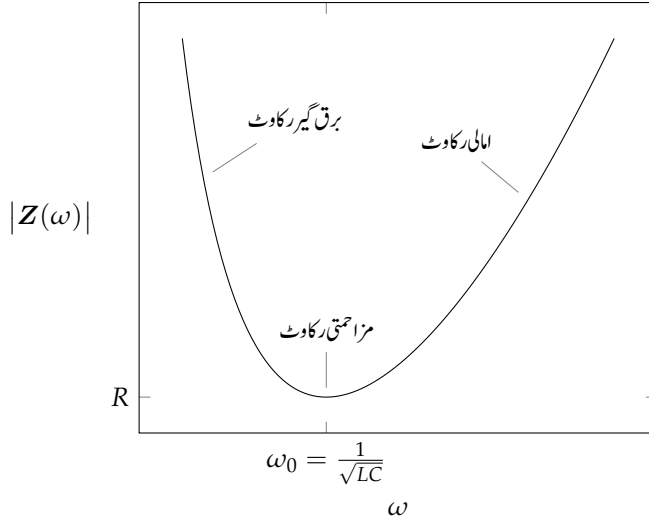
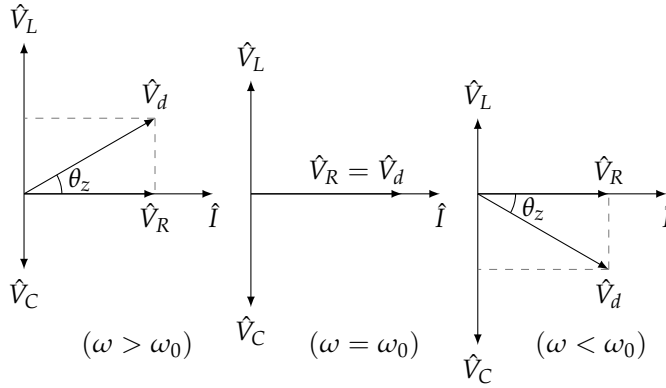
---

[31] resonance
[32] resonant frequency
[33] resonant circuit

شکل 12.20: مختلف تقصیری تناسب کے لئے مخلوط جوڑی دار قطب کے تفاعل کے خط۔

شکل 12.21: سلسلہ وار RLC دور۔

گمکی تعدد پر امالی متعاملیت اور برق گیر متعاملیت برابر ہوتے ہیں۔ چونکہ سلسلہ وار دور میں یکساں رو پائی جاتی ہے لہٰذا گمکی تعدد پر امالی دباو اور برق گیر دباو مقدار میں برابر لیکن آپس میں $180°$ زاویے پر ہوں گے۔ زاویائی طور پر آپس میں بالکل الٹ ہونے کی بنا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا اور یوں شکل 12.21 میں داخلی دباو $\hat{V}_d$ اور مزاحمتی دباو $\hat{V}_R$ برابر ہوں گے۔

گمکی تعدد سے ہٹ کر کسی بھی تعدد پر مساوات 12.33 کا خیالی جزو صفر کے برابر نہیں ہو گا لہٰذا رکاوٹ کی مطلق قیمت R سے زیادہ ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ گمکی تعدد پر رکاوٹ کی قیمت کم سے کم ہو گی اور رو کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔ گمکی تعدد پر دور میں رو اور داخلی دباو ہم زاویہ ہوں گے۔ گمکی تعدد سے کم تعدد پر برق گیر متعاملیت کی مقدار امالی متعاملیت کے مقدار سے زیادہ ہو گی لہٰذا سلسلہ وار رکاوٹ برق گیر خاصیت رکھے گا اور داخلی دباو سے رو آگے پائی جائے گی۔ اس کے برعکس گمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر امالی متعاملیت کی مقدار برق گیر متعاملیت کی مقدار سے زیادہ ہو گی لہٰذا کل رکاوٹ امالی ہو گا اور داخلی دباو سے رو پیچھے ہو گی۔ رکاوٹ کی مقدار بالمقابل تعدد کو شکل 12.22 میں دکھایا گیا ہے۔

رو کے حوالے سے تینوں پرزوں کے دباو کے دوری سمتیات شکل 12.23 میں دکھائے گئے ہیں۔ گمکی تعدد سے کم تعدد پر برق گیر کا دباو امالہ گیر کے دباو سے زیادہ ہے لہٰذا داخلی دباو $\hat{V}_d$ سے رو آگے ہے۔ گمکی تعدد پر داخلی دباو اور رو ہم زاویہ ہیں جبکہ گمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر امالہ کی متعاملیت برق گیر کے متعاملیت سے زیادہ ہے لہٰذا امالی دباو کی قیمت برق گیر دباو سے زیادہ ہے اور یوں داخلی دباو سے رو پیچھے ہے۔ داخلی دباو اور رو کے مابین زاویہ θ_z مساوات 12.33 میں دیے رکاوٹ کا زاویہ ہے۔

$$\theta_z = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{12.36}$$

شکل 12.22: سلسلہ وار RLC کی رکاوٹ بالمقابل تعدد کا خط۔

شکل 12.23: سلسلہ وار RLC کے دوری سمتیات۔

سلسلہ وار RLC دور کا **معیاری مستقل**[34] Q نہایت اہم مقدار ہے جس کی تعریف درج ذیل مساوات دیتی ہے۔

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{12.37}$$

گمکی تعدد پر $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ ہوتا ہے لٰہذا رکاوٹ

$$\boldsymbol{Z} = R + j\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = R$$

ہو گا جس سے

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_d}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\hat{V}_d}{R}$$

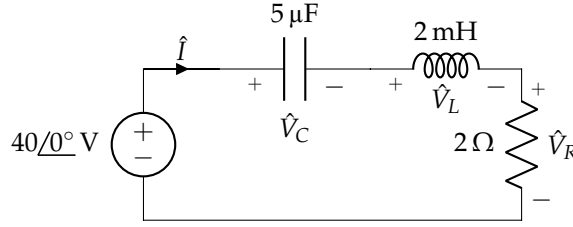
اور

$$\begin{aligned}
\hat{V}_L &= j\omega_0 L\hat{I} = \frac{j\omega_0 L\hat{V}_d}{R}\\
\hat{V}_C &= \frac{\hat{I}}{j\omega C} = \frac{\hat{V}_d}{j\omega RC}\\
\hat{V}_R &= \hat{I}R = \hat{V}_d
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔درج بالا مساوات میں دونوں جانب مطلق قیمتیں لیتے ہوئے گمکی تعدد کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
V_L &= QV_d\\
V_C &= QV_d\\
V_R &= V_d
\end{aligned} \tag{12.38}$$

جہاں دباو کے مطلق قیمتوں کو V_L ، V_C ، V_R اور V_d لکھا گیا ہے۔مساوات 12.38 کے تحت گمکی تعدد پر امالی دباو اور برق گیر دباو کی قیمتیں داخلی دباو کے Q گنا ہوں گے۔یوں $Q > 1$ کی صورت میں امالی اور برق گیر دباو کی قیمت داخلی دباو سے زیادہ ہو گی۔

quality factor[34]

شکل 12.24: مثال 12.10 کا دور۔

مثال 12.10: شکل 12.24 کے دور کی گمکی تعدد اور معیاری مستقل دریافت کریں۔ گمکی تعدد پر رو حاصل کرتے ہوئے تینوں پرزوں کے دباو حاصل کریں۔

حل: گمکی تعدد اور معیاری مستقل دریافت کرتے ہیں۔

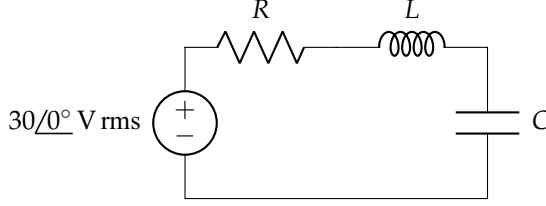
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2\times10^{-3}\times5\times10^{-6}}} = 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$$
$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10\,000\times2\times10^{-3}}{2} = 10$$

گمکی تعدد پر رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I} = \frac{40\underline{/0^\circ}}{2+j10000\times2\times10^{-3}-\frac{j}{10000\times5\times10^{-6}}} = 20\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A}$$

چونکہ گمکی تعدد پر رکاوٹ مزاحمتی ہوتا ہے لہٰذا رو کو $i = \frac{40\underline{/0^\circ}}{2} = 20\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A}$ سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

پرزوں کے دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{V}_R = \hat{I}R = (20\underline{/0^\circ})(2) = 40\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$$
$$\hat{V}_L = (j\omega_0 L)\hat{I} = j10\,000\times2\times10^{-3}\times20\underline{/0^\circ} = 400\underline{/90^\circ}\,\mathrm{V}$$
$$\hat{V}_C = \left(\frac{-j}{\omega_0 C}\right)\hat{I} = \frac{-j\times20\underline{/0^\circ}}{10\,000\times5\times10^{-6}} = 400\underline{/-90^\circ}\,\mathrm{V}$$

شکل 12.25: مثال 12.11 اور مشق 12.8 کا دور۔

دباو کے یہی جوابات مساوات 12.38 کی مدد سے بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
V_R &= V_d = 40\,\mathrm{V} \\
V_L &= QV_d = 10 \times 40 = 400\,\mathrm{V} \\
V_C &= QV_d = 10 \times 40 = 400\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

جہاں مزاحمتی دباو اور داخلی دباو ہم زاویہ ہیں جبکہ امالی دباو اور برق گیر دباو بالترتیب داخلی دباو سے $90°$ آگے اور پیچھے ہیں۔ اس مثال میں $Q = 10$ ہے لہٰذا گمکی تعدد پر امالی اور برق گیر دباو کی قیمتیں داخلی دباو سے دس گنا زیادہ ہیں۔

مثال 12.11: برق گیر استعمال کرتے ہوئے ضروری ہے کہ برق گیر کی سکت سے تجاوز نہ کیا جائے۔ برق گیر پر اس کے سکت سے زیادہ دباو ڈالنے سے برق گیر غیر فعال ہو جائے گا۔ برق گیر عموماً غیر فعال ہونے کی صورت میں خوفناک دھماکے سے پھٹتا ہے۔ جزو طاقت درست کرنے والے برق گیر یا کارخانوں میں دیگر استعمال ہونے والے بڑے جسامت کے برق گیر کا پھٹنا جان لیوا ثابت ہو سکتا ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ تار لپیٹنے سے امالہ گیر بنایا جاتا ہے۔ یوں نہ چاہتے ہوئے بھی امالہ گیر میں درکار امالی رکاوٹ کے ساتھ ساتھ غیر مطلوب مزاحمتی رکاوٹ بھی پایا جاتا ہے۔ شکل 12.25 میں ایسا ہی امالہ گیر اور برق گیر سلسلہ وار جوڑے گئے ہیں جہاں $L = 90\,\mathrm{mH}$ اور $C = 100\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔ امالہ گیر کا معیاری مستقل $Q = 6$ ہے۔ برق گیر پر گمکی تعدد پر دباو حاصل کریں۔

حل: معیاری مستقل کی قیمت سے گمکی تعدد پر برق گیر کا دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$V_C = QV_d = 6 \times 30 = 180\,\text{V rms}$$

یوں اس دور کو استعمال کرنے سے پہلے تسلی کر لیں کہ استعمال ہونے والے برق گیر کی سکت کم از کم $180\,\text{V rms}$ ہے۔

مشق 12.8: شکل 12.25 میں $C = 10\,\mu\text{F}$ ہے اور گمکی تعدد پر $I = 15\,\text{A rms}$ اور $V_C = 120\,\text{V rms}$ ہیں۔امالہ اور مزاحمت دریافت کریں۔

جوابات: $R = 2\,\Omega$ ، $L = 0.64\,\text{mH}$

مشق 12.9: سلسلہ وار RLC دور میں داخلی دباو $22\cos\omega t\,\text{V}$ ہے۔مزاحمت $2\,\Omega$ اور $L = 120\,\mu\text{H}$ ہے۔دور کی گمکی تعدد $f_0 = 10\,\text{kHz}$ کے لئے درکار برق گیر معلوم کریں۔دور میں f_0 ، $\frac{f_0}{2}$ اور $2f_0$ پر رو دریافت کریں۔

جوابات: $C = 2.11\,\mu\text{F}$ ، $11\cos(20000\pi t)\,\text{A}$ ، $1.92\cos(10000\pi + 80^\circ)\,\text{A}$ ، $1.92\cos(40000\pi - 80^\circ)\,\text{A}$

آئیں شکل 12.21 میں دکھائے گئے سلسلہ وار RLC دور میں $\frac{\hat{V}_R}{\hat{V}_d}$ تناسب کے لئے Q ، ω_0 اور ω پر مبنی عمومی مساوات حاصل کریں۔مساوات 12.37 سے $\frac{L}{R}=\frac{Q}{\omega_0}$ اور $\frac{1}{RC}=Q\omega_0$ کو دور کے رکاوٹ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}(j\omega) &= R+j\Big(\omega L-\frac{1}{\omega C}\Big)\\
&= R\Big[1+j\Big(\frac{\omega L}{R}-\frac{1}{\omega RC}\Big)\Big]\\
&= R\Big[1+jQ\Big(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

دور میں رو

$$\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{\hat{V}_d}{Z}\\
&= \frac{\hat{V}_d}{R\Big[1+jQ\Big(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\Big)\Big]}
\end{aligned}$$

سے مزاحمتی دباو $\hat{V}_R=\hat{I}R$ لکھ کر دباو کا تناسب لکھتے ہیں

$$\frac{\hat{V}_R}{\hat{V}_d}=\frac{1}{1+jQ\Big(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\Big)}$$

جس کی مطلق مقدار $M(\omega)$ اور زاویہ $\phi(\omega)$ درج ذیل ہیں جنہیں شکل 12.26 میں دکھایا گیا ہے۔

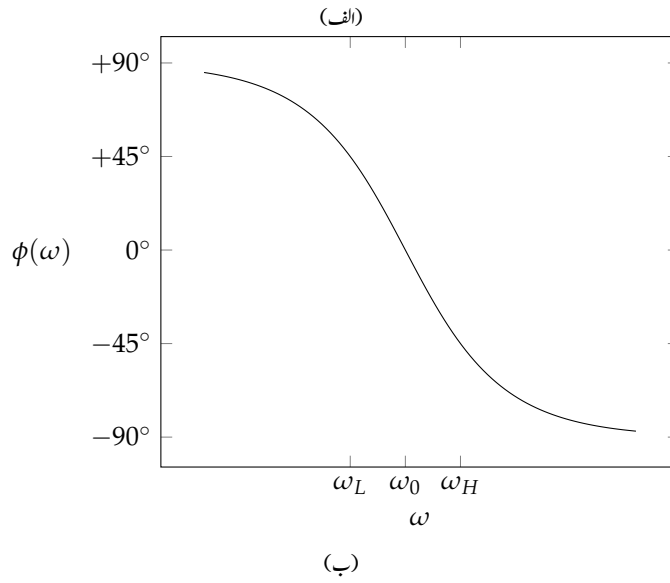
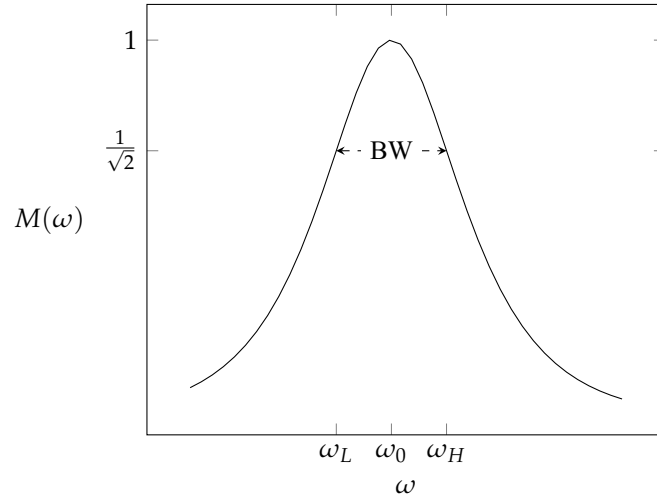
$$M(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\Big(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\Big)^2}} \tag{12.39}$$

$$\phi(\omega)=-\tan^{-1}Q\Big(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\Big) \tag{12.40}$$

مقدار بالمقابل تعدد کا خط پٹی گزار چھلنی[35] کی طرح ہے۔آئیں اس کے کونے دریافت کرتے ہیں۔کونوں پر طاقت کی قیمت نصف ہوتی ہے۔نصف طاقت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا رو پر پایا جاتا ہے یوں مساوات 12.39 میں $M(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ پر کرنے سے کونوں کی تعدد (انقطاعی تعدد) دریافت کئے جا سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\Big(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\Big)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

---

[35] band-pass filter

شکل 12.26: مقدار بالمقابل تعدد اور زاویہ بالمقابل تعدد کے خط۔

اس سے

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)=\mp 1$$

یعنی

$$\omega=\mp\frac{\omega_0}{2Q}\mp\omega_0\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2}+1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ منفی تعدد کے جوابات رد کرتے ہوئے صرف مثبت جوابات تسلیم کرتے ہوئے درج ذیل کونے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\omega_L=\omega_0\left[-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2}+1}\right] \tag{12.41}$$

$$\omega_H=\omega_0\left[+\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2}+1}\right] \tag{12.42}$$

پست تعددی کونے ω_L اور بلند تعددی کونے ω_H کے مابین خطہ **عرض پٹی**[36] کہلاتا اور BW سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{BW}=\omega_H-\omega_L=\frac{\omega_0}{Q} \qquad \text{عرض پٹی} \tag{12.43}$$

عرض پٹی کے مساوات کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{BW}=\frac{\omega_0}{Q}=\frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}=\frac{R}{L} \tag{12.44}$$

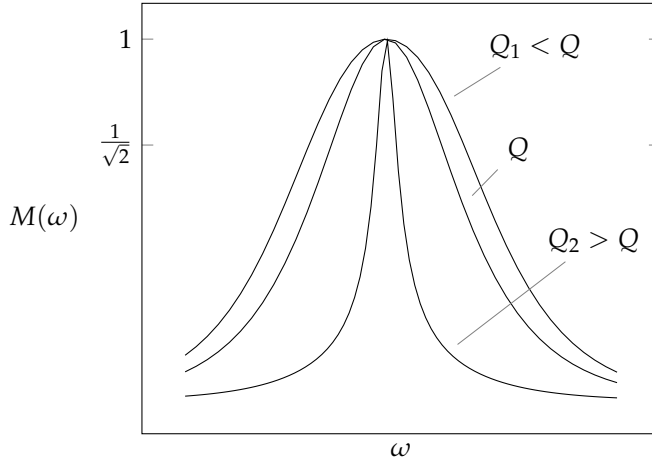
چونکہ کونوں پر طاقت گھٹ کر نصف رہ جاتا ہے اور نصف طاقت $-3\,\text{dB}$ کہلاتا ہے لہٰذا تعددی پٹی کو **تین ڈیسی بیل پٹی**[37] بھی کہتے ہیں۔

کونوں کے تعدد کو ضرب دینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے لہٰذا گمکی تعدد دونوں انقطاعی تعدد کا ہندسی اوسط ہے۔

$$\omega_H\omega_L=\omega_0^2 \tag{12.45}$$

---

[36] bandwidth

[37] 3 dB bandwidth

شکل 12.27: عرض پٹی بالمقابل معیاری مستقل۔

پست انقطاعی کونے پر زاویہ $45°$ ، بلند انقطاعی کونے پر $-45°$ اور گمکی تعدد پر $0°$ ہے۔

مشق 12.10: شکل 12.24 کے دور کی پست انقطاعی تعدد ω_L ، بلند انقطاعی تعدد ω_H اور عرض پٹی BW دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_L = 9512\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\omega_H = 10\,512\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\mathrm{BW} = 1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

مساوات 12.37 کے تحت زیادہ Q کے لئے کم R درکار ہے اور مساوات 12.43 کے تحت تنگ عرض پٹی کے لئے زیادہ Q درکار ہے۔یوں تنگ Q کم R کی صورت میں حاصل ہو گا۔تنگ عرض پٹی کا دور نہایت عمدگی سی مخصوص تعدد کو چنے کی صلاحیت رکھتا ہے۔شکل 12.27 میں مختلف Q کے لئے مساوات 12.39 کو دکھایا گیا ہے۔داخلی اشارات سے صرف وہ اشارات خارجی جانب پہنچتے ہیں جو عرض پٹی پر پائے جاتے ہوں۔عرض پٹی سے باہر تعدد کے اشارات گھٹتے ہیں۔یوں RLC بطور پٹی گزار چھلنی کام کرتا ہے۔

معیاری مستقل Q کو توانائی کے نقطہ نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ شکل 12.28 پر غور کریں جہاں RLC کو گمکی تعدد کا اشارہ مہیا کیا گیا ہے۔ گمکی تعدد پر رکاوٹ $Z = R$ ہوتی ہے لہٰذا $i(t) = \frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t \,\mathrm{A}$ اور برق گیر کا دباو

$$\hat{V}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \hat{I} = \frac{1}{j\omega_0 t} \frac{V_m}{R} \underline{/0^\circ} = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \underline{/-90^\circ}$$

یعنی

$$v_C(t) = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \cos(\omega_0 t - 90^\circ) \,\mathrm{V} = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t \,\mathrm{V}$$

لکھا جائے گا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ امالہ گیر میں $\frac{Li^2}{2}$ اور برق گیر میں $\frac{Cv^2}{2}$ توانائی ذخیرہ ہوتی ہے لہٰذا امالہ گیر کی توانائی

$$w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t \right)^2 = \frac{LV_m^2}{2R^2} \cos^2 \omega_0 t \,\mathrm{J} \tag{12.46}$$

اور برق گیر کی توانائی

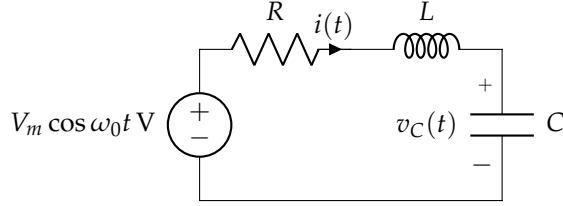
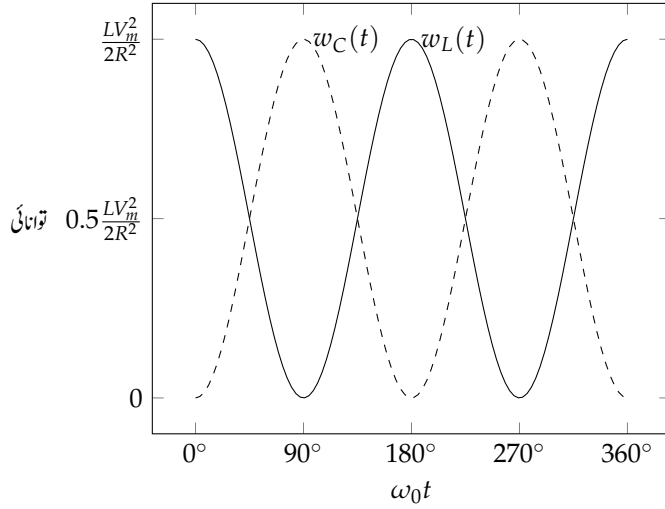
$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t) = \frac{1}{2} C \left(\frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t \right)^2 = \frac{V_m^2}{2\omega_0^2 R^2 C} \sin^2 \omega_0 t \,\mathrm{J}$$

لکھی جائے گی۔ گمکی تعدد پر $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ہوتا ہے لہٰذا برق گیر کی توانائی کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$w_C(t) = \frac{V_m^2}{2 \frac{1}{LC} R^2 C} \sin^2 \omega_0 t = \frac{LV_m^2}{2R^2} \sin^2 \omega_0 t \,\mathrm{J} \tag{12.47}$$

دور میں کل ذخیرہ توانائی ان دونوں کا مجموعہ ہے

$$\begin{aligned} w_{\text{ذخیرہ}} &= w_L(t) + w_C(t) \\ &= \frac{LV_m^2}{2R^2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{LV_m^2}{2R^2} \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{LV_m^2}{2R^2} \end{aligned} \tag{12.48}$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یوں دور میں کل ذخیرہ توانائی وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی اور اس کی مقدار اٹل ہے۔

شکل 12.28: سلسلہ وار RLC کو گمکی تعدد کا اشارہ مہیا کیا گیا ہے۔

شکل 12.29: گمکی دور میں توانائی کا تبادلہ۔

مساوات 12.46 اور مساوات 12.47 کو شکل 12.29 میں دکھایا گیا ہے۔ان مساوات کے تحت امالہ گیر اور برق گیر میں ذخیرہ توانائی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے جبکہ مساوات 12.48 کے تحت ان کا مجموعہ اٹل مقدار ہے۔یہ ایک دلچسپ صورت حال ہے۔لمحہ $\omega_0 t = 0°$ پر امالہ گیر کی توانائی زیادہ سے زیادہ جبکہ برق گیر کی توانائی صفر ہوتی ہے۔اس کے برعکس $\omega_0 t = 90°$ پر امالہ گیر کی توانائی صفر جبکہ برق گیر کی توانائی زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے ایک پرزے میں ذخیرہ توانائی گھٹتی ہے ویسے ویسے دوسرے پرزے میں ذخیرہ توانائی بڑھتی ہے۔ہر لمحہ ایک پرزے میں توانائی کی کمی دوسرے پرزے میں توانائی کے اضافے کے برابر ہوتی ہے۔

گمکی تعدد پر سلسلہ وار RLC میں کل $\frac{LV_m^2}{2R^2}$ توانائی ذخیرہ ہوتی ہے۔آئیں تعدد کے ایک چکر میں توانائی کا ضیاع

$w_{\text{ضیاع}}$ دریافت کریں۔توانائی صرف مزاحمت میں ضائع ہوتی ہے۔

$$w_{\text{ضیاع}} = \int_0^T i^2(t) R \,\mathrm{d}t = \int_0^T \left(\frac{V_m}{R}\cos\omega_0 t\right)^2 R\,\mathrm{d}t = \frac{V_m^2 T}{2R}$$

کل ذخیرہ توانائی اور فی چکر توانائی کے ضیاع کا تناسب لکھتے ہیں۔

$$\frac{w_{\text{ذخیرہ}}}{w_{\text{ضیاع}}} = \frac{\frac{LV_m^2}{2R^2}}{\frac{V_m^2 T}{2R}} = \frac{L}{RT} = \frac{L}{R\frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 L}{2\pi R}$$

چونکہ $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو معیاری مستقل Q کی عمومی تعریف ہے۔

$$Q = 2\pi \frac{w_{\text{ذخیرہ}}}{w_{\text{ضیاع}}} \qquad \text{معیاری مستقل کی عمومی تعریف} \tag{12.49}$$

معیاری مستقل کی عمومی تعریف برقی میدان کے علاوہ میکانی میدان اور سمعی میدان میں بھی استعمال ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم مزاحمت ضیاع کے دور کا معیاری مستقل زیادہ ہو گا۔

مثال 12.12: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 1\,\Omega$ ، $L = 2\,\mathrm{mH}$ اور $C = 20\,\mu\mathrm{F}$ ہیں۔دور کی ω_0 ، Q اور BW حاصل کریں۔مزاحمت کی قیمت $R = 0.1\,\Omega$ کرتے ہوئے تینوں قیمتیں دوبارہ حاصل کریں۔

حل: درکار قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2\times10^{-3}\times20\times10^{-6}}} = 5000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{1}\sqrt{\frac{2\times10^{-3}}{20\times10^{-6}}} = 10$$

$$\mathrm{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{5000}{10} = 500\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

مزاحمت کی قیمت دس گنا کم کرنے کے بعد تمام قیمتیں دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ گمکی تعدد میں مزاحمت کا کوئی دخل نہیں ہے لہٰذا اس کی قیمت وہی رہے گی۔

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{0.1}\sqrt{\frac{2 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}}} = 100$$
$$\mathrm{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{5000}{100} = 50\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

مزاحمت کی قیمت دس گنا کم کرنے سے معیاری مستقل کی قیمت دس گنا بڑھتی ہے جبکہ عرض پٹی دس گنا کم ہوتی ہے۔

مشق 12.11: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 2\,\Omega$ ، $L = 1\,\mathrm{mH}$ اور $C = 2\,\mathrm{\mu H}$ ہیں۔ گمکی تعدد، معیاری مستقل اور عرض پٹی دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 22\,361\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $Q = 11.2$ ، $\mathrm{BW} = 2000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

مشق 12.12: سلسلہ وار RLC دور کا $R = 5\,\Omega$ ، $\omega_0 = 6\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور $\mathrm{BW} = 600\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہیں۔آپ سے گزارش ہے کہ L اور C دریافت کریں۔

جوابات: $L = 8.33\,\mathrm{mH}$ ، $C = 3.33\,\mathrm{\mu F}$

مثال 12.13: ایسا سلسلہ وار RLC دور تخلیق دیں کہ $\omega_0 = 1000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ اور $\text{BW} = 80\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ ہوں۔

حل: گمکی تعدد اور عرض پٹی کے مساوات درج ذیل ہیں۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{L}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ درکار متغیرات تین جبکہ مساوات دو عدد ہیں۔ تخلیق کے دوران عموماً ایسی ہی مسائل درپیش آتے ہیں جہاں ممکنہ مساوات سے تمام جوابات حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ایسے مسائل تجربے سے حل کئے جاتے ہیں۔ تجربے کی بنیاد پر کسی ایک متغیرہ کو چنتے ہوئے بقایا کو مساوات کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔اگر حاصل جوابات قابل قبول نہ ہوں تب متغیرہ کی قیمت تبدیل کرتے ہوئے دوبارہ حل کیا جاتا ہے۔یہ سلسلہ اس وقت تک جاری رکھا جاتا ہے جب تک قابل قبول جوابات حاصل نہ ہوں جائے۔

ہم برق گیر کی قیمت ایسی چنتے ہیں جو دستیاب ہو مثلاً $C = 10\,\mu\text{F}$ لہٰذا درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{1000^2 \times 10 \times 10^{-6}} = 0.1\,\text{H}$$
$$R = (L)(\text{BW}) = 0.1 \times 80 = 8\,\Omega$$

مساوات 12.38 کے تحت سلسلہ وار RLC دور میں گمکی تعدد پر امالی دباو اور برق گیر دباو کی قیمتیں داخلی دباو کے Q گنا ہوتی ہیں۔ آئیں دیکھیں کہ آیا امالی دباو اور برق گیر دباو کی زیادہ سے زیادہ قیمت گمکی تعدد پر ہی پائی جاتی ہے یا کہ کسی دوسری تعدد پر۔ شکل 12.30 کو دیکھتے ہوئے برق گیر کا دباو لکھتے ہیں

$$\hat{V}_C = \left(\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\right)\hat{V}_m$$

جس کو ترتیب دے کر ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_C = \frac{\hat{V}_m}{1-\omega^2 LC + j\omega RC} \tag{12.50}$$

اس کی مطلق قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$\left|\hat{V}_C\right| = \frac{\left|\hat{V}_m\right|}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \tag{12.51}$$

زیادہ سے زیادہ $\left|\hat{V}_C\right|$ پر تعدد $\omega_{\text{بلند تر طاقت}}$ درج ذیل عمل

$$\frac{\mathrm{d}\left|\hat{V}_C\right|}{\mathrm{d}\omega} = 0$$

سے

$$\omega_{\text{بلند تر طاقت}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2} \tag{12.52}$$

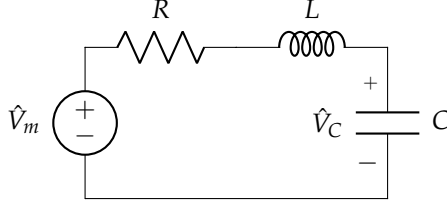
حاصل ہوتی ہے جس میں $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ اور $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\omega_{\text{بلند تر طاقت}} &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}\\ &= \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\end{aligned} \tag{12.53}$$

لکھا جا سکتا ہے۔درج بالا مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ دباو گمکی تعدد پر نہیں پایا جاتا اگرچہ Q کی قیمت زیادہ ہونے کی صورت میں درج بالا تعدد تقریباً گمکی تعدد ہی ہو گی۔مساوات 12.53 کو مساوات 12.51 میں پر کرتے ہوئے اور $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ اور $\omega_0^2 R^2 C^2 = \frac{1}{Q^2}$ استعمال کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ دباو کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$\left|\hat{V}_C\right|_{\text{بلند تر}} = \frac{Q\left|\hat{V}_m\right|}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \tag{12.54}$$

جو $Q \gg 1$ کی صورت میں درج ذیل قیمت اختیار کرتا ہے۔

$$\left|\hat{V}_C\right|_{\text{بلند تر}} \approx Q\left|\hat{V}_m\right| \tag{12.55}$$

شکل 12.30: برق گیر پر زیادہ سے زیادہ دباو۔

مثال 12.14: شکل 12.30 میں $L = 10\,\mathrm{mH}$ اور $C = 1\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔مزاحمت کی قیمت $50\,\Omega$ اور $1\,\Omega$ ہونے کی صورت میں ω_0 اور $\omega_{\text{بلند تر}}$ دریافت کریں۔

حل: گمکی تعدد پر مزاحمت کا کوئی اثر نہیں ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-6}}} = 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$$

مزاحمت $50\,\Omega$ کی صورت میں

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10000 \times 10 \times 10^{-3}}{50} = 2$$

اور

$$\begin{aligned}\omega_{\text{بلند تر}} &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ &= 10000\sqrt{1 - \frac{1}{2 \times 2^2}} \\ &= 9354\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\end{aligned}$$

مزاحمت $1\,\Omega$ کی صورت میں

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10000 \times 10 \times 10^{-3}}{1} = 100$$

اور

$$\omega_{\text{بلند تر}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = 10000 \sqrt{1 - \frac{1}{2 \times 100^2}} \approx 10\,000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں تبادلی تفاعل $\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_m}$ کے خطوط کھینچیں۔مساوات 12.50 سے $R = 50\,\Omega$ کی صورت میں تبادلی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_m} = \frac{1}{1 - 10^{-8}\omega^2 + j50 \times 10^{-6}\omega} \tag{12.56}$$

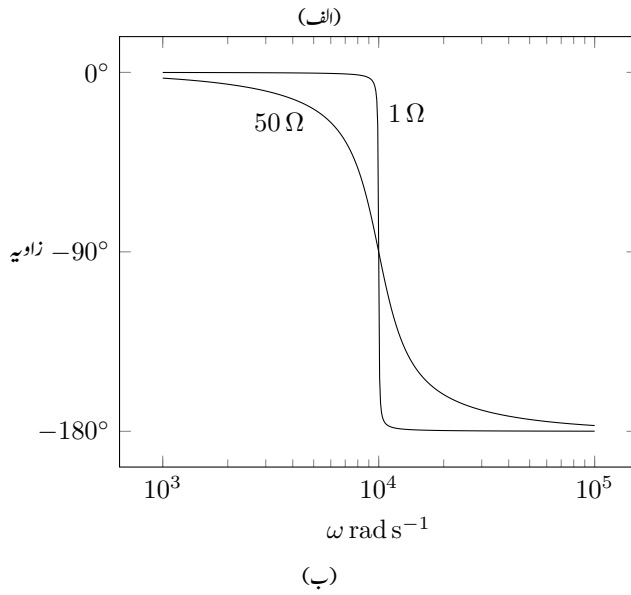
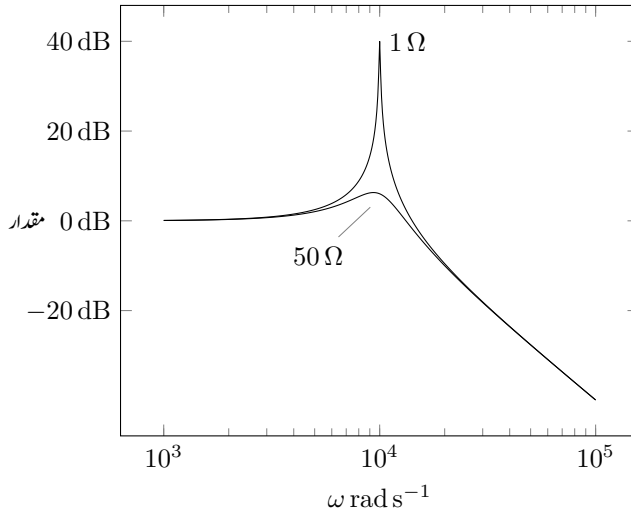
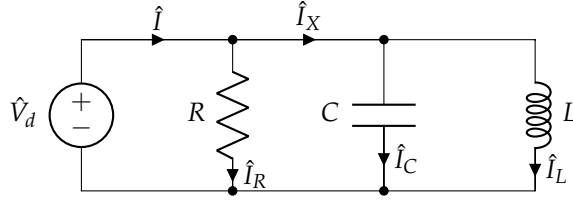
اسی طرح $R = 1\,\Omega$ کی صورت میں تبادلی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_m} = \frac{1}{1 - 10^{-8}\omega^2 + j1 \times 10^{-6}\omega} \tag{12.57}$$

ان تبادلی تفاعل کو شکل 12.31 میں دکھایا گیا ہے۔آپ نے دیکھا کہ زیادہ Q والا جال باریک بینی سے تعدد چنتا ہے جبکہ کم Q والا جال اتنی باریک بینی سے تعدد نہیں چنتا ہے۔

متوازی گمک

اب تک ہم سلسلہ وار RLC کے گمک پر غور کرتے رہے ہیں۔حقیقت میں متوازی جڑے اور سلسلہ وار جڑے RLC میں مشابہت زیادہ اور فرق کم پایا جاتا ہے۔شکل 12.32 میں متوازی RLC دکھایا گیا ہے جس کی کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \hat{I}_R + \hat{I}_L + \hat{I}_C \\ &= \frac{\hat{V}_d}{R} + j\omega C\hat{V}_d + \frac{\hat{V}_d}{j\omega L} \\ &= \hat{V}_d\left[G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]\end{aligned} \tag{12.58}$$

شکل 12.31: مثال 12.14 کے خطوط۔

شکل 12.32: متوازی RLC کی گمک۔

جہاں آخری قدم پر $\frac{1}{R} = G$ لکھا گیا ہے۔ گمکی تعدد ω_0 پر رو کم سے کم ہو گی۔ کم سے کم رو $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$ کی حالت میں حاصل ہوتی ہے جس سے گمکی تعدد حاصل ہوتی ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{گمکی تعدد} \tag{12.59}$$

مساوات 12.35 میں سلسلہ وار RLC کی گمکی تعدد دی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سلسلہ وار RLC اور متوازی RLC کی گمکی تعدد یکساں ہے۔ گمکی تعدد پر رو درج ذیل ہو گی۔

$$\hat{I} = G\hat{V}_d \tag{12.60}$$

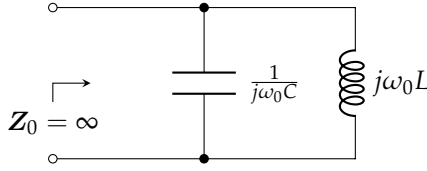
دور کی داخلی فراوانی $\boldsymbol{Y}(j\omega)$ لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{Y}(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \tag{12.61}$$

جو گمکی تعدد پر درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{Y}(j\omega_0) = R \tag{12.62}$$

شکل 12.32 میں گمکی تعدد پر امالی اور برق گیر رو کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\hat{I}_X &= \hat{I}_C + \hat{I}_L \\
&= j\hat{V}_d \left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right) \\
&= 0\,\text{A}
\end{aligned}$$

شکل 12.33: گمکی تعدد پر متوازی جڑے امالہ گیر اور برق گیر کی مجموعی رکاوٹ لامتناہی ہے۔

اس نتیجے کو سمجھنے کی خاطر شکل 12.33 میں دکھائے گئے متوازی جڑے امالہ گیر اور برق گیر کا مجموعی رکاوٹ Z_0 لکھتے ہیں

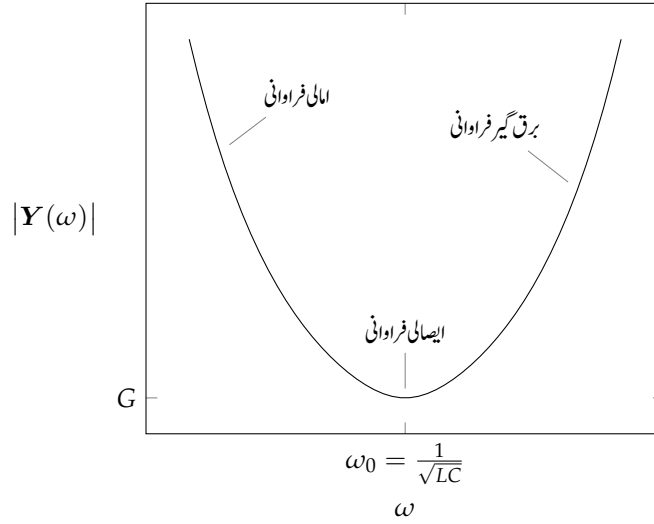
$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z_0} &= j\omega_0 C + \frac{1}{j\omega L} \\
&= j\left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

جس سے رکاوٹ لامتناہی حاصل ہوتی ہے۔

$$Z_0 = \infty \tag{12.63}$$

سلسلہ وار جڑے امالہ گیر اور برق گیر کی گمکی تعدد پر مجموعی رکاوٹ صفر ہوتی ہے جبکہ متوازی جڑے امالہ گیر اور برق گیر کی گمکی تعدد پر رکاوٹ لامتناہی ہوتی ہے۔لامتناہی رکاوٹ میں رو کی قیمت صفر ہی متوقع ہے۔اگرچہ گمکی تعدد پر امالہ گیر اور برق گیر کی مجموعی رو صفر کے برابر ہے، ان کی انفرادی رو ہر گز صفر نہیں ہے۔

$$\begin{aligned}
\hat{I}_C &= j\omega_0 C\hat{V}_d \\
\hat{I}_L &= -j\frac{\hat{V}_d}{\omega_0 L}
\end{aligned}$$

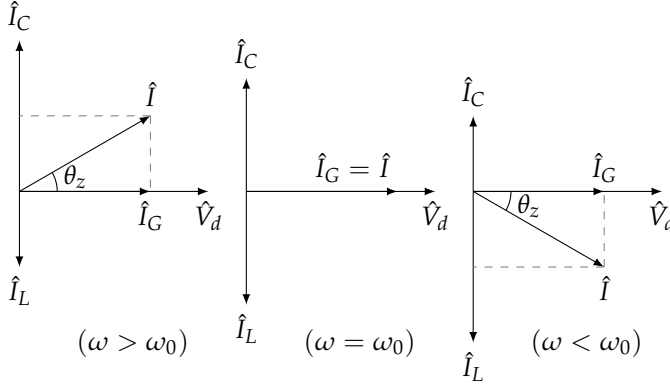
گمکی تعدد پر امالی رو اور برق گیر رو قیمت میں برابر لیکن زاویائی طور پر آپس میں الٹ قدم $(180°)$ ہوتی ہیں۔ شکل 12.32 میں گمکی تعدد پر رو $\hat{I} = G\hat{V}_d$ ہو گی۔لامتناہی مزاحمت کی صورت میں $G = 0\,\mathrm{S}$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں $\hat{I} = 0\,\mathrm{A}$ ہو گی جبکہ $\hat{I}_C$ اور $\hat{I}_L$ درج بالا مساوات کے تحت ہوں گی۔یہاں بھی امالہ گیر اور برق گیر کے مابین توانائی کا تبادلہ ہوتا ہے۔جیسے جیسے ایک میں توانائی گھٹتی ہے ویسے ویسے دوسرے میں توانائی کا اضافہ ہوتا ہے۔

شکل 12.34: فراوانی کی مقدار بالمقابل تعدد۔

مساوات 12.58 سے تبادلی تفاعل $\frac{\hat{I}}{\hat{V}_d}$ لکھتے ہیں۔

$$\frac{\hat{I}}{\hat{V}_d} = \boldsymbol{Y}(j\omega) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{12.64}$$

شکل 12.34 میں اس تبادلی تفاعل کا مطلق قیمت بالمقابل تعدد خط دکھایا گیا ہے۔ گمکی تعدد پر امالی تاثیر زیادہ غالب ہے جبکہ زیادہ تعدد پر برق گیر تاثیر زیادہ غالب ہے۔ عین گمکی تعدد پر ایصالی فراوانی پائی جاتی ہے۔ شکل 12.35 میں داخلی دباو $\hat{V}_d$ کے حوالے سے متوازی RLC کے دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ گمکی تعدد سے کم تعدد پر امالی رو غالب ہے لہٰذا داخلی دباو سے رو پیچھے ہے جبکہ گمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر برق گیر رو زیادہ غالب ہے لہٰذا داخلی دباو سے رو آگے ہے۔ عین گمکی تعدد پر داخلی دباو اور رو ہم قدم ہیں۔

مساوات 12.49 میں معیاری مستقل کی عمومی تعریف بیان کی گئی ہے۔آئیں اس کو استعمال کرتے ہوئے متوازی RLC دور کا Q دریافت کریں۔

شکل 12.32 میں داخلی دباو گمکی تعدد پر تصور کرتے ہوئے $\hat{V}_d = V_m\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$ یعنی $v_d = V_m \cos\omega_0 t\,\mathrm{V}$

شکل 12.35: متوازی RLC کے دوری سمتیات۔

فرض کریں۔امالہ گیر کی رو

$$\hat{I}_L = \frac{\hat{V}_d}{j\omega_0 L} = \frac{V_m\angle 0^\circ}{j\omega_0 L} = \frac{V_m}{\omega_0 L}\angle -90^\circ \tag{12.65}$$

یعنی

$$i_L(t) = \frac{V_m}{\omega_0 L}\cos(\omega_0 t - 90^\circ) = \frac{V_m}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t \,\mathrm{A}$$

لکھی جائے گی۔ برق گیر اور مزاحمت کی رو درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_C &= \omega_0 C V_m\angle 90^\circ \,\mathrm{A}\\ \hat{I}_G &= G V_m\angle 0^\circ \,\mathrm{A}\end{aligned} \tag{12.66}$$

امالہ گیر میں ذخیرہ توانائی

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t) = \frac{1}{2}L\left(\frac{V_m}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t\right)^2 = \frac{V_m^2}{2\omega_0^2 L}\sin^2\omega_0 t \,\mathrm{J} \tag{12.67}$$

اور برق گیر میں ذخیرہ توانائی

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t) = \frac{1}{2}C\left(V_m\cos\omega_0 t\right)^2 = \frac{CV_m^2}{2}\cos^2\omega_0 t \,\mathrm{J}$$

لکھی جائے گی۔ گمکی تعدد پر $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ہوتا ہے لٰہذا امالہ گیر کی توانائی کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$w_L(t) = \frac{V_m^2}{2\frac{1}{LC}L}\sin^2\omega_0 t = \frac{CV_m^2}{2}\sin^2\omega_0 t\,\text{J} \tag{12.68}$$

دور میں کل ذخیرہ توانائی ان دونوں کا مجموعہ ہے

$$\begin{aligned} w_{\text{ذخیرہ}} &= w_C(t) + w_L(t) \\ &= \frac{CV_m^2}{2}\cos^2\omega_0 t + \frac{CV_m^2}{2}\sin^2\omega_0 t \\ &= \frac{CV_m^2}{2} \end{aligned} \tag{12.69}$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یوں دور میں کل ذخیرہ توانائی وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی اور اس کی مقدار اٹل ہے۔

آئیں اب گمکی تعدد کے ایک چکر میں توانائی کا ضیاع دریافت کریں۔امالہ گیر اور برق گیر میں توانائی کا ضیاع ممکن نہیں ہے۔توانائی صرف G یعنی R میں ضائع ہو گی۔مزاحمت پر V_m حیطے کا دباو لاگو ہے جس کی موثر قیمت $\frac{V_m}{\sqrt{2}}$ ہے۔یوں مزاحمت میں طاقتی ضیاع درج ذیل ہو گا۔

$$P_G = \frac{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)^2}{R} = \frac{GV_m^2}{2}$$

گمکی تعدد پر ایک چکر کا دورانیہ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ کے برابر ہے جس میں مزاحمتی ضیاع درج ذیل ہو گا۔

$$w_{\text{ضیاع}} = TP_G = \frac{2\pi GV_m^2}{2\omega_0} \tag{12.70}$$

مساوات 12.49 کو استعمال کرتے ہوئے متوازی RLC دور کا معیاری مستقل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi\frac{w_{\text{ذخیرہ}}}{w_{\text{ضیاع}}} \\ &= 2\pi\frac{\frac{CV_m^2}{2}}{\frac{2\pi GV_m^2}{2\omega_0}} \\ &= \frac{\omega_0 C}{G} \end{aligned}$$

گمکی تعدد پر $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$ ہوتا ہے لہٰذا متوازی RLC کے معیاری مستقل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} \tag{12.71}$$

سلسلہ وار RLC کے Q کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ متوازی RLC کا Q اس کے بالعکس متناسب ہے۔

مساوات 12.65 اور مساوات 12.65 متوازی پرزوں کی رو دیتے ہیں جبکہ مساوات 12.60 منبع کی رو دیتی ہے۔ان نتائج سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} I_L &= QI \\ I_C &= QI \\ I_G &= I \end{aligned} \tag{12.72}$$

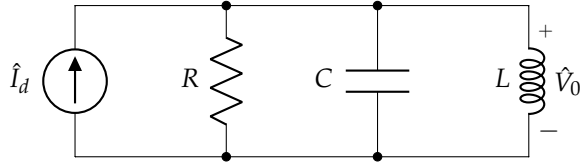
یوں متوازی RLC دور میں رو کا کردار وہی ہے جو سلسلہ وار RLC میں دباو کا تھا۔متوازی RLC میں $Q > 1$ کی صورت میں گمکی تعدد پر امالہ گیر اور برق گیر کو رو منبع کی رو سے زیادہ ہو گی۔

مثال 12.15: متوازی جڑے RLC میں $G = 0.01\,\mathrm{S}$ ، $L = 1\,\mathrm{mH}$ اور $C = 10\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔اس کو گمکی تعدد پر $\hat{V}_d = 22\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$ دباو فراہم کی جاتی ہے۔ گمکی تعدد اور پرزوں میں رو دریافت کریں۔

حل: گمکی تعدد دریافت کرتے ہیں۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 10 \times 10^{-6}}} = 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$$

یوں پرزوں کی رو درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \hat{I}_G &= G\hat{V}_d = 0.01 \times 22\underline{/0^\circ} = 0.22\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A} \\ \hat{I}_L &= \frac{\hat{V}_d}{j\omega_0 L} = \frac{22\underline{/0^\circ}}{j10000 \times 0.001} = 2.2\underline{/-90^\circ}\,\mathrm{A} \\ \hat{I}_C &= j\omega_0 C\hat{V}_d = j10000 \times 10 \times 10^{-5} \times 22\underline{/0^\circ} = 2.2\underline{/90^\circ}\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

شکل 12.36: مثال 12.16 کا دور۔

منبع کی رو ان تینوں کا مجموعہ ہو گا جو $\hat{I}_G$ کے برابر ہو گا۔

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \hat{I}_G + \hat{I}_L + \hat{I}_C \\ &= 0.22\underline{/0^\circ}\,\text{A} \\ &= \hat{I}_G\end{aligned}$$

اس مثال میں امالی رو اور برق گیر رو کی قیمتیں منبع کی رو سے دس گنا زیادہ ہیں۔

مثال 12.16: شکل 12.36 میں متوازی RLC دور دیا گیا ہے۔اس کا تبادلی تفاعل $\frac{\hat{V}}{\hat{I}}$ حاصل کرتے ہوئے نچلا اور بالائی کونا دریافت کریں۔عرض پٹی بھی حاصل کریں۔

حل: دور کی فراوانی

$$\boldsymbol{Y} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

استعمال کرتے ہوئے خارجی دباو لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\hat{V}_0 &= \frac{\hat{I}_d}{\boldsymbol{Y}} \\ &= \frac{\hat{I}_d}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}\end{aligned}$$

تبادلی تفاعل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{I}_d}=\frac{1}{G+j(\omega C-\frac{1}{\omega L})} \tag{12.73}$$

تبادلی تفاعل عین گمکی تعدد پر زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔یوں گمکی تعدد پر قوسین صفر کے برابر ہو گی جس سے گمکی تعدد لکھی جا سکتی ہے۔

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{12.74}$$

گمکی تعدد پر مساوات 12.73 میں قوسین صفر کے برابر ہے لہٰذا اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{I}_d}=\frac{1}{G} \tag{12.75}$$

گمکی تعدد پر تبادلی تفاعل کی مقدار زیادہ سے زیادہ مقدار کی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہو گی۔یوں کونوں پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{\sqrt{G^2+(\omega C-\frac{1}{\omega L})^2}}=\left(\frac{1}{G}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{12.76}$$

دونوں اطراف کا مربع لیتے اور ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\omega^2\mp\omega\frac{G}{C}-\frac{1}{LC}=0 \tag{12.77}$$

جس کے مثبت تعددی جوابات لکھتے ہیں۔

$$\omega_L=-\frac{G}{2C}+\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2+\frac{1}{LC}} \tag{12.78}$$

$$\omega_H=+\frac{G}{2C}+\sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2+\frac{1}{LC}} \tag{12.79}$$

ان کونوں سے عرض پٹی حاصل کرتے ہیں۔

$$\text{BW}=\omega_H-\omega_L=\frac{G}{C}=\frac{1}{RC} \tag{12.80}$$

معیاری مستقل حاصل کرتے ہیں۔

$$Q=\frac{\omega_0}{\mathrm{BW}}=\frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}}=R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{12.81}$$

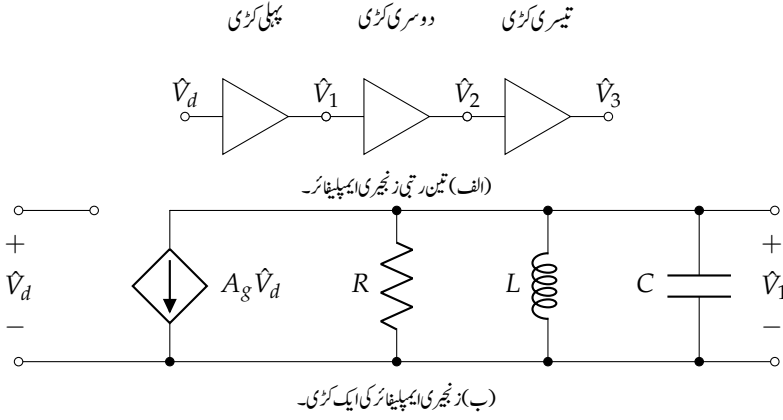
گمکی تعدد، معیاری مستقل اور عرض پٹی کے مساوات استعمال کرتے ہوئے کونوں کی تعدد کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\omega_L=\omega_0\left[-\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2}+1}\right] \tag{12.82}$$

$$\omega_H=\omega_0\left[+\frac{1}{2Q}+\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2}+1}\right] \tag{12.83}$$

مثال 12.17: متوازی RLC میں $R=1\,\mathrm{k\Omega}$ ، $L=1\,\mathrm{mH}$ اور $C=20\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔ گمکی تعدد، معیاری مستقل اور عرض پٹی دریافت کریں۔

حل:

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{10^{-3}\times20\times10^{-6}}}=7071\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$
$$Q=R\sqrt{\frac{C}{L}}=1000\sqrt{\frac{10^{-3}}{20\times10^{-6}}}=141$$
$$\mathrm{BW}=\frac{1}{RC}=\frac{1}{1000\times20\times10^{-6}}=50\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$

شکل 12.37: زنجیری ہمسر ایمپلیفائر سے عرض پٹی تنگ کی جاتی ہے۔

مثال 12.18: **برقناطیسی امواج**[38] کو **اینٹینا**[39] کے ذریعہ خلاء سے حاصل کرتے ہوئے **ہمسر ایمپلیفائر**[40] تک پہنچایا جاتا ہے۔ہمسر ایمپلیفائر مخصوص عرض پٹی کے اشارات کا حیطہ بڑھاتے ہوئے بقایا تعدد کے اشارات کو گھٹاتا ہے۔تعددی طور پر دو قریبی اشارات کو علیحدہ کرنے کے لئے ضروری ہے کہ ہمسر دور کی عرض پٹی اتنی تنگ ہو کہ اس میں سے صرف درکار اشارات گزر سکے۔ بعض اوقات ایک عدد RLC دور سے اشارات کو علیحدہ کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ایسی صورت میں متعدد ہمسر ایمپلیفائر کو زنجیری جوڑا جاتا ہے جہاں پہلے ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ دوسرے ایمپلیفائر کو بطور داخلی اشارہ مہیا کیا جاتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ زنجیری ایمپلیفائر سے کیسے عرض پٹی مزید تنگ کی جاتی ہے۔

شکل 12.37-الف میں زنجیری ایمپلیفائر دکھایا گیا ہے۔داخلی اشارہ $\hat{V}_d$ زنجیری ایمپلیفائر کے پہلی کڑی کو مہیا کیا گیا ہے۔پہلی کڑی کا خارجی اشارہ $\hat{V}_1$ ہے جو دوسری کڑی کو بطور داخلی اشارہ مہیا کیا گیا ہے۔اسی طرح دوسری کڑی کا خارجی اشارہ $\hat{V}_2$ تیسری کڑی کو مہیا کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں ایک عدد ہمسر ایمپلیفائر کا مساوی دور دکھایا گیا ہے۔ ہمسر ایمپلیفائر کے دور میں $\hat{I}_d = -A_g\hat{V}_1$ لینے سے شکل 12.36 حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 12.73 سے پہلے ہمسر ایمپلیفائر کے لئے

$$\hat{V}_1 = \frac{-A_g\hat{V}_d}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \tag{12.84}$$

---

[38] electromagnetic waves
[39] antenna
[40] tuned amplifier

لکھا جا سکتا ہے۔پہلے ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ $\hat{V}_1$ ہے جسے دوسرے ایمپلیفائر کو فراہم کیا جاتا ہے لہٰذا مساوات 12.73 کو دوبارہ استعمال کرتے ہوئے دوسری کڑی کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{V}_2 = \frac{-A_g \hat{V}_1}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

جس میں مساوات 12.84 سے $\hat{V}_1$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

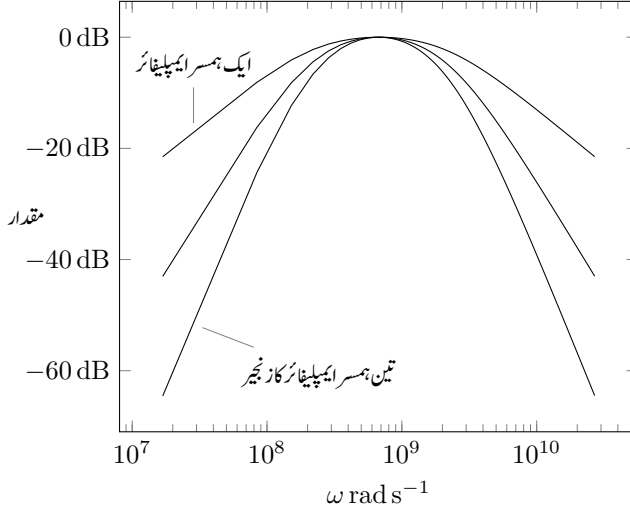
$$\hat{V}_2 = \frac{(-A_g)^2 \hat{V}_d}{\left[G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\right]^2} \tag{12.85}$$

اسی طرح تیسری کڑی کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\hat{V}_3 = \frac{(-A_g)^3 \hat{V}_d}{\left[G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\right]^3} \tag{12.86}$$

ہمسر دور میں $A_g = 5\,\text{mS}$ ، $R = 200\,\Omega$ ، $L = 2.2\,\mu\text{H}$ اور $C = 5\,\text{pF}$ لیتے ہوئے مساوات 12.84، مساوات 12.85 اور مساوات 12.86 کے مقداری خط شکل 12.38 میں کھینچے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ تعداد میں ہمسر ایمپلیفائر زنجیری جوڑنے سے عرض پٹی کم ہوتی ہے۔اس مثال میں تمام ہمسر ایمپلیفائر کی گمکی تعدد پر افزائش دباو اکائی $\boldsymbol{A_v} = 1\,\text{V}\,\text{V}^{-1}$ ہے۔ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ شکل 12.37 میں ایمپلیفائر کو استعمال کئے بغیر تین عدد متوازی RLC ادوار کو زنجیری جوڑنے سے مساوات 12.86 نہیں ملتی۔بغیر ایمپلیفائر کے تین مزاحمت متوازی جڑ جاتے ہیں جن کا مجموعہ $\frac{R}{3}$ ہو گا۔اسی طرح تین امالہ گیر متوازی جوڑنے سے $\frac{L}{3}$ ملتا ہے اور تین برق گیر متوازی جوڑنے سے $3C$ ملتا ہے۔یوں صرف RLC زنجیری جوڑنے سے ایک عدد RLC ملتا ہے۔

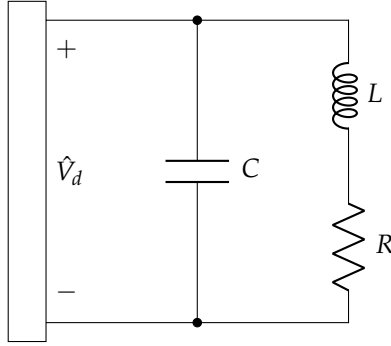
مشق 12.13: متوازی RLC میں $1\,\text{k}\Omega$ ، $L = 0.5\,\text{mH}$ اور $C = 10\,\mu\text{F}$ ہیں۔ گمکی تعدد، معیاری مستقل اور عرض پٹی دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 14.142\,\text{krad}\,\text{s}^{-1}$ ، $Q = 141.42$ ، $\text{BW} = 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

شکل 12.38: زنجیری ایمپلیفائر سے عرض پٹی تنگ کرنے کا عمل۔

مشق 12.14: متوازی RLC میں $R = 4\,\mathrm{k\Omega}$ ، $\mathrm{BW} = 2\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور $Q = 80$ ہیں۔ گمکی تعدد ω_0 ، امالہ اور برق گیر دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 160\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ ، $L = 0.31\,\mathrm{mH}$ ، $C = 0.125\,\mathrm{\mu F}$

عموماً امالہ گیر کی اندرونی مزاحمت کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا۔ متوازی جڑے امالہ گیر اور برق گیر کا بہتر مساوی دور شکل 12.39 میں دکھایا گیا ہے جس کی داخلی فراوانی درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}(j\omega) &= j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \\
&= j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \\
&= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)
\end{aligned}
$$

شکل 12.39: متوازی LC کا بہتر مساوی دور۔

گمکی تعدد ω_0' پر فراوانی حقیقی مقدار ہو گی اور خیالی جزو صفر کے برابر ہو گا یعنی

$$\omega_0' C - \frac{\omega_0' L}{R^2 + \omega_0^2 L^2} = 0 \tag{12.87}$$

جس سے گمکی تعدد حاصل ہوتی ہے۔

$$\omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \tag{12.88}$$

مثال 12.19: شکل 12.39 میں $L = 5\,\text{mH}$ اور $C = 2.2\,\mu\text{F}$ ہیں۔تعدد ω_0 اور ω_0' کو $R = 20\,\Omega$ اور $R = 0.5\,\Omega$ کے لئے حاصل کریں۔

حل: دی گئی معلومات سے

$$\begin{aligned}\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5 \times 10^{-3} \times 2.2 \times 10^{-6}}}\\ &= 9535.6\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔مزاحمت $R = 20\,\Omega$ کے لئے

$$\begin{aligned}\omega_0' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{5\times10^{-3}\times2.2\times10^{-6}} - \left(\frac{20}{5\times10^{-3}}\right)^2}\\ &= 8655\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\end{aligned}$$

اور مزاحمت $R = 0.5\,\Omega$ کے لئے

$$\begin{aligned}\omega_0' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}\\ &= \sqrt{\frac{1}{5\times10^{-3}\times2.2\times10^{-6}} - \left(\frac{0.5}{5\times10^{-3}}\right)^2}\\ &= 9534.1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم مزاحمت پر ω_0' اور ω_0 تقریباً برابر ہوتے ہیں۔

آئیں گمکی دور کی معلومات کو بوڈا خط کے ساتھ جوڑیں۔سلسلہ وار RLC کی فراوانی درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}(j\omega) &= \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}\\ &= \frac{j\omega C}{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1}\end{aligned} \tag{12.89}$$

مساوات 12.30 کا نسب نما بوڈا خط کا دو درجی جزو دیا گیا ہے

$$(j\omega\tau)^2 + 2\zeta(j\omega\tau) + 1$$

جہاں $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ کے برابر ہے لہٰذا دو درجی جزو کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + j\frac{2\zeta\omega}{\omega_0} + 1 \tag{12.90}$$

مساوات 12.90 کا مساوات 12.89 کے نسب نما سے موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$
$$\frac{2\zeta}{\omega_0} = RC$$
$$\zeta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

مساوات 12.37 سلسلہ وار RLC کا Q دیتی ہے

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{12.91}$$

لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

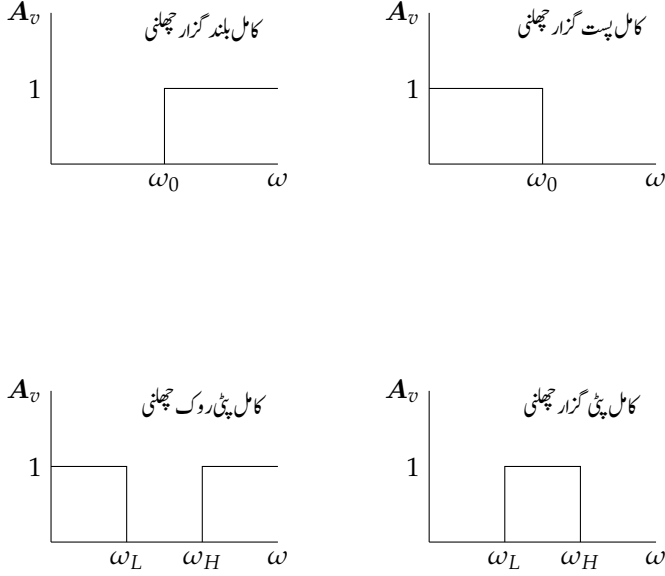
$$Q = \frac{1}{2\zeta} \tag{12.92}$$

مساوات 12.89 کا صفر $\omega = 0$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا اس کے بوڈا خط کی ابتدائی ڈھلوان مثبت بیس ڈیسی بیل فی دہائی ہے۔اب Q کی مقدار درج بالا مساوات کے ذریعہ ζ سے بندھی ہے لہٰذا زیادہ ζ کی صورت میں Q کی قیمت کم ہو گی جبکہ کم ζ کی صورت میں Q کی قیمت زیادہ ہو گی۔شکل 12.27 میں Q بالمقابل تعدد دکھایا گیا ہے جہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ Q کی صورت میں عرض پٹی تنگ ہو جاتی ہے۔یہی اثر بوڈا خط میں ω_0 پر بطور چوٹی نظر آتا ہے۔

12.5 چھلنی

اشارات کو تعدد کی بنیاد پر علیحدہ کرنے کے لئے **چھلنی**[41] استعمال کی جاتی ہے۔ان میں پست گزار، بلند گزار، پٹی گزار اور پٹی روک چھلنی نہایت مقبول ہیں جن کے خط شکل 12.40 میں دکھائے گئے ہیں۔**پست گزار چھلنی**[42] کسی مخصوص تعدد ω_0 سے کم تعدد کے اشارات کو گزرنے دیتی ہے جبکہ بقایا تعدد کے اشارات کو روکتی ہے۔**بلند گزار چھلنی**[43] کسی مخصوص تعدد ω_0 سے زیادہ تعدد کے اشارات کو گزرنے دیتی ہے جبکہ بقایا تعدد کے اشارات کو روکتی ہے۔**پٹی گزار چھلنی**[44] کسی مخصوص تعددی پٹی ω_L تا ω_H کے اشارات کو گزرنے دیتی ہے جبکہ بقایا تعدد کے اشارات کو

---

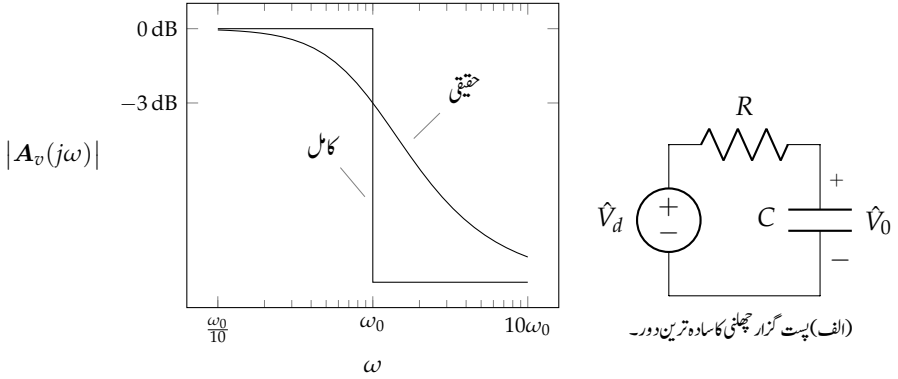
[41] filter
[42] low-pass filter
[43] high-pass filter
[44] band-pass filter

شکل 12.40: کامل چھلنیوں کے خط۔

روکتی ہے۔ پٹی روک چھلنی[45] کسی مخصوص تعددی پٹی ω_L تا ω_H کے اشارات کو روکتی ہے جبکہ بقایا تعدد کے اشارات کو گزرنے دیتی ہے۔

شکل 12.41-الف میں پست گزار چھلنی کا سادہ ترین دور دکھایا گیا ہے جس کی افزائش دباو $A_v = \frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d}$ درج ذیل ہے

$$\begin{aligned}
A_v(j\omega) &= \frac{1}{1+j\omega RC} \\
&= \frac{1}{1+j\omega\tau}
\end{aligned}$$

[45] band-stop filter

(الف) پست گزار چھلنی کا سادہ ترین دور۔

(ب) کامل اور حقیقی پست گزار چھلنی کے خط۔

شکل 12.41: پست گزار چھلنی۔

جہاں $RC = \tau$ **وقتی مستقل**[46] کہلاتا ہے۔ افزائش دباو کی **مقداری خصلت**[47] اور **زاویائی خصلت**[48] لکھتے ہیں۔

$$\left|\boldsymbol{A}_v(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$
$$\underline{/\boldsymbol{A}_v(\omega)} = -\tan^{-1}\omega\tau$$

شکل 12.41-ب میں کامل پست گزار چھلنی اور شکل-الف کے حقیقی چھلنی کے خط دکھائے گئے ہیں۔ اگرچہ ہم چاہتے ہیں کہ پست گزار چھلنی کسی مخصوص تعدد ω_0 سے کم تعدد کو جوں کا توں گزارے اور اس سے بلند تعدد کو قطعاً نہیں گزارے، حقیقی ادوار ایسا کرنے سے قاصر ہوتے ہیں۔ کامل پست گزار چھلنی **انقطاعی تعدد**[49] ω_0 سے کم تعدد کو مکمل طور پر گزارتی ہے جبکہ اس سے زیادہ تعدد کو مکمل طور پر روکتی ہے۔ حقیقی پست گزار چھلنی بھی یہی کچھ کرتی ہے البتہ انقطاعی تعدد کے قریبی تعدد پر اس کی کارکردگی کامل نہیں ہوتی۔ جیسا شکل-ب میں دکھایا گیا ہے، انقطاعی تعدد ω_0 پر حقیقی پست گزار چھلنی کی افزائش دباو A_v تین ڈیسی بیل کم ہوتی ہے۔ جیسا آپ نے بوڈا خطوط میں پڑھا تھا، انقطاعی تعدد کی تعریف یہ ہے کہ اس پر اشارے کی طاقت نصف ہو جائے۔ اشارے کا حیطہ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہونے سے اس کی طاقت آدھی ہوتی ہے۔ جیسا شکل-ب سے واضح ہے، انقطاعی تعدد سے دور تعدد پر حقیقی پست گزار چھلنی کی کارکردگی یقیناً قابل تعریف ہے۔ انقطاعی تعدد سے دس گنا کم $\frac{\omega_0}{10}$ یا دس گنا زیادہ $10\omega_0$ تعدد پر اس کی کارکردگی تقریباً کامل چھلنی جیسے ہے۔

---

[46] time constant
[47] magnitude characteristic
[48] phase characteristic
[49] cut-off frequency

شکل 12.41-الف میں دئے پست گزار چھلنی کو اس طرح سمجھا جا سکتا ہے کہ کم تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ زیادہ ہوتی ہے للہذا تقسیم دباو کے کلیے سے ظاہر ہے کہ برق گیر پر زیادہ دباو پایا جائے گا۔اس کے برعکس زیادہ تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ کم ہوتی ہے للہذا تقسیم دباو کے کلیے کے تحت اس پر دباو گھٹ جائے گا۔انتہائی بلند تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ انتہائی کم ہو گی اور اس پر دباو قابل نظر انداز ہو گا۔

شکل 12.42-الف میں بلند گزار چھلنی کا سادہ ترین دور دکھایا گیا ہے جس کی تبادلی تفاعل لکھتے ہیں جہاں $RC = \tau$ لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_v(j\omega) &= \frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}\\ &= \frac{j\omega C}{1+j\omega RC}\\ &= \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}\end{aligned}$$

تبادلی تفاعل کی مقداری اور زاویائی تفاعل لکھتے ہیں۔

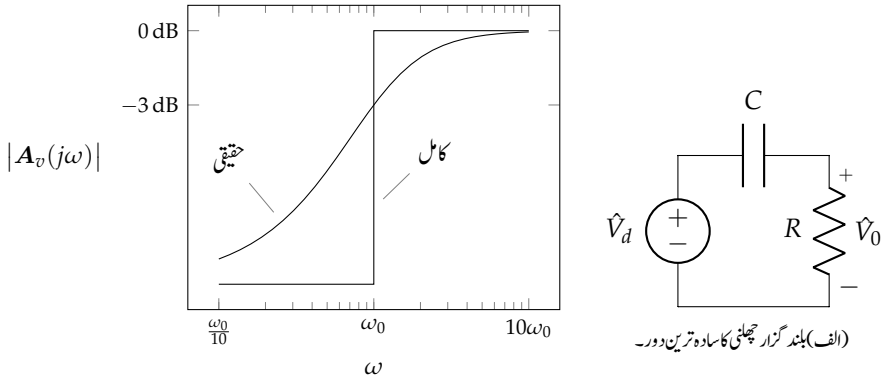
$$\left|\boldsymbol{A}_v(\omega)\right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \tag{12.93}$$

$$\underline{/\boldsymbol{A}_v(\omega)} = 90^{-circ} - \tan^{-1}\omega\tau \tag{12.94}$$

شکل-ب میں تبادلی تفاعل کا مقداری خط دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی کامل بلند گزار چھلنی کا خط بھی دکھایا گیا ہے۔یہاں بھی حقیقی چھلنی کی افزائش دباو انقطاعی تعدد پر اشارے کی طاقت آدھی کرتی ہے۔

شکل 12.42-الف میں دئے بلند گزار چھلنی کو اس طرح سمجھا جا سکتا ہے کہ صفر تعدد کے قریب برق گیر کی رکاوٹ انتہائی زیادہ ہو گی للہذا تقسیم دباو کے کلیے سے ظاہر ہے کہ مزاحمت پر دباو انتہائی کم ہو گا۔اس کے برعکس انتہائی زیادہ تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ انتہائی کم ہو گی للہذا تقسیم دباو کے کلیے کے تحت پورا دباو مزاحمت پر پایا جائے گا۔

پٹی گزار چھلنی کا سادہ ترین دور شکل 12.43 میں دکھایا گیا ہے۔اس کی افزائش دباو لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_v(j\omega) &= \frac{R}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\\ &= \frac{\omega RC}{\omega RC + j(\omega^2 LC - 1)}\end{aligned} \tag{12.95}$$

(ب) کامل اور حقیقی بلند گزار چھلنی کے خط۔

(الف) بلند گزار چھلنی کا سادہ ترین دور۔

شکل 12.42: بلند گزار چھلنی۔

مقداری تفاعل لکھتے ہیں

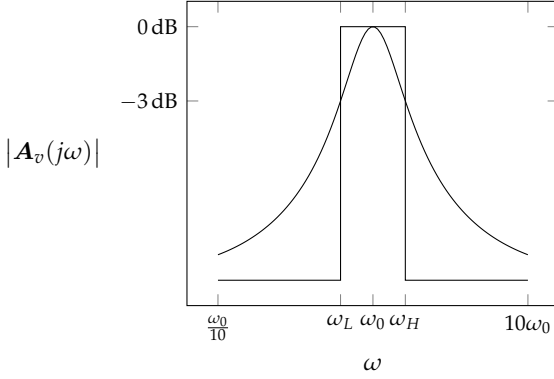
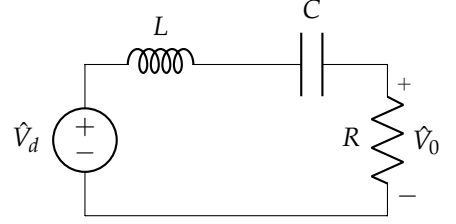
$$\left|A_v(\omega)\right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \tag{12.96}$$

جس کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس کی کارکردگی یوں سمجھی جا سکتی ہے کہ درمیانی تعدد یعنی گمکی تعدد ω_0 پر $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا داخلی اشارہ جوں کا توں مزاحمت پر پہنچتا ہے۔گمکی تعدد سے بہت کم تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ بہت بڑھ جاتی ہے لہٰذا تقسیم دباو کے کلیے سے ظاہر ہے کہ مزاحمت پر دباو بہت کم ہو گی۔اسی طرح گمکی تعدد سے بہت زیادہ تعدد پر امالی رکاوٹ کی قیمت بہت بڑھ جاتی ہے جس کی وجہ سے مزاحمت پر دباو بہت کم ہوتی ہے۔

مساوات 12.95 میں صرف ω متغیر مقدار ہے۔افزائش دباو کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس تعدد ω_0 پر حاصل ہو گی جس پر نسب نما میں قوسین کی قیمت صفر کے برابر ہو یعنی

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{12.97}$$

اس تعدد پر $\left|A_v(\omega_0)\right| = 1\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ حاصل ہوتا ہے۔انقطاعی تعدد پر افزائش دباو $\left|A_v(\omega_0)\right|$ کے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہو گی۔یوں مساوات 12.96 کو استعمال کرتے ہوئے انقطاعی تعدد کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ب) کامل اور حقیقی پٹی گزار چھلنی کے خط۔

(الف) پٹی گزار چھلنی کا سادہ ترین دور۔

شکل 12.43: پٹی گزار چھلنی۔

دونوں جانب مربع لیتے اور ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل

$$(\omega^2 LC - 1)^2 = (\omega RC)^2$$

یعنی

$$\omega^2 LC - 1 = \mp \omega RC$$

یا

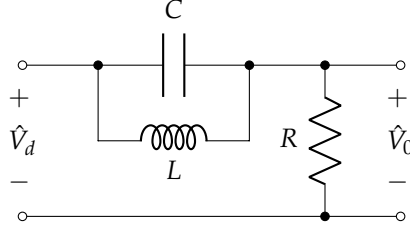
$$\omega^2 LC \pm \omega RC - 1 = 0$$

ملتا ہے۔اس دو درجی مساوات کے حل لکھتے ہیں

$$\omega_L = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}}{2} \tag{12.98}$$

$$\omega_H = \frac{+\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}}{2} \tag{12.99}$$

جن سے پٹی گزار چھلنی کی عرض پٹی BW حاصل ہوتی ہے۔

$$\mathrm{BW} = \omega_H - \omega_L = \frac{R}{L} \tag{12.100}$$

شکل 12.44: دندانہ چھلنی کی مدد سے 50 Hz سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 12.20: اگر آپ کو حساس اشارات کے ساتھ کام کرنا پڑے تو آپ دیکھیں گے کہ ان میں واپڈا کا 50 Hz پایا جاتا ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا نہایت مشکل ہوتا ہے۔ موبائل ٹیلیفون کے زمانے سے پہلے زمینی تار والے ٹیلیفون استعمال کئے جاتے تھے جن کی تاروں میں عموماً 50 Hz کا غیر مطلوب اشارہ گھس جاتا تھا جو شہد کی مکھی کی طرح ہوں ہوں کرتا سنائی دیتا تھا۔

میری بیٹی عفت بریخنہ نے انجنیئرنگ کے آخری سال میں برقی قلب نگار[50] بنایا۔ انہیں مسلسل 50 Hz کے غیر مطلوب اشارے کا سامنہ کرنا پڑا۔ پچاس ہرٹز کے غیر مطلوب اشارے کی خاصیت یہ ہے کہ اس کی تعدد اٹل ہے۔ اس سے دندانہ چھلنی[51] کی مدد سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ شکل میں دندانہ چھلنی کا دور دکھایا گیا ہے۔ تار کے ٹیلیفون میں R سپیکر کی مزاحمت ہو گی۔ برقی قلب نگار میں R اگلے دور کا داخلی تھونن مزاحمت ہو گا۔

متوازی امالہ گیر اور برق گیر کی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z} &= \frac{(j\omega L)(\frac{1}{j\omega C})}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{\frac{L}{C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\end{aligned}$$

---

[50] electrocardiogram, ecg
[51] notch filter

تقسیم دباو کے کلیے سے خارجی دباو لکھتے ہیں

$$\hat{V}_0 = \left(\frac{R}{R+Z}\right)\hat{V}_d = \frac{R\hat{V}_d}{R + \frac{\frac{L}{C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}}$$

جس سے درج ذیل تبادلی تفاعل حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d} = \frac{(j\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{j\omega}{RC}\right) + \frac{1}{LC}}$$

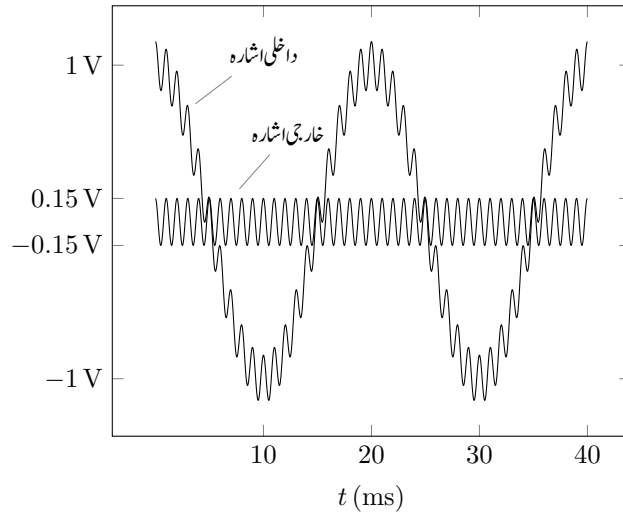
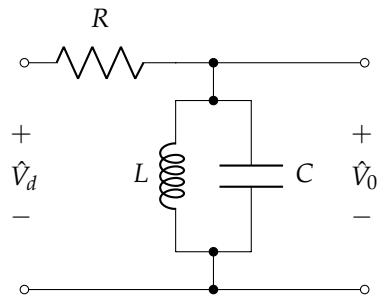
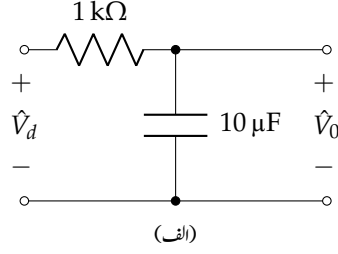
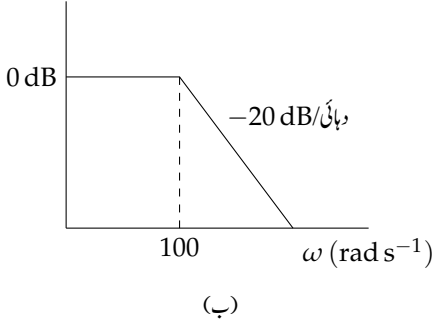
غیر مطلوب اشارے سے چھٹکارے کے لئے ضروری ہے کہ $50\,\mathrm{Hz}$ یعنی $100\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر تبادلی تفاعل صفر کے برابر ہو۔یوں تبادلی تفاعل کا شمار کنندہ اس تعدد پر صفر کے برابر درکار ہے جس سے درج ذیل شرط حاصل ہوتی ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100\pi \tag{12.101}$$

یوں برق گیر کی قیمت $100\,\mathrm{\mu F}$ چنتے ہوئے امالہ کی قیمت $101.3\,\mathrm{mH}$ حاصل ہوتی ہے۔دندانہ چھلنی کی کارکردگی دیکھنے کی خاطر داخلی اشارے $v_d(t)$ کو $50\,\mathrm{Hz}$ اور $1000\,\mathrm{Hz}$ کے سائن نما اشارات کا مجموعہ تصور کرتے ہیں۔

$$v_d(t) = 1\cos(2\pi 50t) + 0.15\cos(2\pi 1000t)$$

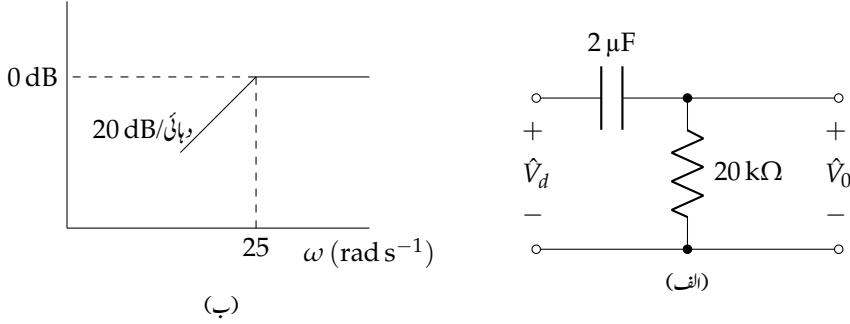
مزاحمت کو $32\,\Omega$ لیتے ہوئے شکل 12.45 میں داخلی اور خارجی اشارات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $50\,\mathrm{Hz}$ سے مکمل چھٹکارا حاصل ہوا ہے۔

مشق 12.15: شکل 12.46 میں تبادلی تفاعل حاصل کرتے ہوئے چھلنی کی قسم دریافت کریں۔

شکل 12.45: دندانہ چھلنی کا داخلی اور خارجی اشارہ۔

شکل 12.46: مشق 12.15 کی چھلنی۔

شکل 12.47: مشق 12.16 کی چھلنی۔

جواب: یہ دندانہ گزار چھلنی ہے جو ایک مخصوص تعدد کو گزرنے دیتی ہے۔

$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d} = \frac{1}{1 + \frac{RC}{L}\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)}$$

مشق 12.16: شکل 12.47 میں دکھائے چھلنی کا بوڈا مقداری خط کھینچیں۔

مشق 12.17: شکل 12.48 میں دکھائے چھلنی کا بوڈا مقداری خط کھینچیں۔

شکل 12.48: مشق 12.17 کی چھلنی۔

عامل چھلنی

گزشتہ حصے میں پست گزار، بلند گزار، پٹی گزار اور پٹی روک چھلنی پر غور کیا گیا جنہیں غیر عامل پرزوں یعنی مزاحمت، امالہ اور برق گیر سے تخلیق دیا گیا۔ان تمام چھلنیوں کو عامل پرزوں مثلاً حسابی ایمپلیفائر کی مدد سے بھی تخلیق دیا جا سکتا ہے۔عامل پرزے استعمال کرتے ہوئے اشارے کا حیطہ بڑھایا بھی جا سکتا ہے۔آئیں حسابی ایمپلیفائر سے انہیں تخلیق دیں۔

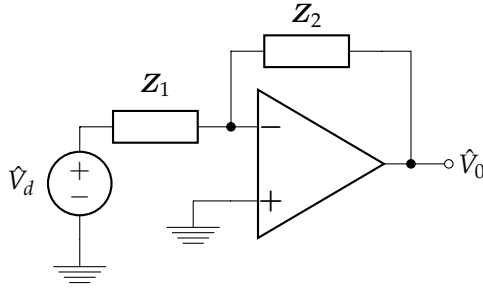
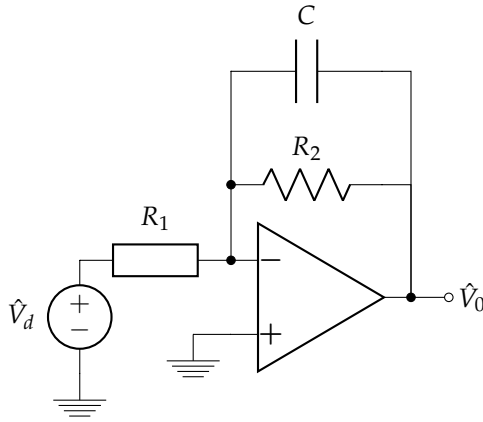
شکل 12.49-الف میں منفی ایمپلیفائر دکھایا گیا ہے جس کا تبادلی تفاعل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_v(j\omega) &= \frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d}\\ &= -\frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1}\end{aligned}$$

شکل 12.49-ب میں $\boldsymbol{Z}_1$ کی جگہ R_1 نسب کیا گیا ہے جبکہ $\boldsymbol{Z}_2$ کی جگہ مزاحمت R_2 اور برق گیر C متوازی جوڑے گئے ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_1 &= R_1\\ \boldsymbol{Z}_2 &= \frac{R_2}{1+j\omega R_2 C}\end{aligned}$$

ہوں گے جن سے تبادلی تفاعل درج ذیل ملتا ہے جو پست گزار چھلنی کا تفاعل ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ داخلی اشارے کا حیطہ $-\frac{R_2}{R_1}$ گنا بڑھایا گیا ہے اور انقطاعی تعدد $\omega_0 = \frac{1}{R_2 C}$ ہے۔

$$\boldsymbol{A}_v(j\omega) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1+j\omega R_2 C} \tag{12.102}$$

شکل 12.49: منفی ایمپلیفائر۔

شکل 12.50-الف میں مثبت ایمپلیفائر دکھایا گیا ہے جس کا تبادلی تفاعل

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_v(j\omega) &= \frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d}\\ &= 1+\frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1}\end{aligned}$$

ہے۔شکل 12.50-ب میں رکاوٹ کی جگہ نسب پرزے دکھائے گئے ہیں جہاں سے

$$\boldsymbol{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1}$$
$$\boldsymbol{Z}_2 = \frac{R}{1+j\omega RC_2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں تبادلی تفاعل درج ذیل ہو گا جہاں آخری قدم پر $\omega_1 = \frac{1}{R(C_1+C_2)}$ اور $\omega_2 = \frac{1}{RC_2}$ لکھے گئے ہیں۔چونکہ $\omega_1 < \omega_2$ ہے لہٰذا یہ تفاعل بلند گزار چھلنی کا تفاعل ہے۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_v(j\omega) &= 1 + \frac{\frac{R}{1+j\omega RC_2}}{\frac{1}{j\omega C_1}} \\
&= \frac{1+j\omega R(C_1+C_2)}{1+j\omega RC_2} \\
&= \frac{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}
\end{aligned}$$

سوالات

سوال 12.1: شکل 12.51 میں داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}(s)$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s) = R_1 \frac{sR_2L}{S^2R_2LC+SL+R_2}$

سوال 12.2: شکل 12.52 میں داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}(s)$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s) = \frac{sL_1}{s^2L_1C_1+1} + \frac{s^2L_2C_2+1}{sC_2}$

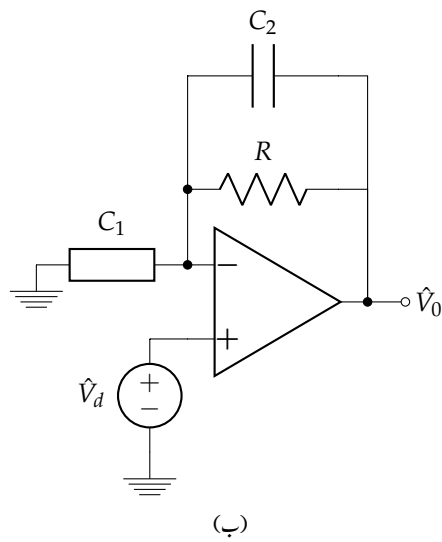
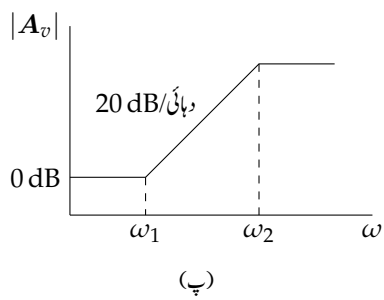
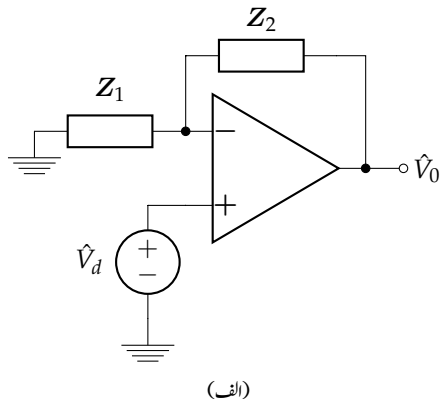
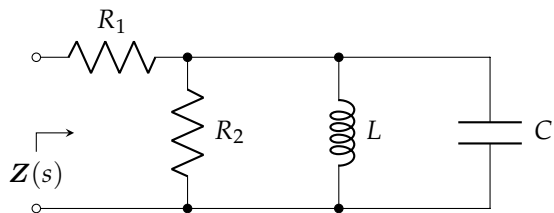
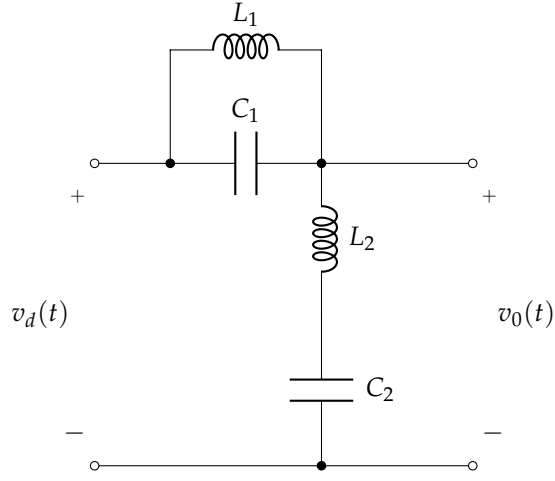
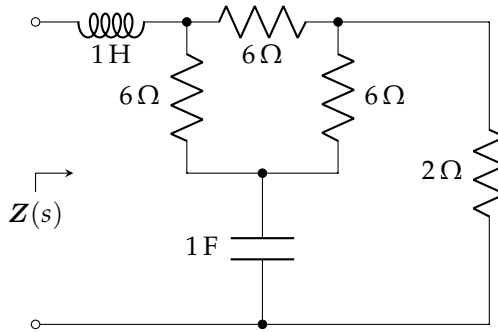
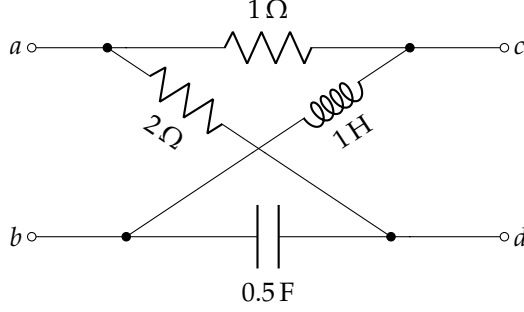
سوال 12.3: شکل 12.52 میں تبادلی تفاعل $\frac{\mathrm{V}_0(s)}{\mathrm{V}_d(s)}$ لکھیں۔

جواب: $\frac{\mathrm{V}_0(s)}{\mathrm{V}_d(s)} = \frac{s^4L_1L_2C_1C_2+s^2(L_1C_1+L_2C_2)+1}{s^4L_1L_2C_1C_2+s^2*(L_1C_1+L_2C_2+L_1C_2)+1}$

سوال 12.4: شکل 12.53 کی داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}(s)$ دریافت کریں۔

(الف)

(پ)

(ب)

شکل 12.50: مثبت ایمپلیفائر۔

شکل 12.51: سوال 12.1 کا دور۔

شکل 12.52: سوال 12.2 اور سوال 12.3 کا دور۔

شکل 12.53: سوال 12.4 کا دور۔

شکل 12.54: سوال 12.5 کا دور۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s) = \frac{6s^2+21s+6}{6s+1}$

سوال 12.5: شکل 12.54 میں c اور d کو کھلے سر رکھتے ہوئے a اور b کے مابین رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z} = \frac{2s+2}{s+2}$

سوال 12.6: شکل 12.54 میں c اور d کو آپس میں قصر دور کرتے ہوئے a اور b کے مابین رکاوٹ دریافت کریں۔

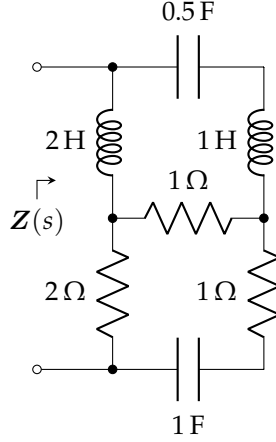
جواب: $\boldsymbol{Z} : \frac{2s^2+6s+4}{3s^2+6}$

سوال 12.7: شکل 12.54 میں c اور d کے مابین $1\,\Omega$ مزاحمت نسب کرتے ہوئے a اور b کے مابین رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s) = \frac{4s^2+10s+6}{4s^2+3s+8}$

سوال 12.8: شکل 12.55 میں داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}(s)$ دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s) = \frac{8s^4+12s^3+26s^2+14s+4}{12s^3+6s^2+9s+2}$

سوال 12.9: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)(0.1j\omega+1)}$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

شکل 12.55: سوال 12.8 کا دور۔

سوال 12.10: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(j\omega) = \frac{100j\omega}{(j\omega+1)(j\omega+10)(j\omega+50)}$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

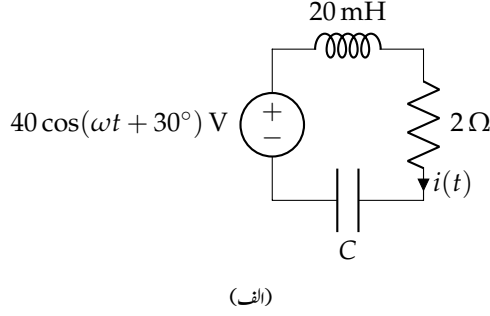
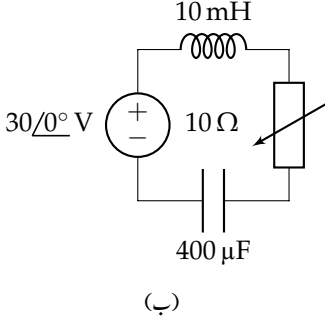
سوال 12.11: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(j\omega) = \frac{100}{(j\omega)^2(j\omega+100)}$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

سوال 12.12: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(j\omega) = \frac{500(j\omega+2)(j\omega+100)}{-\omega^2(j\omega+1000)^2}$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

سوال 12.13: شکل 12.56-الف میں منبع کی تعدد ω قابل تبدیل ہے۔دور کی قدرتی گمکی تعدد $500\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہونے کی صورت میں C کی قیمت کا تخمینہ لگائیں۔قدرتی تعدد ω_0 پر دور میں رو $i(t)$ دریافت کریں۔تعدد $2\omega_0$ اور $\frac{\omega_0}{2}$ پر بھی رو دریافت کریں۔

جوابات: $20\cos(500t+30^\circ)\,\mathrm{A}$ ، $2.640\cos(1000t-52.4^\circ)\,\mathrm{A}$ ، $2.640\cos(250t+112.4^\circ)\,\mathrm{A}$

سوال 12.14: شکل 12.56-ب میں عرض پٹی دریافت کریں۔متغیر مزاحمت کی قیمت تبدیل کرتے ہوئے عرض پٹی آدھی کریں۔مزاحمت کی قیمت کیا ہو گی؟

جوابات: $\mathrm{BW} = 1000\,\mathrm{rad}$ ، $R = 5\,\Omega$

شکل 12.56: سوال 12.13 اور سوال 12.13 کے ادوار۔

سوال 12.15: ایک سلسلہ وار RLC دور کی گمکی تعدد $\omega_0 = 2\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ ہے جبکہ $C = 40\,\mathrm{\mu F}$ اور گمکی تعدد پر کل رکاوٹ $2.2\,\Omega$ ہے۔ مزاحمت اور امالہ کی قیمت دریافت کریں۔ دور کی عرض پٹی اور معیاری مستقل بھی حاصل کریں۔

جوابات: $R = 2.2\,\Omega$ ، $L = 6.25\,\mathrm{mH}$ ، $\mathrm{BW} = 352\,\mathrm{rad}$ ، $Q = 5.682$

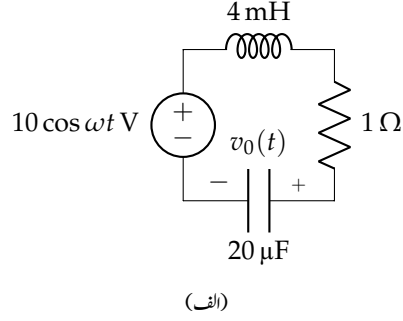
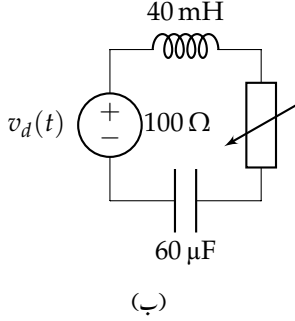
سوال 12.16: سلسلہ وار RLC دور کا معیاری مستقل 120 اور گمکی تعدد $15\,000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ دور کی عرض پٹی، بلند انقطاعی تعدد اور پست انقطاعی تعدد دریافت کریں۔

جوابات: $\mathrm{BW} = 125\,\mathrm{rad}$ ، $\omega_H = 15\,063\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\omega_L = 14\,938\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

سوال 12.17: شکل 12.57-الف میں گمکی تعدد ω_0 ، معیاری مستقل Q ، عرض پٹی BW اور بلند انقطاعی تعدد ω_H حاصل کریں۔ زیادہ سے زیادہ $v_0(t)$ بھی دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 3536\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $Q = 14.1$ ، $\mathrm{BW} = 250\,\mathrm{rad}$ ، $\omega_H = 3663\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $v_{0\,\text{بلندتر}} = 141.51\,\mathrm{V}$

سوال 12.18: شکل 12.57-ب میں $v_d(t) = 20\cos\omega t\,\mathrm{V}$ ہے۔ قدرتی تعدد، معیاری مستقل، عرض پٹی اور گمکی تعدد پر دور میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 645\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $Q = 0.26$ ، $\mathrm{BW} = 2500\,\mathrm{rad}$ ، $p = 2\,\mathrm{W}$

شکل 12.57: سوال 12.17 اور سوال 12.18 کے ادوار۔

سوال 12.19: متوازی RLC کی گمکی تعدد $\omega_0 = 1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ اور گمکی تعدد پر کل رکاوٹ $\boldsymbol{Z} = 10\,\Omega$ ہے۔دور میں $C = 20\,\mathrm{\mu F}$ ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ L ، R ، Q اور BW دریافت کریں۔

جوابات: $L = 50\,\mathrm{mH}$ ، $R = 10\,\Omega$ ، $Q = 0.2$ ، $\mathrm{BW} = 5\,\mathrm{krad}$

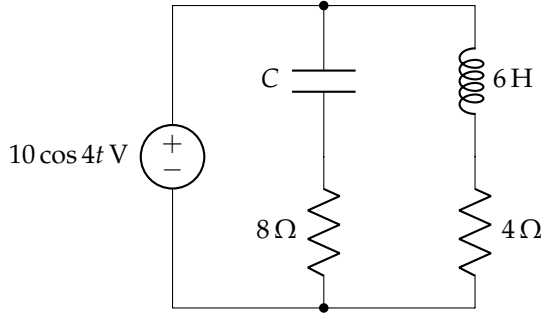
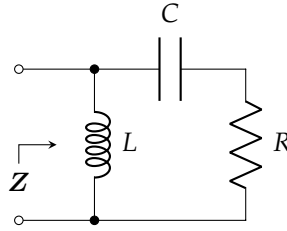
سوال 12.20: متوازی RLC کی گمکی تعدد $10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور گمکی تعدد پر فراوانی $\boldsymbol{Y} = 1\,\mathrm{mS}$ ہے۔دور میں $C = 1.5\,\mathrm{\mu F}$ ہے۔امالہ L اور مزاحمت R معلوم کریں۔

جوابات: $L = 6.67\,\mathrm{mH}$ ، $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$

سوال 12.21: متوازی RLC کو متغیر تعدد، $4\,\mathrm{A}$ کے منبع سے طاقت فراہم کیا گیا ہے۔دور میں $R = 500\,\Omega$ ، $L = 80\,\mathrm{mH}$ اور $C = 10\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔دور کی عرض پٹی، انقطاعی تعدد اور انقطاعی تعدد پر دور کا دباو حاصل کریں۔

جوابات: $\mathrm{BW} = 200\,\mathrm{rad}$ ، $\omega_H = 1222\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\omega_L = 1022\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $1414\,\mathrm{V}$ ، $1414\,\mathrm{V}$

سوال 12.22: ایک متوازی RLC دور کی گمکی تعدد $1\,\mathrm{Mrad\,s^{-1}}$ اور عرض پٹی $100\,\mathrm{rad}$ ہے۔گمکی تعدد پر دور کی کل رکاوٹ $2000\,\Omega$ ہے۔دور کی امالہ، برق گیر گنجائش اور معیاری مستقل دریافت کریں۔

جوابات: $L = 0.2\,\mathrm{\mu H}$ ، $C = 5\,\mathrm{\mu F}$ ، $Q = 10\,000$

شکل 12.58: سوال 12.24 کا دور۔

شکل 12.59: سوال 12.25 کا دور۔

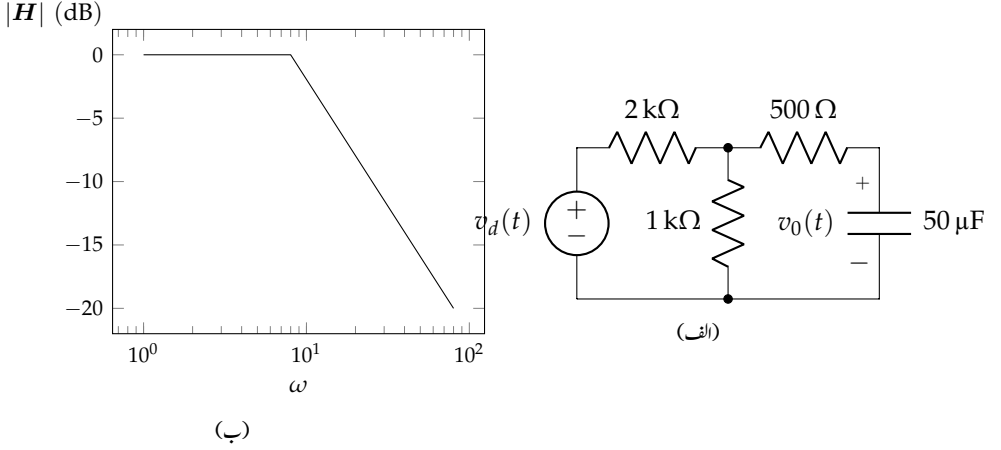
سوال 12.23: $100\,\Omega$ ، $100\,\mu\text{F}$ اور L کو متوازی جوڑا گیا ہے۔دور کی گمکی تعدد $1000\,\text{rad s}^{-1}$ ہے۔دور کو $i_d(t) = \cos 1000t + \cos 1500t\ \text{A}$ منبع سے طاقت مہیا کیا گیا ہے۔امالہ L ، معیاری مستقل، عرض پٹی BW اور Q حاصل کریں۔دور پر دباو $v_0(t)$ بھی حاصل کریں۔

جوابات: $L = 10\,\text{mH}$ ، $\text{BW} = 100\,\text{rad}$ ، $Q = 10$ ،
$v_0(t) = 100\cos 1000t + 11.9\cos(1500t - 83^\circ)\ \text{V}$

سوال 12.24: شکل 12.58 میں گمکی تعدد پر ہے۔برقی گیر گنجائش C دریافت کریں۔

جوابات: $C = \frac{37 \mp \sqrt{793}}{768}\ \text{F}$

سوال 12.25: شکل 12.59 کے گمکی تعدد کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{|C^2R^2 - CL|}}$

شکل 12.60: سوال 12.26 کا دور۔

سوال 12.26: شکل 12.60-الف کا تبادلی تفاعل $\frac{V_0(j\omega)}{V_d(j\omega)}$ لکھیں اور اس کا بوڈا مقداری خط کھینچیں۔

جواب: $\frac{V_0(j\omega)}{V_d(j\omega)} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{8}}$ ، بوڈا مقداری خط شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

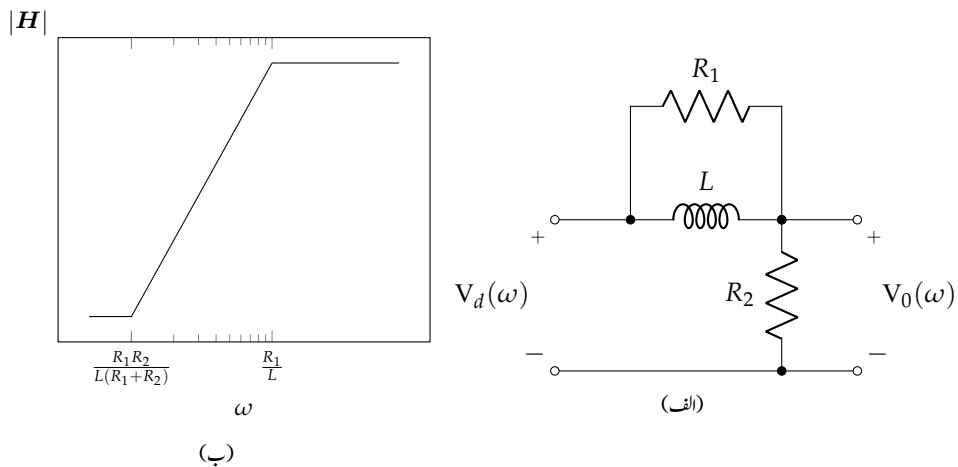
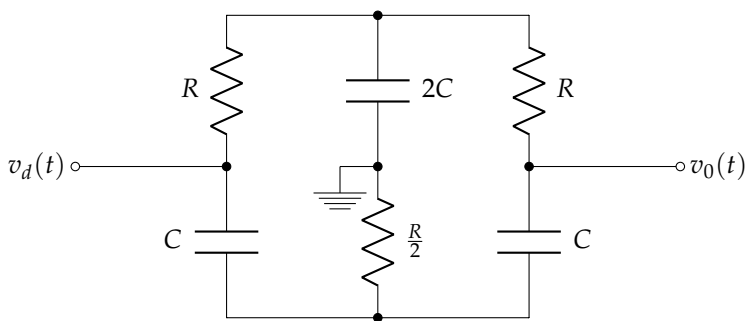
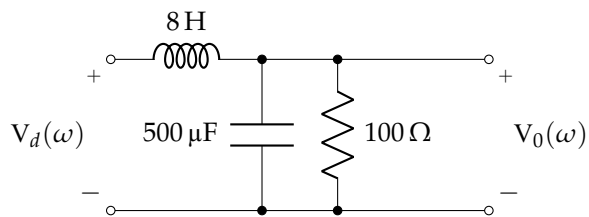
سوال 12.27: شکل 12.61-الف کا تبادلی تفاعل $\frac{V_0(\omega)}{V_d(\omega)}$ لکھیں۔ چھلنی کی قسم لکھیں۔

جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{R_2 L(j\omega+\frac{R_1}{L})}{j\omega+\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)}}$، بلند گزار چھلنی۔

سوال 12.28: شکل 12.62 کا تبادلی تفاعل $\frac{V_0(\omega)}{V_d(\omega)}$ لکھیں۔

جواب: $\frac{-\omega^2+\frac{1}{R^2C^2}}{-\omega^2+\frac{j4\omega}{RC}+\frac{1}{R^2C^2}}$

سوال 12.29: شکل 12.63 کا تبادلی تفاعل $\frac{V_0(\omega)}{V_d(\omega)}$ لکھیں۔

جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{250}{-\omega^2+j20\omega+250}$

شکل 12.61: سوال 12.27 کا دور۔

شکل 12.62: سوال 12.28 کا دور۔

شکل 12.63: سوال 12.29 کا دور۔

باب 13

لاپلاس بدل

13.1 تعریف

کسی تفاعل $f(t)$ کا **لاپلاس بدل**[1] درج ذیل مساوات دیتا ہے

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathrm{F}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{13.1}$$

جہاں s **مخلوط تعدد**[2] ہے

$$s = \sigma + j\omega \tag{13.2}$$

اور تفاعل $f(t)$ کی قیمت $t < 0$ پر صفر کے برابر ہے۔

$$f(t) = 0 \quad t < 0 \tag{13.3}$$

لاپلاس بدل سے ادوار کا حل $t \geq 0$ کے لئے حاصل کیا جاتا ہے جبکہ $t < 0$ کو ابتدائی حالت میں سمویا جاتا ہے۔ لاپلاس بدل وقتی دائرہ کار میں تفاعل $f(t)$ کو تعددی دائرہ کار کے تفاعل $\mathrm{F}(s)$ میں تبدیل کرتی ہے۔

[1] Laplace transform
[2] complex frequency

کسی تفاعل کا لاپلاس بدل اس صورت پایا جاتا ہے جب تفاعل درج ذیل شرط پر پورا اترتا ہو جہاں σ کوئی مثبت قیمت ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} \left| f(t) \right| \mathrm{d}t < \infty \tag{13.4}$$

لاپلاس بدل کے حصول میں $e^{-\sigma t}$ کے ارتکازی جزو کی بنا کئی ایسے کئی اہم تفاعل کے لاپلاس بدل پائے جاتے ہیں جن کے **فوریئر بدل**[3] نہیں پائے جاتے۔ برقی ادوار میں ایسے تفاعل استعمال کئے جاتے ہیں جن کے لاپلاس بدل پائے جاتے ہوں۔

الٹ لاپلاس بدل[4] درج ذیل مساوات دیتی ہے

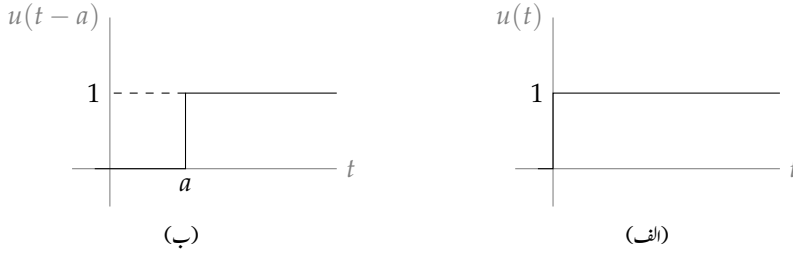
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{F}(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\omega}^{\sigma + j\omega} \mathrm{F}(s) e^{st} \,\mathrm{d}s \tag{13.5}$$

جہاں σ_1 حقیقی ہے اور اس کی قیمت مساوات 13.4 کے σ سے زیادہ ہے یعنی $\sigma_1 > \sigma$ ہے۔ الٹ لاپلاس بدل تعددی دائرہ کار میں تفاعل $\mathrm{F}(s)$ کو وقتی دائرہ کار کے تفاعل $f(t)$ میں تبدیل کرتی ہے۔

لاپلاس بدل آسانی سے حاصل ہوتا ہے جبکہ الٹ لاپلاس بدل مشکل سے حاصل ہوتا ہے۔ ہم کئی تفاعل کے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے انہیں جدول میں جوڑیوں کی صورت میں لکھیں گے اور الٹ بدل کو اسی جدول سے دیکھ کر حاصل کریں گے۔ کسی بھی وقتی تفاعل $f(t)$ کا منفرد لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ پایا جاتا ہے لہٰذا دو مختلف وقتی تفاعل $f_1(t)$ اور $f_2(t)$ کے لاپلاس بدل کسی بھی صورت میں یکساں نہیں ہو سکتے ہیں۔ یوں کسی بھی لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ کو سادہ ترین اجزاء میں تقسیم کرتے ہوئے ان کے الٹ بدل کو جدول سے پڑھا جاتا ہے۔ تمام اجزاء کے الٹ لاپلاس بدل کا مجموعہ درکار وقتی تفاعل ہو گا۔ ہم لاپلاس بدل کو **جزوی کسری پھیلاو**[5] کے ذریعہ اجزاء میں تقسیم کریں گے۔

13.2 نادر تفاعل

برقی ادوار میں **اکائی سیڑھی تفاعل**[6] $u(t)$ اور **اکائی ضرب تفاعل**[7] $\sigma(t)$ نہایت اہم ہیں۔ ایسے تفاعل جو یا تو خود کہیں غیر متناہی ہوں اور یا ان کا تفرق کہیں غیر متناہی ہو کو **نادر تفاعل**[8] کہتا ہے۔ اکائی سیڑھی تفاعل اور اکائی ضرب تفاعل نادر تفاعل ہیں۔ اکائی سیڑھی تفاعل پر صفحہ 400 پر حصہ 7.3 میں ہم غور کر چکے ہیں۔

[3] Fourier transform
[4] inverse Laplace transform
[5] partial fraction expansion
[6] unit step function
[7] unit impulse function
[8] singularity function

شکل 13.1: اکائی سیڑھی تفاعل۔

شکل 13.1-الف میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{13.6}$$

اکائی سیڑھی تفاعل $u(t)$ ، جیسے باب 7 میں ذکر کیا گیا، لمحہ $t = 0\,\mathrm{s}$ پر سوئچ چالو کرتے ہوئے دور پر $1\,\mathrm{V}$ یا $1\,\mathrm{A}$ لاگو کرنے کے مترادف ہے۔آئیں شکل 13.1-الف میں دکھائے گئے اکائی سیڑھی تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

مثال 13.1: شکل 13.1 کے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: مساوات 13.1 کے استعمال سے شکل-الف کا لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty 1e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty \\
&= \frac{e^{-\infty s} - e^{-0s}}{-s} \\
&= \frac{1}{s} \quad \sigma > 0
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\sigma > 0$ کی بنا $e^{-\infty s} = 0$ لکھا گیا ہے۔ اس طرح اکائی سیڑھی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathrm{F}(s) = \frac{1}{s} \tag{13.7}$$

شکل 13.1-ب میں وقت کے لحاظ سے منتقل ہوا اکائی سیڑھی تفاعل دکھایا گیا ہے جس کو **وقتی منتقولہ اکائی سیڑھی تفاعل**[9] کہتے ہیں۔ آئیں اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t-a)] &= \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a 0e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty 1e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^\infty \\
&= \frac{e^{-as}}{s} \quad \sigma > 0
\end{aligned}$$

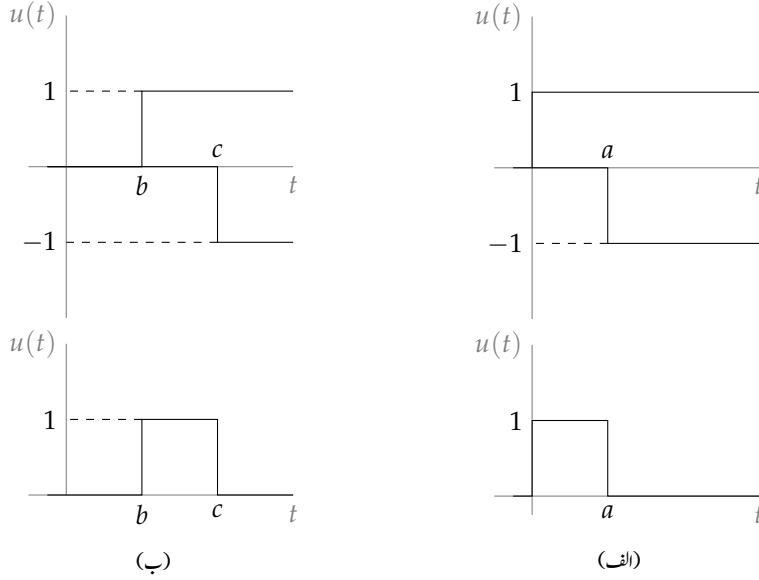
اس طرح وقتی منتقولہ اکائی سیڑھی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = F(s) = \frac{e^{-as}}{s} \tag{13.8}$$

مثال 13.2: شکل 13.2-الف میں دو عدد اکائی سیڑھی تفاعل سے دھڑکن کا حصول دکھایا گیا ہے۔ دھڑکن کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔ شکل-ب میں وقت کے لحاظ سے منتقل شدہ دھڑکن دکھائی گئی ہے۔ اس کا بھی لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: شکل 13.2-الف کے دھڑکن کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < a \\ 0 & t > a \end{cases} \tag{13.9}$$

[9] time-shifted unit step function

شکل 13.2: مثال 13.2 کے اشکال۔

لہٰذا لاپلاس تکمل درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^a 1e^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1-e^{-as}}{s} \qquad \sigma > 0\end{aligned}$$

یعنی دھڑکن کا لاپلاس بدل

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1-e^{-as}}{s} \tag{13.10}$$

ہو گا۔ شکل 13.2-ب کے تفاعل کو اکائی سیڑھی تفاعل کا مجموعہ لکھتے ہوئے

$$f(t) = u(t-b) - u(t-c)$$

لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-b)] - \mathcal{L}[u(t-c)]$$

مساوات 13.8 کے استعمال سے درج بالا کو

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathrm{F}(s) = \frac{e^{-bs} - e^{-cs}}{s} \tag{13.11}$$

لکھ سکتے ہیں۔

اکائی ضرب تفاعل

شکل 13.3-الف کے مستطیل کی چوڑائی a اور لمبائی $\frac{1}{a}$ ہے لہٰذا اس کا رقبہ $(a \times \frac{1}{a} = 1)$ اکائی کے برابر ہے۔ مستطیل کی چوڑائی لامتناہی کم $(a \to 0)$ کرنے سے اس کی لمبائی لامتناہی بڑھ $(\frac{1}{a} \to \infty)$ جائے گی البتہ اس کا رقبہ اکائی ہی رہے گا۔ ایسا مستطیل جس کی چوڑائی صفر کے قریب تر اور رقبہ اکائی ہو کو **اکائی ضرب تفاعل**[10] تصور کیا جا سکتا ہے۔ لمحہ t_0 پر پائے جانے والے اکائی ضرب تفاعل کو $\delta(t - t_0)$ لکھا جاتا ہے جس کو ترسیمی طور پر شکل 13.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اکائی ضرب تفاعل کو کئی دیگر تفاعل سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

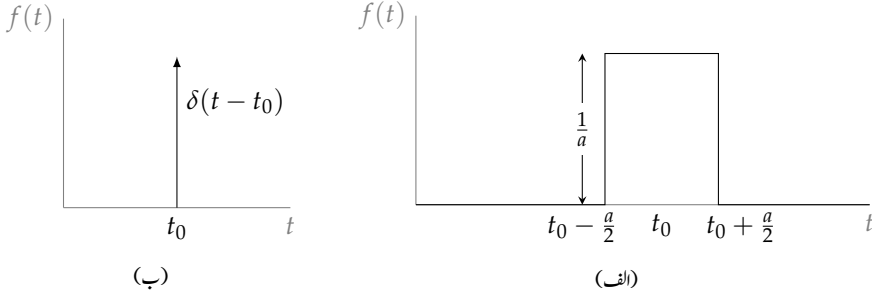
لکڑی پر کیل کو ہتھوڑی سے ضرب لگانے سے نہایت کم وقت کے لئے انتہائی زیادہ طاقت عمل میں آتا ہے اگرچہ ہتھوڑی کی توانائی محدود ہوتی ہے۔ اگر ہتھوڑی کی توانائی ایک جاول ہوتی تو اس کو **اکائی ضرب تفاعل** تصور کیا جا سکتا ہے۔ اسی مشابہت سے ہم ایسے تفاعل کو **اکائی ضرب تفاعل** کہیں گے۔

اکائی ضرب تفاعل کو الجبرائی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= 0 \quad t \neq t_0 \\ \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t - t_0) \, \mathrm{d}t &= 1 \quad \epsilon > 0 \end{aligned} \tag{13.12}$$

اکائی جھٹکے کی قیمت لمحہ $t = t_0$ پر غیر معین ہے جبکہ اس لمحے کے علاوہ اس کی قیمت صفر کے برابر ہے البتہ جھٹکے کا رقبہ اکائی ہے۔ جھٹکے کے رقبے کو تفاعل کا زور بھی کہتے ہیں۔

---

unit impulse function[10]

شکل 13.3: اکائی ضرب تفاعل۔

اکائی ضرب تفاعل کی ایک اہم خاصیت جسے **خاصیت نمونہ بندی**[11] کہتے ہیں کو درج ذیل تکمل سے سمجھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t &= \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t_0)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t\\ &= f(t_0)\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t\\ &= f(t_0)\end{aligned}$$

جہاں $t_0-\epsilon$ تا $t_0+\epsilon$ کے علاوہ $\delta(t-t_0)=0$ ہے لہٰذا تکمل کے حدود یہی کر دیے گئے ہیں۔چونکہ $\epsilon\to 0$ ہے لہٰذا ان حدود کے مابین کسی بھی تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے تفاعل کی قیمت $f(t_0)$ لی جا سکتی ہے۔غیر تغیر $f(t_0)$ کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں ہمارے پاس صرف $\delta(t-t_0)$ کا تکمل رہ جاتا ہے جو مساوات 13.12 کے تحت اکائی کے برابر ہے۔درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں سے واضح ہے کہ اکائی ضرب تفاعل $f(t)$ کا نمونہ $t=t_0$ پر حاصل کرتا ہے۔

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0)=\begin{cases} f(t_0) & t_1<t_0<t_2\\ 0 & t_0<t_1,\, t_0>t_2\end{cases} \tag{13.13}$$

اگرچہ حقیقی دنیا میں ہم لمحاتی طور پر لامحدود قیمت کا دباو یا رو کسی دور پر لاگو نہیں کر سکتے ہیں لہٰذا حقیقی دنیا میں اکائی ضرب تفاعل نہیں پایا جاتا ہے۔اس کے باوجود یہ ایک اہم تفاعل ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے الجبرائی طور پر مختلف اعمال کا مطالعہ ممکن بنایا جاتا ہے۔مثال کے طور پر آسمانی بجلی کو اکائی ضرب تصور کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح آواز

[11] sampling property

کو عددی صورت میں تبدیل کرنے کے عمل پر غور کے لئے اس تفاعل کا سہارا لیا جاتا ہے۔**ماثل سے عددی مبادل کار**[12] کی مدد سے مماثل اشارے کو عددی صورت میں تبدیل کیا جاتا ہے۔انسانی کان 20 Hz تا 20 kHz تک کی آواز سن سکتا ہے۔**اصول نائی کوسٹ**[13] کے تحت کسی بھی اشارے کی مکمل معلومات برقرار رکھنے کی خاطر اشارے کی بلند تر تعدد کی دگنی تعدد پر نمونہ حاصل کرنا ضروری ہے۔یہی وجہ ہے کہ انسانی آواز کے عددی نمونے 44.1 kHz پر حاصل کئے جاتے ہیں۔

مثال 13.3: اکائی ضرب تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: لاپلاس تکمل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] &= \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-st_0}\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-st_0}
\end{aligned}$$

اس جواب کو مساوات 13.13 میں دی گئی خاصیت نمونہ بندی کی مدد سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

میں $e^{-st} = f(t)$ تصور کرتے ہوئے خاصیت نمونہ بندی استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \mathrm{F}(s) = e^{-st_0} \tag{13.14}$$

چونکہ $e^{-0s} = 1$ کے برابر ہے لہٰذا درج بالا سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathrm{F}(s) = 1 \tag{13.15}$$

---

[12] analog to digital converter, ADC

[13] Nyquist criterion

13.3 لاپلاس بدل کی جوڑیاں

آئیں کئی اہم لاپلاس بدل کی جوڑیاں حاصل کریں۔

مثال 13.4: مستقل تفاعل $f(t)=1$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: لاپلاس تکمل استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1] &= \int_0^\infty 1.e^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty\\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

مثال 13.5: تفاعل $f(t)=t$ کا لاپلاس بدل دریافت کریں۔

حل: لاپلاس تکمل استعمال کرتے ہیں۔

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^\infty te^{-st}\,\mathrm{d}t$$

تکمل کو ٹکڑوں میں حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$\begin{aligned}u &= t\\ \mathrm{d}v &= e^{-st}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \\
v &= \int e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{-s}
\end{aligned}
$$

ہو گا لہٰذا

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= -\frac{t}{s}e^{-st}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{s^2} \quad \sigma > 0
\end{aligned}
\tag{13.16}
$$

حاصل ہوتا ہے۔

مثال 13.6: تفاعل e^{at} کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\bigg|_0^\infty \quad \sigma > 0 \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}
$$

مثال 13.7: تفاعل $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: کوسائن کو $\frac{e^{+j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$ لکھتے ہوئے لاپلاس تکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \int_0^\infty \frac{e^{+j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t}+e^{-(s+j\omega)t}}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right) \quad \sigma > 0 \\
&= \frac{s}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

مثال 13.8: تفاعل $\sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: سائن کو $\frac{e^{+j\omega t}-e^{-j\omega t}}{j2}$ لکھتے ہوئے لاپلاس تکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \int_0^\infty \frac{e^{+j\omega t}-e^{-j\omega t}}{j2} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(s+j\omega)t}}{j2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{j2}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right) \quad \sigma > 0 \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

جدول 13.1 میں کئی لاپلاس بدل کی جوڑیاں پیش کی گئی ہیں۔

جدول 13.1: لاپلاس بدل کی جوڑیاں۔

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
1	$\frac{1}{s}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{s\pm a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

مشق 13.1: تفاعل $\cosh \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $F(s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$

مشق 13.2: تفاعل $\sinh \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $F(s) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

13.4 خواص البدل

لاپلاس بدل کے کئی مسئلوں پر اس حصے میں غور کیا جائے گا۔ یہ مسئلے لاپلاس بدل کے خصوصیات بیان کرتے ہیں اور ان کی مدد سے لاپلاس بدل کا حصول نہایت عمدگی کے ساتھ ممکن ہوتا ہے۔

متناسب وقت

مسئلہ متناسب وقت[14] کہتا ہے کہ

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \tag{13.17}$$

آئیں اس نتیجے کو لاپلاس تکمل کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at)e^{-st}\,dt$$

[14] time-scaling theorem

اس میں $\lambda = at$ لیتے ہوئے $\mathrm{d}\lambda = a\,\mathrm{d}t$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(\lambda) e^{-\left(\frac{\lambda}{a}\right)s} \frac{\mathrm{d}\lambda}{a} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\lambda) e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{a}\mathrm{F}\left(\frac{s}{a}\right) \qquad a > 0\end{aligned}$$

منتقلی وقت

مسئلہ منتقلی وقت[15] کہتا ہے کہ

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\mathrm{F}(s) \qquad t_0 \geq 0 \tag{13.18}$$

آئیں مسئلہ منقولہ وقت کو لاپلاس تکمل سے حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^\infty f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر ہم $\lambda = t - t_0$ لیں تو $\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}t$ ہو گا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^\infty f(\lambda)e^{-s(\lambda+t_0)}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= e^{-t_0 s}\int_0^\infty f(\lambda)e^{-s\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \\ &= e^{-t_0 s}\mathrm{F}(s)\end{aligned}$$

منتقلی تعدد

مسئلہ منتقلی تعدد[16] کہتا ہے کہ

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \mathrm{F}(s+a) \tag{13.19}$$

---

[15] time-shifting theorem
[16] frequency-shifting theorem

جدول 13.2: لاپلاس بدل کے مسئلے۔

مسئلہ	$f(t)$	$\mathrm{F}(s)$
جمع و منفی	$f_1(t)+f_2(2)$	$\mathrm{F}_1(s)+\mathrm{F}_2(s)$
متناسب مقدار	$Af(t)$	$A\mathrm{F}(s)$
متناسب وقت	$f(at)$	$\frac{1}{a}\mathrm{F}(\frac{s}{a}),\ a>0$
منتقلی وقت	$f(t-t_0)u(t-t_0),\ t_0>0$	$e^{-t_0 s}\mathrm{F}(s)$
منتقلی وقت	$f(t)u(t-t_0),\ t_0>0$	$e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t+t_0)]$
منتقلی تعدد	$e^{-at}f(t)$	$\mathrm{F}(s+a)$
وقت سے ضرب	$tf(t)$	$-\frac{\mathrm{d}\mathrm{F}(s)}{\mathrm{d}s}$
وقت سے ضرب	$t^n f(t)$	$(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n\mathrm{F}(s)}{\mathrm{d}s^n}$
وقت سے تقسیم	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \mathrm{F}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$
تفرق	$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$	$s\mathrm{F}(s)-f(0)$
تفرق	$\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}$	$s^2\mathrm{F}(s)-s^1f(0)-f^1(0)$
تفرق	$\frac{\mathrm{d}^nf(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n\mathrm{F}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f^1(0)-\cdots-s^0f^{n-1}(0)$
تکمل	$\int_0^t f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$	$\frac{\mathrm{F}(s)}{s}$
الجھاو	$\int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$	$\mathrm{F}_1(s)\mathrm{F}_2(s)$

یعنی تفاعل کو e^{-at} سے ضرب دینے سے لاپلاس بدل کی تعدد تبدیل ہو کر $s+a$ ہو جاتی ہے۔ اس مسئلے کو مسئلہ ترمیم تعدد[17] بھی کہتے ہیں۔

جدول 13.2 میں کئی مسئلے درج کئے گئے ہیں۔ آئیں ان کا استعمال دیکھیں۔

[17] frequency modulation theorem

مثال 13.9: تفاعل $\sin \omega t$ کا لاپلاس بدل $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ہے۔جدول 13.2 میں مسئلہ منتقلی تعدد کی مدد سے $e^{-at} \sin \omega t$ کا بدل دریافت کریں۔

حل:مسئلہ منتقلی تعدد کے تحت لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s+a$ لکھا جائے گا لہٰذا جواب درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

مثال 13.10: تفاعل e^{-at} کا لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s+a}$ ہے۔مسئلہ ضرب وقت کی مدد سے te^{-at} کا لاپلاس بدل دریافت کریں۔

حل:مسئلہ ضرب وقت کے تحت

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[te^{-at}] &= -\frac{\mathrm{dF}(s)}{\mathrm{d}s} \\ &= \frac{1}{(s+a)^2}\end{aligned}$$

ہو گا۔

مثال 13.11: تفاعل $f(t) = 1$ کا لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s}$ ہے۔مسئلہ ضرب وقت کی مدد سے تفاعل t کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل:مسئلہ ضرب وقت کے تحت جواب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t] &= -\frac{\mathrm{dF}(s)}{\mathrm{d}s} \\ &= \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

مشق 13.3: تفاعل $\sin \omega t$ کا لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ہے۔ مسئلہ ضرب وقت کی مدد سے تفاعل $t \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

مشق 13.4: جدول 13.1 سے t اور e^{-2t} کے لاپلاس بدل دیکھتے ہوئے جدول 13.2 کی مدد سے $t^2(t+e^{-2t})$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{6}{s^4}+\frac{2}{(s+2)^3}$

مشق 13.5: جدول 13.1 سے $\sin \omega t$ کا بدل دیکھتے ہوئے جدول 13.2 میں دئے مسئلہ تفرق کی مدد سے $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل دریافت کریں۔

جواب: $\frac{s}{s^2+\omega^2}$

13.5 الٹ لاپلاس بدل کا حصول

برقی ادوار حل کرتے ہوئے ہمیں جن لاپلاس بدل سے واسطہ پڑتا ہے انہیں دو کثیر رکنی کے کسر کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{\mathrm{P}(s)}{\mathrm{Q}(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \tag{13.20}$$

شمار کنندہ $\mathrm{P}(s)$ کے جذر $-z_1$ تا $-z_m$ کو تفاعل کے صفر کہتے ہیں جبکہ نسب نما $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر $-p_1$ تا $-p_n$ کو تفاعل کے قطب کہتے ہیں۔اگر $n \le m$ ہو تب $\mathrm{P}(s)$ کو $\mathrm{Q}(s)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\mathrm{F}(s) = \frac{\mathrm{P}(s)}{\mathrm{Q}(s)} = C_{m-n}s^{m-n} + \cdots + C_2 s^2 + C_1 s + C_0 + \frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}(s)} \tag{13.21}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ہم $\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}(s)}$ کی **جزوی کسری پھیلاو**[18] کرنا چاہتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر نسب نما $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر پر غور کرنا ہو گا۔یہاں میں گزارش کروں گا کہ صفحہ 740 پر مثال 12.3 کو ایک مرتبہ دوبارہ دیکھ لیں۔

13.5.1 جزوی کسری پھیلاو

- اگر $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر سادہ ہوں تب $\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}(s)}$ کو درج ذیل جزوی کسری صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}(s)} = \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s+p_n} \tag{13.22}$$

- اگر $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر میں مخلوط اعداد پائے جاتے ہوں تو یہ جوڑی دار مخلوط اعداد کی صورت میں ہوں گے۔ یوں ہر جوڑی کے لئے درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا جہاں K_1 اور K_1^* آپس میں جوڑی دار مخلوط اعداد ہیں۔

$$\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta} + \cdots \tag{13.23}$$

- اگر $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر میں ہم قطب r گنا پایا جاتا ہو تب اس قطب کی جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}_1(s)(s+p_1)^r} = \frac{K_1}{(s+p_1)} + \frac{K_2}{(s+p_1)^2} + \cdots + \frac{K_r}{(s+p_1)^r} + \cdots \tag{13.24}$$

[18] partial fraction expansion

لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ کی جزوی کسری پھیلاو کے بعد علیحدہ علیحدہ کسر کا الٹ لاپلاس بدل جدول سے پڑھا جا سکتا ہے۔ تمام کسروں کے الٹ لاپلاس بدل کا مجموعہ $\mathrm{F}(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل ہو گا۔

سادہ قطبین

سادہ قطبین کی صورت میں لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}=\frac{\mathrm{P}}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=\frac{K_1}{s+p_1}+\frac{K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s+p_n}$$

مساوات کو $(s+p_i)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$(s+p_1)\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}=\frac{\mathrm{P}}{(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=K_1+\frac{(s+p_1)K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{(s+p_1)K_n}{s+p_n}$$

اس میں $s=-p_1$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned}(s+p_1)\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\bigg|_{s=-p_1}&=\frac{\mathrm{P}}{(-p_1+p_2)\cdots(-p_1+p_n)}\\&=K_1+\frac{(-p_1+p_1)K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{(-p_1+p_1)K_n}{s+p_n}\end{aligned}$$

یعنی

$$(s+p_1)\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\bigg|_{s=-p_1}=\frac{\mathrm{P}}{(-p_1+p_2)\cdots(-p_1+p_n)}=K_1$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح جزوی کسری پھیلاو کے بقایا مستقل درج ذیل مساوات سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

$$K_i=(s+p_i)\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\bigg|_{s=-p_i}=(s+p_i)\mathrm{F}\big|_{s=-p_i}\tag{13.25}$$

تمام K_i جانتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\mathrm{F}(s)=f(t)=\left(K_1e^{-p_1t}+K_2e^{-p_2t}+\cdots+K_ne^{-p_nt}\right)u(t)\tag{13.26}$$

مثال 13.12: لاپلاس تفاعل $\mathrm{F}(s)=\frac{10(s+2)}{(s+4)(s+6)}$ کے جزوی کسری پھیلاو حاصل کرتے ہوئے الٹ لاپلاس تفاعل $f(t)$ دریافت کریں۔

حل: نسب نما کے قطبین سادہ ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{10(s+2)}{(s+4)(s+6)}=\frac{K_1}{s+4}+\frac{K_2}{s+6} \tag{13.27}$$

مستقل K_1 حاصل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کو $(s+4)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{10(s+2)}{(s+6)}=K_1+\frac{K_2(s+4)}{s+6}$$

دونوں اطراف میں $s=-4$ پر کرتے

$$\frac{10(-4+2)}{(-4+6)}=K_1+\frac{K_2(-4+4)}{s+6}$$

ہوئے K_1 کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$K_1=-10$$

یہی طریقہ کار K_2 کے لئے بھی استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.27 کو $(s+6)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{10(s+2)}{(s+4)}=\frac{K_1(s+6)}{s+4}+K_2$$

دونوں اطراف میں $s=-6$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{10(-6+2)}{(-6+4)}=\frac{K_1(-6+6)}{-6+4}+K_2$$

یوں K_2 حاصل ہوتا ہے۔

$$K_2=20$$

اس طرح مساوات 13.27 کے تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$F(s) = -\frac{10}{s+4} + \frac{20}{s+6}$$

جس کا الٹ لاپلاس لیتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں تفاعل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}^{-1}F(s) = f(t) = \left(-10e^{-4t} + 20e^{-6t}\right) u(t)$$

مشق 13.6: تفاعل $F(s) = \frac{5(s+6)}{(s+3)(s+5)}$ دیا گیا ہے۔اس کا الٹ لاپلاس تفاعل حاصل کریں۔

جواب: $f(t) = (\frac{15}{2}e^{-3t} - \frac{5}{2}e^{-5t})u(t)$

مشق 13.7: تفاعل $F(s) = \frac{(s^2+5s+1)}{s(s+2)(s+3)}$ دیا گیا ہے۔اس کا الٹ لاپلاس تفاعل حاصل کریں۔

جواب: $f(t) = (\frac{1}{6} + \frac{7}{2}e^{-2t} - \frac{8}{3}e^{-3t})u(t)$

جوڑی دار مخلوط قطبین

فرض کریں کہ $\mathrm{F}(s)$ میں جوڑی دار مخلوط قطبین کی ایک جوڑی پائی جاتی ہے۔ایسی صورت میں $\mathrm{F}(s)$ کی جزوی کسری پھیلاو کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\mathrm{F}(s)=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}=\frac{K_1}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta}+\cdots$$

جہاں سادہ قطبین کی طرح K_1 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(s+\alpha-j\beta)\mathrm{F}\big|_{s=-\alpha+j\beta}=K_1 \tag{13.28}$$

مستقل K_1^* کو بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے البتہ ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہے چونکہ دونوں مستقل آپس میں جوڑی دار مخلوط اعداد ہیں۔ اس طرح اگر $K_1=K\underline{/\theta}$ ہو تو $K_1^*=K\underline{/-\theta}$ ہو گا اور $\mathrm{F}(s)$ کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s)&=\frac{K\underline{/\theta}}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K\underline{/-\theta}}{s+\alpha+j\beta}+\cdots\\&=\frac{Ke^{j\theta}}{s+\alpha-j\beta}+\frac{Ke^{-j\theta}}{s+\alpha+j\beta}+\cdots\end{aligned}$$

یوں وقتی دائرہ کار میں تفاعل درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}f(t)=\mathcal{L}^{-1}\mathrm{F}(s)&=Ke^{j\theta}e^{-(\alpha-j\beta)t}+Ke^{-j\theta}e^{-(\alpha+j\beta)t}+\cdots\\&=Ke^{-\alpha t}\left(e^{j(\theta+\beta t)}+e^{-j(\theta+\beta t)}\right)+\cdots\\&=2Ke^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)+\cdots\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر $\frac{e^{+jx}+e^{-jx}}{2}=\cos x$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

مثال 13.13: درج ذیل لاپلاس تفاعل کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{10(s+4)}{s(s^2+2s+2)}$$

حل:اس تفاعل کے نسب نما میں s^2+2s+2 کے جذر $-1+j$ اور $-1-j$ ہیں لہٰذا تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{10(s+4)}{s(s+1-j)(s+1+j)}$$

اس کی جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1-j}+\frac{K_2^*}{s+1+j}$$

مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔پہلے K_1 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}K_1&=\left.\frac{10(s+4)}{(s+1-j)(s+1+j)}\right|_{s=0}\\&=\frac{10(0+4)}{(0+1-j)(0+1+j)}\\&=20\end{aligned}$$

اسی طرح K_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}K_2&=\left.\frac{10(s+4)}{s(s+1+j)}\right|_{s=-1+j}\\&=\frac{10(-1+j+4)}{(-1+j)(-1+j+1+j)}\\&=-10+j5\end{aligned}$$

ہم جانتے ہیں کہ K_2^* درج بالا کا جوڑی دار مخلوط عدد یعنی $K_2^*=-10-j5$ ہے۔اس کے باوجود ہم اس کو حل کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}K_2^*&=\left.\frac{10(s+4)}{s(s+1-j)}\right|_{s=-1-j}\\&=\frac{10(-1-j+4)}{(-1-j)(-1-j+1-j)}\\&=-10-j5\end{aligned}$$

ان مستقل کو استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{F}(s)$ کا جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{20}{s}+\frac{(-10+j5)}{s+1-j}+\frac{(-10-j5)}{s+1+j}$$

الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}f(t)=\mathcal{L}^{-1}\mathrm{F}(s)&=\left[20+(-10+j5)e^{-(1-j)t}+(-10-j5)e^{-(1+j)t}\right]u(t)\\&=\left[20-10e^{-t}\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)+j5e^{-t}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right]u(t)\\&=\left(20-20e^{-t}\cos t-10e^{-t}\sin t\right)u(t)\\&=\left[20-10\sqrt{5}e^{-t}\cos(t+26.56^\circ)\right]u(t)\end{aligned}$$

آئیں حاصل جواب کا لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ ہمارا جواب درست ہے۔ہم درج ذیل

$$f(t)=\left(20-20e^{-t}\cos t-10e^{-t}\sin t\right)u(t)$$

کا لاپلاس بدل جدول 13.1 کی مدد سے لکھتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s)&=\frac{20}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}-\frac{10}{(s+1)^2+1^1}\\&=\frac{10(s+4)}{s(s^2+2s+2)}\end{aligned}$$

اصل لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے ہم نے ثابت کیا کہ ہم نے صحیح وقتی تفاعل حاصل کیا ہے۔

مشق 13.8: لاپلاس تفاعل $\mathrm{F}(s)=\frac{2s+3}{s^2+6s+34}$ دیا ہوا ہے۔ اس کا الٹ لاپلاس تفاعل $f(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=e^{-3t}\left(2\cos 5t-\frac{3}{5}\sin 5t\right)u(t)$

مشق 13.9: تفاعل $\mathrm{F}(s)=\frac{5(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+5)}$ کا الٹ لاپلاس تفاعل دریافت کریں۔

جواب: $f(t)=\left[-\frac{5}{8}e^{-3t}+\frac{1}{8}e^{-t}\left(5\cos 2t+15\sin 2t\right)\right]u(t)$

کثیر ہم رتبی قطبین

فرض کریں کہ $\mathrm{F}(s)$ میں $-p_1$ قطب r مرتبہ پایا جاتا ہے۔ایسی صورت میں تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s)&=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1(s+p_1)^r}\\&=\frac{K_r}{(s+p_1)^r}+\frac{K_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}}+\frac{K_{r-2}}{(s+p_1)^{r-2}}+\frac{K_{r-3}}{(s+p_1)^{r-3}}+\cdots\\&\qquad+\frac{K_3}{(s+p_1)^3}+\frac{K_2}{(s+p_1)^2}+\frac{K_1}{(s+p_1)^1}+\cdots\end{aligned}$$

مساوات کے دونوں اطراف کو $(s+p_1)^r$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1}&=K_r+K_{r-1}(s+p_1)^1+K_{r-2}(s+p_1)^2+K_{r-3}(s+p_1)^3+\cdots\\&\qquad+K_3(s+p_1)^{r-3}+K_2(s+p_1)^{r-2}+K_1(s+p_1)^{r-1}+\cdots\end{aligned}\tag{13.29}$$

درج بالا مساوات میں $s=-p_1$ پر کرنے سے K_r حاصل ہوتا ہے۔

$$K_r=\left.\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1}\right|_{s=-p_1}=\left.(s+p_1)^r\mathrm{F}\right|_{s=-p_1}\tag{13.30}$$

مساوات 13.29 کا ایک مرتبہ تفرق لیتے ہوئے۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1}\right]&=K_{r-1}+2K_{r-2}(s+p_1)^1+3K_{r-3}(s+p_1)^2+\cdots+(r-3)K_3(s+p_1)^{r-4}\\&\qquad+(r-2)K_2(s+p_1)^{r-3}+(r-1)K_1(s+p_1)^{r-2}+\cdots\end{aligned}\tag{13.31}$$

حاصل جواب میں $s=-p_1$ پر کرنے سے K_{r-1} حاصل ہوتا ہے۔

$$K_{r-1}=\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+p_1)^r\mathrm{F}\right]\Big|_{s=-p_1} \tag{13.32}$$

اسی طرح مساوات 13.29 کا دو مرتبہ تفرق لے کر اس میں $s=-p_1$ پر کرنے سے K_{r-2} حاصل ہو گا۔

$$K_{r-2}=\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[(s+p_1)^r\mathrm{F}\right]\Big|_{s=-p_1} \tag{13.33}$$

یوں مستقل حاصل کرنے کی عمومی مساوات درج ذیل ہے۔

$$K_{r-m}=\frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}s^m}\left[(s+p_1)^r\mathrm{F}\right]\Big|_{s=-p_1} \tag{13.34}$$

مثال 13.14: لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)=\frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)}$ سے وقتی تفاعل حاصل کریں۔

حل: دیے گئے تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہیں۔

$$\frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)}=\frac{K_0}{s+3}+\frac{K_1}{(s+2)}+\frac{K_2}{(s+2)^2}+\frac{K_3}{(s+2)^3} \tag{13.35}$$

مستقل K_0 حاصل کرنے کی خاطر مساوات کے دونوں اطراف کو $(s+3)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{s+1}{(s+2)^3}=K_0+\frac{(s+3)K_1}{(s+2)}+\frac{(s+3)K_2}{(s+2)^2}+\frac{(s+3)K_3}{(s+2)^3}$$

دونوں اطراف میں $s=-3$ پر کرتے ہوئے

$$\frac{-3+1}{(-3+2)^3}=K_0+\frac{(-3+3)K_1}{(-3+2)}+\frac{(-3+3)K_2}{(-3+2)^2}+\frac{(-3+3)K_3}{(-3+2)^3}$$

بائیں ہاتھ تین قوسین صفر کے برابر ہو جاتے ہیں لہٰذا

$$K_0=2$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستقل K_3 حاصل کرنے کی خاطر مساوات 13.35 کے دونوں اطراف کو $(s+2)^3$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\frac{s+1}{s+3}=\frac{(s+2)^3}{s+3}K_0+(s+2)^2K_1+(s+2)K_2+K_3 \tag{13.36}$$

اس میں $s=-2$ پر کرنے سے K_3 حاصل ہوتا ہے۔

$$K_3=-1$$

مساوات 13.36 کا ایک مرتبہ تفرق لینے کے بعد $s=-2$ پر کرنے سے K_2 حاصل ہو گا۔چونکہ ایسا کرتے ہوئے صرف K_2 کا جزو باقی رہتا ہے لہٰذا بائیں ہاتھ بقایا اجزاء کا تفرق لینے کی ضرورت نہیں ہے۔مساوات کے بائیں ہاتھ کا یک رتبی تفرق $\frac{2}{(s+3)^2}$ ہے۔

$$K_2=\left.\frac{2}{(s+3)^2}\right|_{s=-2}=2$$

مساوات 13.36 کا دو رتبی تفرق لینے کے بعد دونوں اطراف $s=-2$ پر کرنے سے K_1 حاصل ہوتا ہے۔بائیں ہاتھ کا دو رتبی تفرق $\frac{-4}{(s+3)^2}$ ہے جبکہ دائیں جانب K_1 والے جزو کا دو رتبی تفرق $2K_1$ کے برابر ہے۔

$$2K_1=\left.-\frac{4}{(s+3)^3}\right|_{s=-2}$$

اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$K_1=-2$$

تمام مستقل جاننے کے بعد مساوات 13.35 کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{2}{s+3}-\frac{2}{(s+2)}+\frac{2}{(s+2)^2}-\frac{1}{(s+2)^3}$$

جدول 13.1 کی مدد سے تمام اجزاء کے الٹ بدل لکھتے ہیں۔

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\mathrm{F}(s)=\left(2e^{-3t}-2e^{-2t}+2te^{-2t}-\frac{t^2e^{-2t}}{2}\right)u(t)$$

مشق 13.10: لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)=\frac{s+2}{(s+3)^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=\left(e^{-3t}-te^{-3t}\right)u(t)$

مشق 13.11: لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=\frac{1}{4}\left(1+2t-e^{-2t}\right)u(t)$

مشق 13.12: لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)=\frac{80}{s^2(s+2)^3}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=\left(10t^2e^{-2t}+20te^{-2t}+15e^{-2t}+10t-15\right)u(t)$

باب 7 میں دور کی امتیازی مساوات کی بات کی گئی۔آپ جلد دیکھیں گے کہ $\mathrm{Q}(s)$ دور کی امتیازی مساوات ہے۔ہم نے اس باب میں دیکھا کہ $\mathrm{F}(s)$ سے حاصل وقتی تفاعل کے اجزاء کا دارومدار $\mathrm{Q}(s)$ کے قطبین پر ہے۔سادہ قطب $\frac{1}{s+a}$ کی صورت میں e^{-at} حاصل ہو گا جو وقت کے ساتھ گھٹتا ہے۔اس کے برعکس سادہ قطب $\frac{1}{s-b}$ کی صورت میں e^{bt} حاصل ہو گا جو وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتا ہے۔حقیقت میں وقت کے ساتھ

مسلسل بڑھتا دباو یا رو آخر کار دور کو تباہ کر دے گا لہٰذا ادوار تخلیق دیتے ہوئے ایسے قطبین پر کھڑی نظر رکھی جاتی ہے اور ان سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ کثیر قطبین کی صورت میں te^{-at} ، t^2e^{-at} وغیرہ حاصل ہوتے ہیں جبکہ مخلوط قطبین $e^{-at}\cos(\omega t+\theta)$ کو جنم دیتے ہیں جو وقت کے ساتھ گھٹتی سائن نما تفاعل ہے۔ مخلوط قطبین کا حقیقی جزو صفر ہونے کی صورت میں خیالی قطبین کی جوڑی ملتی ہے جو مسلسل ارتعاش کرتے سائن نما تفاعل $\cos(\omega t+\theta)$ کو جنم دیتے ہیں۔ یوں صرف قطبین کے بارے میں جان لینے سے دور کے بارے میں بہت کچھ کہا جا سکتا ہے۔

ہم نے کہا کہ مساوات 13.20 کسی بھی دور کے لاپلاس بدل کو ظاہر کر سکتی ہے۔ اگر $m\geq n$ ہو تب اس کو مساوات 13.21 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جس میں مستقل C_0 پایا جاتا ہے۔ جدول 13.1 کے تحت $\mathrm{F}(s)=1$ کا الٹ لاپلاس بدل اکائی ضرب تفاعل $\delta(t)$ ہے لہٰذا $\mathrm{F}(s)=C_0$ کا الٹ لاپلاس بدل $C_0\delta(t)$ ہو گا۔ ہم اس حقیقت پر تبصرہ کر چکے ہیں کہ حقیقی دنیا میں اکائی ضرب تفاعل نہیں پایا جاتا لہٰذا کسی بھی دور کا رد عمل اکائی ضرب تفاعل نہیں ہو سکتا۔ اس سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ کسی بھی حقیقی دور کے لاپلاس بدل میں $m<n$ ہو گا۔

13.6 تکمل الجھاو

جدول 13.2 میں لاپلاس مسئلہ الجھاو بیان کیا گیا ہے جس کے تحت

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\lambda)f_2(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda=\int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{13.37}$$

کا لاپلاس بدل

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathrm{F}_1(s)\mathrm{F}_2(s) \tag{13.38}$$

ہے جہاں

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t)]&=\mathrm{F}_1(s)\\ \mathcal{L}[f_2(t)]&=\mathrm{F}_2(s)\end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 13.37 کو **تکمل الجھاو**[19] کہتے ہیں۔ تفاعل کی الجھاو نہایت اہم ہے جو ادوار اور **تجزیہ نظام**[20] میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

---

[19] convolution integral
[20] systems analysis

لاپلاس بدل کی تعریف یعنی مساوات 13.1 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.38 کو ثابت کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(t-\lambda) f_2(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right] e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{13.39}$$

اندرونی تکمل کے حدود کو صفر تا لامتناہی بنانے کی خاطر اندرونی تکمل کو $u(t-\lambda)$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$u(t-\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda < t \\ 0 & \lambda > t \end{cases}$$

اندرونی تکمل کے اضافی احاطے یعنی t تا ∞ میں چونکہ $u(t-\lambda) = 0$ ہے لہٰذا تکمل کی قیمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی۔یوں مساوات 13.39 کو درج ذیل

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) u(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\right] e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

یعنی

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f_2(\lambda) \left[\int_0^\infty f_1(t-\lambda) u(t-\lambda) e^{-st}\,\mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\lambda$$

لکھا جا سکتا ہے۔قوسین کے اندر تکمل مساوات 13.18 میں دیا گیا مسئلہ منتقلی وقت ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f_2(\lambda) \mathrm{F}_1(s) e^{-s\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \mathrm{F}_1(s) \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{-s\lambda}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \mathrm{F}_1(s)\mathrm{F}_2(s)
\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقتی دائرہ کار میں الجھاو، تعددی دائرہ کار میں ضرب کے مترادف ہے۔

تکمل الجھاو کی اہمیت جاننے کی خاطر شکل 13.4 میں $i(t)$ کو لاپلاس کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔لمحہ $t = 0\,\mathrm{s}$ پر $i(0) = 0\,\mathrm{A}$ ہے اور سوئچ چالو کرنے کو اکائی سیڑھی تفاعل $u(t)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔دور کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = V_1 u(t)$$

اس مساوات کا لاپلاس بدل جدول 13.2 کی مدد سے لکھتے ہیں۔رو کے لاپلاس بدل کو $\mathrm{I}(s)$ لکھتے ہیں۔جدول میں یک رتبی تفرق کردہ تفاعل کا لاپلاس بدل دیا گیا ہے جس میں $f(0)$ سے مراد لمحہ $t = 0\,\mathrm{s}$ پر تفاعل کی قیمت ہے جسے عام فہم میں ابتدائی شرط یا ابتدائی حال کہتے ہیں۔دیے گئے دور کی ابتدائی معلومات کے تحت $i(0) = 0\,\mathrm{A}$ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$ کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right] = s\mathrm{I}(s) - i(0) = s\mathrm{I}(s)$$

یوں دور کے مساوات کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا

$$\mathrm{I}(s)R + Ls\mathrm{I}(s) = \frac{V_1}{s}$$

جس سے درکار رو کا لاپلاس بدل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(s) &= \left(\frac{1}{R+sL}\right)\left(\frac{V_1}{s}\right)\\ &= \mathrm{H}(s)\mathrm{V}_d(s)\end{aligned} \tag{13.40}$$

جہاں

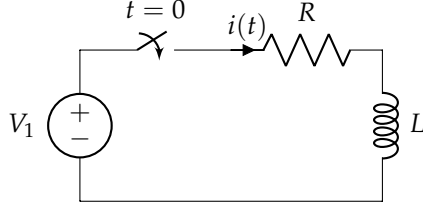
$$\begin{aligned}\mathrm{H}(s) &= \tfrac{1}{R+sL}\\ \mathrm{V}_d(s) &= \tfrac{V_1}{s}\end{aligned}$$

ہیں۔یہاں $\mathrm{H}(s)$ دور کے رد عمل کا لاپلاس بدل ہے جبکہ $\mathrm{V}_d(s)$ داخلی جبری تفاعل کا لاپلاس بدل ہے۔

وقتی دائرہ کار میں رو $i(t)$ حاصل کرنے کے لئے $\mathrm{I}(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل درکار ہو گا۔جدول 13.2 میں مسئلہ الجھاو کے تحت دو لاپلاس تفاعل کے ضرب کا الٹ بدل ان کے تکمل الجھاو سے حاصل ہو گا

$$i(t) = h(t) * v_d(t) = \int_0^t h(t-\lambda)v_d(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \tag{13.41}$$

جہاں $\mathrm{H}(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $h(t)$ ہے اور $\mathrm{V}_d(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل $v_d(t)$ ہے۔

اگرچہ مساوات 13.40 ایک مخصوص دور کی لئے لکھی گئی ہے، آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی بھی دور کی لاپلاس مساوات اسی طرح دور کے رد عمل اور داخلی جبری تفاعل کے لاپلاس بدل کا حاصل ضرب لکھا جاتا ہے۔یوں کسی بھی دور کے

شکل 13.4: سلسلہ وار RL دور۔

خارجی تفاعل کو مساوات 13.41 کی طرح دور کے رد عمل اور داخلی جبری تفاعل کے تکمل الجھاو $(h(t) * v_d(t))$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔یہ ایک انتہائی اہم نتیجہ ہے جس سے آپ کو آگاہ ہونا چاہیے۔

رد عمل $\boldsymbol{H}(s)$ اور داخلی جبری دباو کے الٹ لاپلاس بدل درج ذیل ہیں

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \\
v_d(s) &= V_1 u(t)
\end{aligned}
$$

جنہیں مساوات 13.41 میں پر کرتے ہوئے رو کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \int_0^t V_1 u(\lambda) \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-\lambda)} \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{V_1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \int_0^t e^{\frac{R}{L}\lambda} \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{V_1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \left. \frac{e^{\frac{R}{L}\lambda}}{\frac{R}{L}} \right|_0^t \\
&= \frac{V_1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \\
&= \frac{V_1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) u(t)
\end{aligned}
$$

ہم یہی جواب مساوات 13.40 کے جزوی کسری پھیلاو

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &= \frac{\frac{V_1}{L}}{s(s+\frac{R}{L})} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+\frac{R}{L}} \\
&= \frac{V_1}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}} \right)
\end{aligned}
$$

کا الٹ لاپلاس لیتے ہوئے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{V_1}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

اگرچہ شکل 13.4 کا لاپلاس بدل انتہائی سادہ تھا لیکن مسئلہ الجھاو کی مدد سے اس کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کرنا اتنا آسان نہ تھا۔ذرہ مشکل تفاعل کا الٹ لاپلاس بدل مسئلہ الجھاو سے حاصل کرنا نہایت مشکل ثابت ہوتا ہے۔مسئلہ الجھاو کی افادیت وہاں سامنے آتی ہے جہاں داخلی جبری تفاعل کو الجبرائی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔اسی طرح اگر کسی نظام کا رد عمل اکائی ضرب تفاعل کے لئے معلوم ہو تب کسی بھی داخلی تفاعل کے لئے اس کا رد عمل مسئلہ الجھاو سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

13.7 مسئلہ ابتدائی قیمت اور مسئلہ اختتامی قیمت

ہم لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ کا الٹ لاپ بدل $f(t)$ حاصل کرتے ہوئے ابتدائی لمحہ $t = 0$ اور اختتامی $t = \infty$ پر وقتی تفاعل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔بعض اوقات ہمیں صرف انہیں دو لمحات پر وقتی تفاعل کی قیمت درکار ہوتی ہے۔کیا اچھا ہوتا کہ الٹ لاپلاس بدل حاصل کئے بغیر ابتدائی قیمت اور اختتامی قیمت جاننا ممکن ہوتا۔مسئلہ ابتدائی قیمت اور مسئلہ اختتامی قیمت، لاپلاس بدل سے ہی ابتدائی اور اختتامی قیمتیں جاننا ممکن بناتی ہیں۔

مسئلہ ابتدائی قیمت[21] کہتا ہے کہ

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\mathrm{F}(s) \tag{13.42}$$

جہاں یہ لازمی ہے کہ $f(t)$ اور اس کے یک رتبی تفرق کے لاپلاس بدل پائے جاتے ہوں۔

اس مسئلے کا ثبوت $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ کا لاپلاس تکمل لیتے ہوئے حاصل ہوتا ہے

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-st}\,\mathrm{d}t = s\mathrm{F}(s) - f(0)$$

جہاں جدول 13.2 کی مدد سے تفاعل کے تفرق کا لاپلاس بدل لکھا گیا ہے۔ درج بالا مساوات کے دونوں اطراف کی حد[22] $s \to \infty$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{s\to\infty}[s\mathrm{F}(s) - f(0)]$$

---

[21] initial value theorem
[22] limit

چونکہ

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\lim_{s\to\infty}e^{-st}\,\mathrm{d}t=0$$

ہے لہٰذا

$$f(0)=\lim_{s\to\infty}s\mathrm{F}(s)$$

حاصل ہوتا ہے جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{s\to\infty}s\mathrm{F}(s)$$

مسئلہ اختتامی قیمت[23] کہتا ہے کہ

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to 0}s\mathrm{F}(s) \tag{13.43}$$

جہاں یہ لازمی ہے کہ $f(t)$ اور اس کے یک رتبی تفرق کے لاپلاس بدل اور $f(\infty)$ پایا جاتا ہو۔تفاعل کا $f(\infty)$ پائے جانے کا مطلب ہے کہ $\mathrm{F}(s)$ کے قطبین کے حقیقی اجزاء منفی ہوں ماسوائے ایک عدد $s=0$ کا قطب کے۔

اس مسئلے کا ثبوت $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ کا لاپلاس تکمل لیتے ہوئے حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\,\mathrm{d}t=s\mathrm{F}(s)-f(0)$$

دونوں اطراف کی حد $s\to 0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\,\mathrm{d}t=\lim_{s\to 0}[s\mathrm{F}(s)-f(0)]$$

چونکہ

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-st}\,\mathrm{d}t&=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\lim_{s\to 0}e^{-st}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t\\&=f(t)\big|_0^\infty\\&=f(\infty)-f(0)\end{aligned}$$

---

[23] final value theorem

ہے لہٰذا

$$f(\infty) - f(0) = \lim_{s \to 0} s\mathrm{F}(s) - f(0)$$

یعنی

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} s\mathrm{F}(s)$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 13.15: تفاعل اور اس کا لاپلاس بدل دیے گئے ہیں۔لاپلاس بدل سے ابتدائی قیمت $f(0)$ اور اختتامی قیمت $f(\infty)$ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left[20 - 12\sqrt{5}e^{-t}\cos(\omega t + 26.56^\circ)\right] u(t) \\
\mathrm{F}(s) &= \frac{10(s+4)}{s(s^2+2s+2)}
\end{aligned}$$

مسئلہ ابتدائی قیمت استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
f(0) &= \lim_{s \to \infty} s\mathrm{F}(s) \\
&= \lim_{s \to \infty} \frac{10(s+4)}{(s^2+2s+2)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

لاپلاس بدل کے قطبین $s = 0$ اور $s = -1 \mp j$ ہیں۔ایک قطب $s = 0$ پر ہے جبکہ بقایا دو قطبین کا حقیقی حصہ منفی ہے لہٰذا اس تفاعل پر مسئلہ اختتامی قیمت قابل استعمال ہے۔

$$\begin{aligned}
f(\infty) &= \lim_{s \to 0} s\mathrm{F}(s) \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{10(s+4)}{(s^2+2s+2)} \\
&= 20
\end{aligned}$$

وقتی تفاعل $f(t)$ سے یہی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے تسلی کر لیں۔

مشق 13.13: لاپلاس بدل $F(s)=\frac{(s+2)^2}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$ سے وقتی تفاعل $f(t)$ کی ابتدائی قیمت اور اختتامی قیمت حاصل کریں۔

جوابات: $f(0)=0$ ، $f(\infty)=\frac{1}{8}$

مشق 13.14: لاپلاس بدل $F(s)=\frac{4s^2+s+22}{s(s^2+4s+11)}$ سے وقتی تفاعل کی ابتدائی اور اختتامی قیمتیں حاصل کریں۔

جوابات: $f(0)=4$ ، $f(\infty)=2$

سوالات

لاپلاس سوالات کے دوران جدول 13.1 اور جدول 13.2 کا استعمال کریں۔

سوال 13.1: تفاعل $f(t) = 3 + 2t + 0.5e^{-4t}$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{0.5}{s+4}$

سوال 13.2: تفاعل $f(t) = e^{-3t}\cos 6t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2+36}$

سوال 13.3: مسئلہ منتقلی وقت کے استعمال سے $f(t) = [t - 2 + e^{-(t-2)}]u(t-2)$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s+1}$

سوال 13.4: وقت سے ضرب کی خصوصیت استعمال کرتے ہوئے $f(t) = e^{-at}u(t-2)$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(s) = \frac{e^{-2(s+a)}}{s+a}$

سوال 13.5: وقت سے ضرب کی خصوصیت استعمال کرتے ہوئے $f(t) = te^{-at}u(t-2)$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(s) = \frac{[2(s+a)+1]e^{-2(s+a)}}{s^2+2as+a^2}$

سوال 13.6: تفاعل $f(t) = te^{-at}\cos\omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(s) = \frac{(s+a)^2-\omega^2}{[(s+a)^2+\omega^2]^2}$

سوال 13.7: تفاعل $f(t) = e^{-at}\delta(t-2)$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(s) = e^{-2(s+a)}$

سوال 13.8: تفاعل $f(t) = t\sin\omega t\, u(t-2))$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $F(s) = e^{-2(s+a)}$

سوال 13.9: درج ذیل تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+4)(s+6)}$$
$$F(s) = \frac{20}{(s+1)(s+3)}$$
$$F(s) = \frac{12s}{(s+5)(s+6)}$$

جوابات:

$$f(t) = 2e^{-6t} - e^{-4t}$$
$$f(t) = 10e^{-t} - 10e^{-3t}$$
$$f(t) = 72e^{-6t} - 60e^{-5t}$$

سوال 13.10: درج ذیل تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$F(s) = \frac{s+8}{(s+2)(s+4)}$$
$$F(s) = \frac{20}{(s+4)(s+9)}$$

جوابات:

$$f(t) = 3e^{-2t} - 2e^{-4t}$$
$$f(t) = 4e^{-4t} - 4e^{-9t}$$

سوال 13.11: درج ذیل تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$F(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$
$$F(s) = \frac{s^2+s+4}{s(s+1)(s+2)}$$

جوابات:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{3}{2} - 2e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} \\
f(t) &= 2 - 4e^{-t} + 3e^{-2t}
\end{aligned}
$$

سوال 13.12: درج ذیل تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \frac{s^2 + 6s + 2}{(s+2)(s+4)(s+8)} \\
\mathrm{F}(s) &= \frac{(s+4)(s+5)}{s(s^2 + 11s + 6)}
\end{aligned}
$$

جوابات:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{3e^{-4t}}{4} + \frac{3e^{-8t}}{4} - \frac{e^{-2t}}{2} \\
f(t) &= \frac{10}{3} - e^{-\frac{11t}{2}} \left[\frac{89}{3\sqrt{97}} \sinh \frac{\sqrt{97}t}{2} + \frac{7}{3} \sinh \frac{\sqrt{97}t}{2} \right]
\end{aligned}
$$

سوال 13.13: درج ذیل تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \frac{s^2 + 2s + 5}{(s+1)(s+2)^2} \\
\mathrm{F}(s) &= \frac{(s+6)}{s^2}
\end{aligned}
$$

جوابات:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 4e^{-t} - 5te^{-2t} - 3e^{-2t} \\
f(t) &= 6t + 1
\end{aligned}
$$

سوال 13.14: درج ذیل تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \frac{10}{s^2 + 4s + 2} \\
\mathrm{F}(s) &= \frac{10(s+2)}{s^2 + 4s + 3}
\end{aligned}
$$

جوابات:

$$f(t) = 5\sqrt{2}e^{-2t}\sinh\sqrt{2}t$$
$$f(t) = 5e^{-t} + 5e^{-3t}$$

سوال 13.15: درج ذیل تفاعل کے الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{2s+4}{(s^2+4s+3)(s^2+4s+7)}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{(s+1)(s+2)}{(s+3)(s^2+s+2)}$$

جوابات:

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{4} + \frac{e^{-3t}}{4} - \frac{e^{-2t}}{2}\cos\sqrt{3}t$$
$$f(t) = \frac{e^{-3t}}{4} + e^{-\frac{t}{2}}\left[\frac{1}{4\sqrt{7}}\sin\frac{\sqrt{7}t}{2} + \frac{3}{4}\cos\frac{\sqrt{7}t}{2}\right]$$

سوال 13.16: مسئلہ الجھاو کی مدد سے درج ذیل کا الٹ لاپلاس حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{1}{(s+2)(s+4)}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)^2}$$

جوابات:

$$f(t) = \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-4t}}{2}$$
$$f(t) = 20e^{-t} - 20te^{-2t} - 20e^{-2t}$$

سوال 13.17: درج ذیل $\mathrm{F}(s)$ کے وقتی لاپلاس الٹ بدل $f(t)$ کے ابتدائی قیمتیں دریافت کریں۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{10(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{s^2+2s+4}{(s+4)(s^3+4s^2+6s+10)}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{4s}{s^2+4s+2}$$

جوابات: 10 ، 0 ، 4

سوال 13.18: سوال 13.17 میں دئے تفاعل کے اختتامی قیمتیں دریافت کریں۔

جوابات: 0 ، 0 ، 0

سوال 13.19: درج ذیل کا لاپلاس الٹ بدل حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{e^{-s}}{s^2}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{1-e^{-3s}}{s}$$

جوابات: $(t-1)u(t-1)$ ، $e^{-(t-1)}u(t-1)$ ، $u(t)+u(t-3)$

سوال 13.20: درج ذیل کا الٹ لاپلاس حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{2(s+1)e^{-s}}{(s+2)(s+4)}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{10(s+2)e^{-3s}}{(s+1)(s+4)}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{se^{-5s}}{(s+6)(s+8)}$$

جوابات:

$$f(t) = \left[3e^{-4(t-1)} - e^{-2(t-1)}\right] u(t-1)$$
$$f(t) = \left[\frac{10}{3}e^{-(t-3)} + \frac{20}{3}e^{-4(t-3)}\right] u(t-3)$$
$$f(t) = \left[4e^{-8(t-5)} - 3e^{-6(t-5)}\right] u(t-5)$$

سوال 13.21: درج ذیل تفاعل کا الٹ لاپلاس حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{(s+3)e^{-s}}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

جواب: $f(t)=\left[\frac{3}{4}-\frac{e^{-2(t-1)}}{4}-e^{-(t-1)}\left(\frac{1}{2}\cos[t-1]+\sin[t-1]\right)\right]u(t-1)$

سوال 13.22: درج ذیل کا الٹ لاپلاس حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{10s(s+2)e^{-3s}}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$$

جواب: $f(t)=\left[20e^{-(t-3)}\sin(t-3)-10(t-3)e^{-(t-3)}\right]u(t-3)$

سوال 13.23: درج ذیل کا الٹ لاپلاس حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{s^2e^{-2s}}{(s^2+1)(s+1)(s^2+2s+2)}$$

جواب:

$$f(t)=\left[\frac{\sin(t-2)}{10}-e^{-(t-2)}\left(\frac{4}{5}\cos[t-2]+\frac{2}{5}\sin[t-2]\right)\right.$$
$$\left.+\frac{3}{10}\cos(t-2)+\frac{e^{-(t-2)}}{2}\right]u(t-2)$$

سوال 13.24: درج ذیل کے الٹ لاپلاس حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{1}{(s+2)^4}$$
$$\mathrm{F}(s)=\frac{s}{(s+2)^4}$$

جوابات:

$$f(t)=\frac{t^3e^{-2t}}{6}$$
$$f(t)=\frac{1}{6}t^2e^{-2t}\left(\frac{1}{2}-\frac{t}{3}\right)$$

سوال 13.25: درج ذیل کا الٹ لاپلاس لکھیں۔

$$F(s) = \frac{s+3}{s(s+2)^2}$$
$$F(s) = \frac{s+8}{s(s+2)^2}$$

جواب:

$$f(t) = \frac{3}{4} - \frac{te^{-2t}}{2} - \frac{3e^{-2t}}{4}$$
$$f(t) = 2 - 3te^{-2t} - 2e^{-2t}$$

سوال 13.26: درج ذیل کا الٹ لاپلاس حاصل کریں۔

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2}$$
$$F(s) = \frac{s+8}{(s+2)^2}$$

جوابات:

$$f(t) = te^{-2t} + e^{-2t}$$
$$f(t) = 6te^{-2t} + e^{-2t}$$

سوال 13.27: درج ذیل کا الٹ لاپلاس حاصل کریں۔

$$F(s) = \frac{s+4}{s^2(s+2)^2}$$
$$F(s) = \frac{s+8}{s^2(s+2)^2}$$

جوابات:

$$f(t) = \frac{te^{-2t}}{2} + \frac{3e^{-2t}}{4} + t - \frac{3}{4}$$
$$f(t) = \frac{3te^{-2t}}{2} + \frac{7e^{-2t}}{4} + 2t - \frac{7}{4}$$

سوال 13.28: درج ذیل کا الٹ لاپلاس حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{s(s+4)}{(s+3)(s^2+6s+18)}$$
$$\mathrm{F}(s) = \frac{(s+4)(s+8)}{s(s^2+4s+8)}$$

جوابات:

$$f(t) = e^{-3t}\left(\frac{4}{3}\cos 3t - \frac{2}{3}\sin 3t\right) - \frac{e^{-3t}}{3}$$
$$f(t) = 4 - e^{-2t}\left(3\cos 2t - \sin 2t\right)$$

سوال 13.29: درج ذیل مساوات میں $\mathcal{L}y = \boldsymbol{Y}$ لیتے ہوئے تمام اجزاء کے لاپلاس لکھیں۔ حاصل مساوات سے $\boldsymbol{Y}$ لکھیں۔ $\boldsymbol{Y}$ کا الٹ لاپلاس لیتے ہوئے تفرقی مساوات کا حل $y(t)$ حاصل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4y = e^{-3t}, \quad y(0) = 2$$

جوابات:

$$s\boldsymbol{Y} - 2 + 4\boldsymbol{Y} = \frac{1}{s+3}$$
$$\boldsymbol{Y} = \frac{2s+7}{(s+3)(s+4)}$$
$$y(t) = e^{-3t} + e^{-4t}$$

سوال 13.30: درج ذیل تفرقی مساوات کو لاپلاس بدل سے حل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 8y = 4u(t), \quad y(0) = 6$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = e^{-t}, \quad y(0) = \frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 6y = u(t), \quad y(0) = 0, \frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}t} = 2$$

جوابات:

$$y(t) = 6e^{-6t}$$

$$y(t) = \frac{3+\sqrt{3}}{12}e^{(\sqrt{3}-2)t} + \frac{3-\sqrt{3}}{12}e^{-(\sqrt{3}+2)t} - \frac{e^{-t}}{2}$$

$$y(t) = \frac{e^{-(4-\sqrt{10})t}}{\sqrt{10}} - \frac{e^{-(4+\sqrt{10})t}}{\sqrt{10}}$$

باب 14

ادوار کا حل بذریعہ لاپلاس بدل

14.1 ادوار کا حل

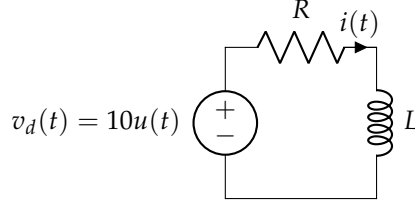
لاپلاس بدل کا استعمال دیکھنے کی خاطر شکل 14.1 میں RL دور کو حل کرتے ہوئے $i(t)$ دریافت کرتے ہیں۔دور کی کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$v_d(t) = i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

اس دور کے فطری حل اور جبری حل کا مجموعہ درکار عمومی حل ہو گا۔ عمومی حل میں ابتدائی معلومات سے حاصل کردہ مستقل پر کرنے سے مخصوص حل حاصل ہو گا۔لاپلاس بدل سے دور حل کرتے ہوئے مخصوص حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔درج بالا مساوات کے دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$\mathcal{L}\left[10u(t)\right] = R\mathcal{L}[i(t)] + L\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

صفحہ 830 پر جدول 13.1 اور صفحہ 833 پر جدول 13.2 کی مدد لیتے ہیں۔

$$\frac{10}{s} = R\mathbf{I}(s) + L[s\mathbf{I}(s) - i(0)]$$

شکل 14.1: سلسلہ وار RL دور۔

چونکہ $i(0) = 0\,\mathrm{A}$ ہے لٰہذا

$$\frac{10}{s} = R\mathrm{I}(s) + sL\mathrm{I}(s)$$

یعنی

$$\mathrm{I}(s) = \frac{10}{s(sL+R)}$$

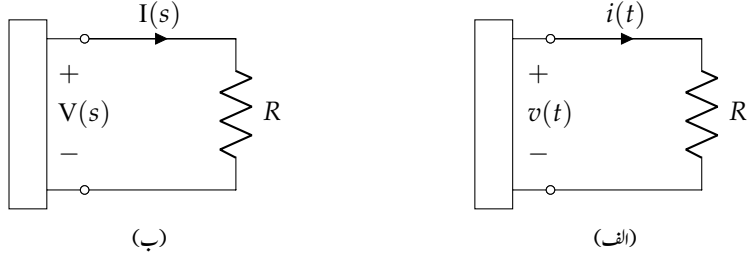
یا

$$\mathrm{I}(s) = \frac{10}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں جزوی کسری پھیلاو لکھی گئی ہے۔درج بالا سے وقتی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{10}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

آپ نے دیکھا کہ مخصوص حل یک وقت حاصل ہوتا ہے۔دور کی ابتدائی معلومات لاپلاس بدل لیتے وقت استعمال کی جاتی ہے۔

جیسا آپ نے دیکھا، لاپلاس بدل سے تفرقی و تکملی مساوات الجبرائی مساوات میں تبدیل ہو جاتی ہے جس سے درکار تفاعل کا لاپلاس بدل نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔حاصل تفاعل کا الٹ لاپلاس بدل وقتی تفاعل دیتا ہے۔الٹ لاپلاس بدل جدول کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

شکل 14.2: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں مزاحمت کا اظہار۔

14.2 پرزوں کے مساوی لاپلاسی ادوار

برقی پرزوں کی خصوصیات سے ان کے مساوی لاپلاسی ادوار حاصل کئے جا سکتے ہیں۔تمام پرزوں کے دباو بالمقابل رو تعلق لکھتے ہوئے غیر فعال رائج سمت استعمال کئے گئے ہیں۔مزاحمت کے دباو اور رو کا تعلق

$$v(t) = Ri(t) \tag{14.1}$$

ہے۔دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے اس تعلق کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{V}(s) = R\mathrm{I}(s) \tag{14.2}$$

شکل 14.2 میں مزاحمت کے دباو بالمقابل کا تعلق وقتی دائرہ کار اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں دکھائے گئے ہیں۔

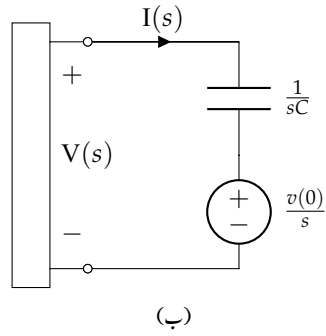
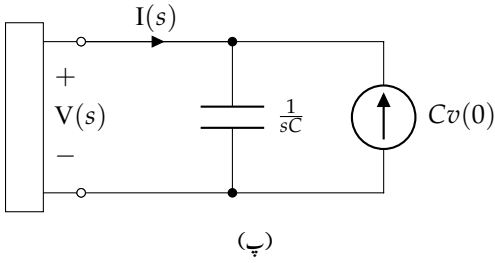
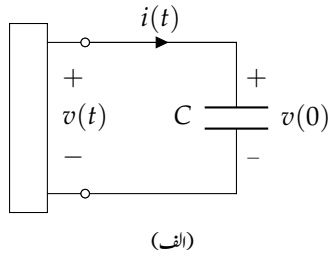
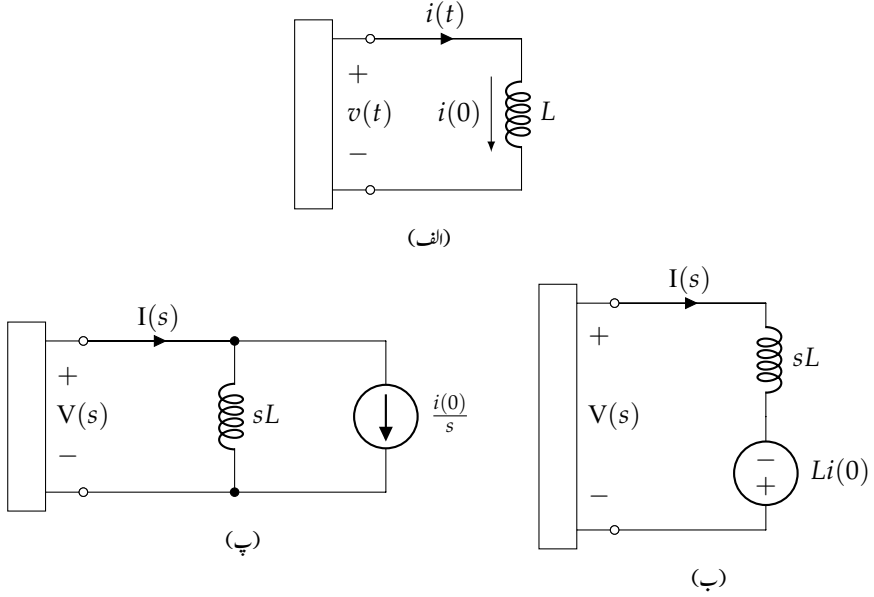
برق گیر کے تعلقات

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + v(0) \tag{14.3}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.4}$$

ہیں۔دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے مخلوط تعددی دائرہ کار میں تعلقات حاصل ہوتے ہیں جنہیں شکل 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔ابتدائی معومات سے پیدا منبع رو کی سمت اور منبع دباو کے قطب پر غور کریں۔ابتدائی رو کی سمت الٹ کرنے یا ابتدائی دباو کے قطب الٹ کرنے سے پیدا منبع رو کی سمت اور منبع دباو کے قطب الٹ ہوں گے۔

$$\mathrm{V}(s) = \frac{\mathrm{I}(s)}{sC} + \frac{v(0)}{s} \tag{14.5}$$

$$\mathrm{I}(s) = sC\mathrm{V}(s) - Cv(0) \tag{14.6}$$

شکل 14.3: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں برق گیر کا اظہار۔

شکل 14.4: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں امالہ گیر کا اظہار۔

امالہ گیر کے تعلقات

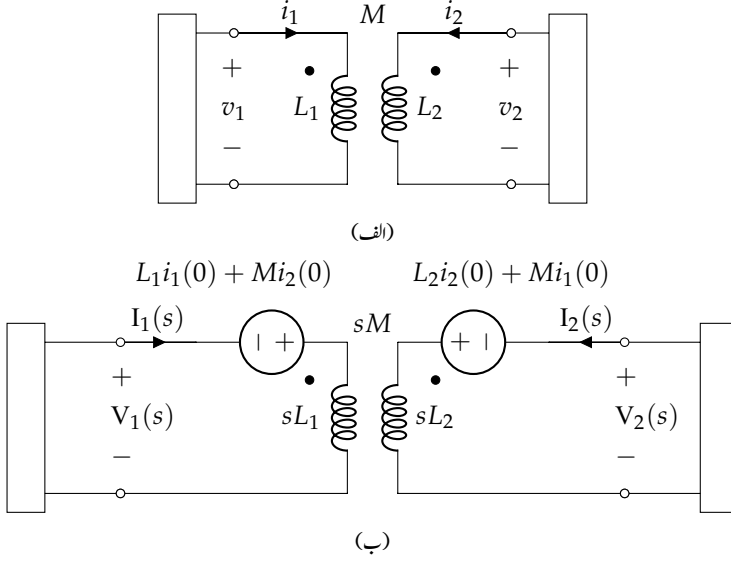
$$v(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.7}$$

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t+i(0) \tag{14.8}$$

ہیں جن سے

$$\mathrm{V}(s)=sL\mathrm{I}(s)-Li(0) \tag{14.9}$$

$$\mathrm{I}(s)=\frac{\mathrm{V}(s)}{sL}+\frac{i(0)}{s} \tag{14.10}$$

حاصل ہوتے ہیں۔انہیں شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔یہاں بھی ابتدائی معلومات سے پیدا منبع کا دارومدار ابتدائی رو کی سمت اور ابتدائی دباو کے قطب پر ہے۔

شکل 14.5: مشترکہ امالہ کا لاپلاسی بدل۔

شکل 14.5 میں دکھائے گئے مربوط لچھوں کے تعلق درج ذیل ہیں۔

$$v_1(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.11}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{i_1(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.12}$$

یہی مساوات s دائرہ کار میں درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\mathrm{V}_1(s) = sL_1\mathrm{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM\mathrm{I}_2(s) - M i_2(0) \tag{14.13}$$

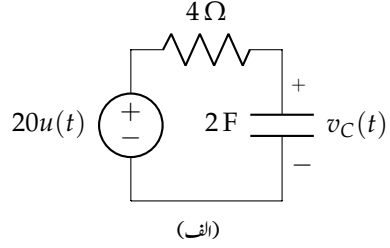
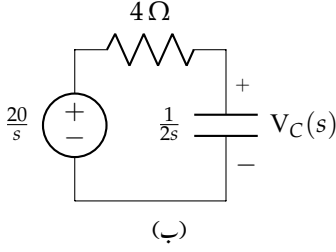
$$\mathrm{V}_2(s) = sL_2\mathrm{I}_2(s) - L_2 i_2(0) + sM\mathrm{I}_1(s) - M i_1(0) \tag{14.14}$$

تابع اور غیر تابع منبع دباو اور منبع رو کو بھی s دائرہ کار میں ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$\mathrm{V}_1(s) = \mathcal{L}[v_1(t)] \tag{14.15}$$

$$\mathrm{I}_2(s) = \mathcal{L}[i_2(t)] \tag{14.16}$$

اور اگر $v_1(t) = A_r i_2(t)$ ہو جہاں A_r افزائش مزاحمت نما ہے تب

$$\mathrm{V}_1(s) = A_r \mathrm{I}_2(s) \tag{14.17}$$

شکل 14.6: مثال 14.1 کا دور۔

لکھا جا سکتا ہے۔

14.3 تجزیاتی تراکیب

درج بالا حصے میں ہم نے برقی پرزوں کے s دائرہ کار میں مساوی ادوار حاصل کئے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے ادوار حل کئے جا سکتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔

- ابتدائی حالت جاننے کے لئے $t < 0\,\mathrm{s}$ کے لئے دور حل کریں۔اگر $t < 0\,\mathrm{s}$ میں دور برقرار حالت میں ہو تب برق گیر کو کھلے سر اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے ابتدائی رو اور ابتدائی دباو حاصل کئے جا سکتے ہیں۔
- ابتدائی معلومات شامل کرتے ہوئے تمام پرزوں کی جگہ ان کے مساوی مخلوط تعددی دائرہ کار کے ادوار نسب کریں۔
- کسی بھی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے دور کو حل کریں۔جوابات s دائرہ کار میں ہوں گے۔
- الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں جوابات حاصل کریں۔

مثال 14.1: لاپلاس بدل کی مدد سے شکل 14.6-الف میں $v_C(t)$ حاصل کریں۔

حل: ابتدائی دباو $v_C(0) = 0\,\mathrm{V}$ ہے۔ تمام پرزوں کی جگہ s دائرہ کار کے مساوی دور پر کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں تقسیم دباو کے کلیے سے برق گیر کا دباو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_C(s) &= \left(\frac{\frac{1}{2s}}{4+\frac{1}{2s}}\right)\frac{20}{s}\\ &= 20\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{8}}\right)\end{aligned}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

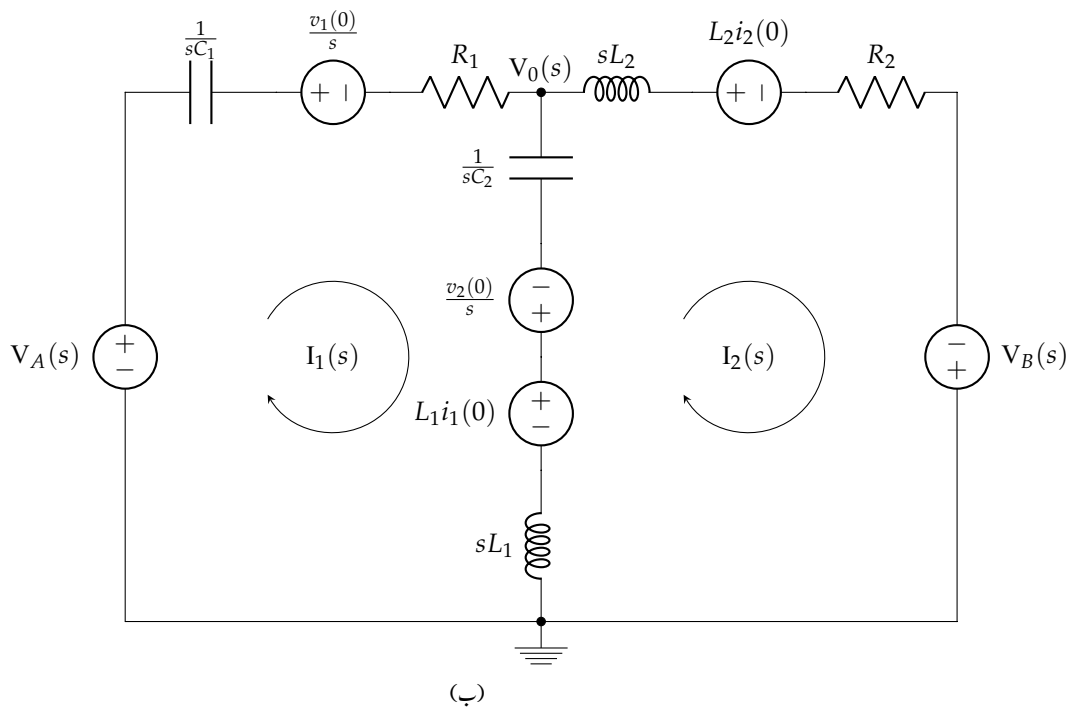
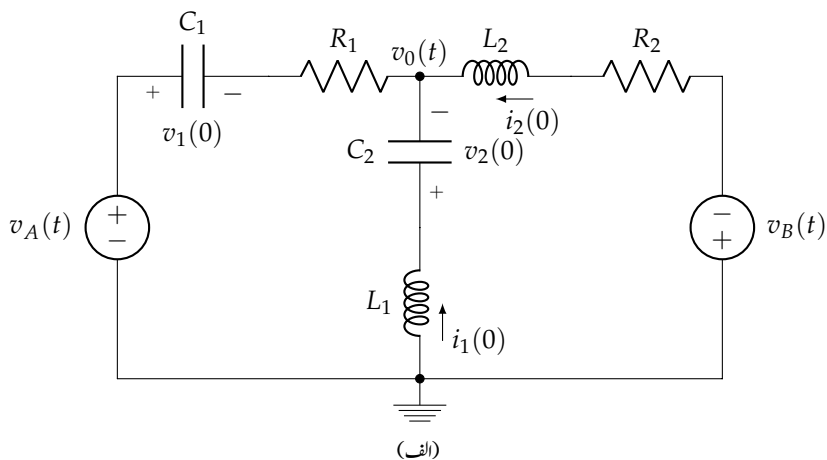
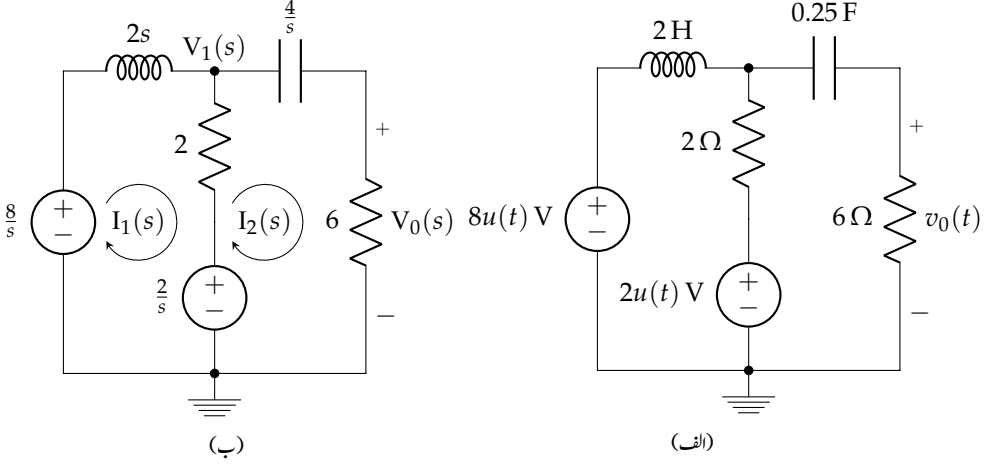
$$v_C(t) = 20\left(1-e^{-\frac{t}{8}}\right)u(t)$$

مثال 14.2: شکل 14.7 کے دائری مساوات اور مساوات جوڑ لکھیں۔

حل: لاپلاس بدل شکل 14.7-ب میں دکھایا گیا ہے جہاں سے کرخوف دائری مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1(s)\left[\frac{1}{sC_1}+R_1+\frac{1}{sC_2}+sL_1\right]-\mathrm{I}_2(s)\left[\frac{1}{sC_2}+sL_1\right] &= \mathrm{V}_A(s)-\frac{v_1(0)}{s}+\frac{v_2(0)}{s}-L_1i_1(0)\\ -\mathrm{I}_1(s)\left[sL_1+\frac{1}{sC_2}\right]+\mathrm{I}_2(s)\left[sL_1+\frac{1}{sC_2}+sL_2+R_2\right] &= \mathrm{V}_B(s)+L_1i_1(0)-\frac{v_2(0)}{s}-L_2i_2(0)\end{aligned}$$

مساوات جوڑ لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{V}_0(s)-\mathrm{V}_A(s)+\frac{v_1(0)}{s}}{R_1+\frac{1}{sC_1}}+\frac{\mathrm{V}_0(s)+\frac{v_2(0)}{s}-L_1i_1(0)}{\frac{1}{sC_2}+sL_1}+\frac{\mathrm{V}_0(s)-L_2i_2(0)+\mathrm{V}_B(s)}{sL_2+R_2}=0$$

شکل 14.7: مثال 14.2 کا دور۔

شکل 14.8: مثال 14.3 کا دور۔

مثال 14.3: شکل 14.8-الف میں دور دیا گیا ہے۔اس کو ہم دائری ترکیب، ترکیب جوڑ، مسئلہ خطی میل، تبادلہ منبع اور مسئلہ تھونن کی مدد سے حل کرتے ہیں۔

حل: لاپلاس مساوی شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم جوڑ $V_1(s)$ کو حاصل کرتے ہوئے $V_0(s)$ کو تقسیم دباو کے کلیے سے حاصل کریں گے۔ مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$\frac{V_1(s)-\frac{8}{s}}{2s}+\frac{V_1(s)-\frac{2}{s}}{2}+\frac{V_1(s)}{6+\frac{4}{s}}=0$$

جس سے

$$V_1(s)\left(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6+\frac{4}{s}}\right)=\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s}$$

یعنی

$$V_1(s)=\frac{2(s+4)(3s+2)}{s(4s^2+5s+2)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے $V_0(s)$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= \left(\frac{6}{6+\frac{4}{s}}\right)V_1(s)\\
&= \left(\frac{6s}{6s+4}\right)\left[\frac{2(s+4)(3s+2)}{s(4s^2+5s+2)}\right]\\
&= \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$

اس دباو کا جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہوئے وقتی تفاعل حاصل کرنا ہو گا۔ میں یہاں گزارش کروں گا ہوں کہ آپ صفحہ 740 پر مثال 12.3 کو ضرور دیکھیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= \frac{6(s+4)}{4(s^2+\frac{5}{4}s+\frac{1}{2})}\\
&= \frac{6(s+4)}{4(s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8})(s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8})}\\
&= \frac{K}{s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}}+\frac{K^*}{s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}}
\end{aligned}$$

مستقل K اور K^* حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
K &= \left.\frac{6(s+4)}{4(s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8})}\right|_{s=-\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}}\\
&= \frac{3}{4}+j\frac{81}{4\sqrt{7}}\\
K^* &= \left.\frac{6(s+4)}{4(s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8})}\right|_{s=-\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}}\\
&= \frac{3}{4}-j\frac{81}{4\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$V_0(s) = \frac{\frac{3}{4}+j\frac{81}{4\sqrt{7}}}{s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}}+\frac{\frac{3}{4}-j\frac{81}{4\sqrt{7}}}{s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}v_0(t) &= \left(\frac{3}{4}+j\frac{81}{4\sqrt{7}}\right)e^{-\left(\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}\right)t}+\left(\frac{3}{4}-j\frac{81}{4\sqrt{7}}\right)e^{-\left(\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}\right)t}\\ &= e^{-\frac{5}{8}t}\left[\frac{3}{4}\left(e^{-j\frac{\sqrt{7}}{8}t}+e^{j\frac{\sqrt{7}}{8}t}\right)+j\frac{81}{4\sqrt{7}}\left(e^{-j\frac{\sqrt{7}}{8}t}-e^{j\frac{\sqrt{7}}{8}t}\right)\right]\\ &= \frac{1}{4}e^{-\frac{5}{8}t}\left[6\cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{8}\right)+\frac{162}{\sqrt{7}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{8}\right)\right]\ \text{V}\end{aligned}$$

آئیں یہی جواب دائری ترکیب سے حاصل کریں۔دائری مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1(s)\,(2s+2)-2\mathrm{I}_2(s) &= \frac{8}{s}-\frac{2}{s}\\ -2\mathrm{I}_1(s)+\mathrm{I}_2(s)\left(2+\frac{4}{s}+6\right) &= \frac{2}{s}\end{aligned}$$

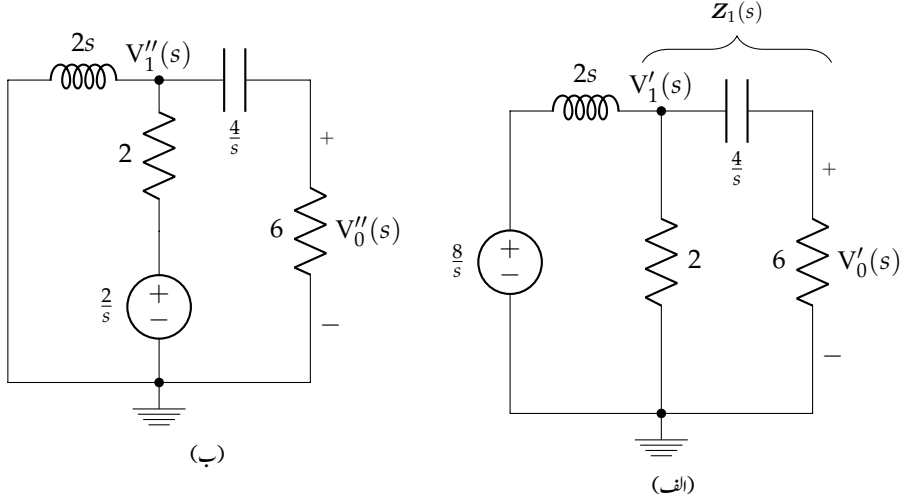
ان ہمزاد مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1(s) &= \frac{13s+6}{4s^3+5s^2+2s}\\ \mathrm{I}_2(s) &= \frac{s+4}{4s^2+5s+2}\end{aligned}$$

جس سے خارجی دباو حاصل ہوتا ہے۔

$$\mathrm{V}_0(s)=6\mathrm{I}_2(s)=\frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}$$

مسئلہ خطی میل سے اب اسی دور کو حل کرتے ہیں۔شکل 14.9 میں باری باری ایک ایک منبع کو لاگو کیا گیا ہے۔شکل 14.9-الف کو دیکھ کر $Z_1(s)$ لکھتے ہیں۔

$$Z_1(s)=\frac{2(6+\frac{4}{s})}{2+6+\frac{4}{s}}=\frac{3s+2}{2s+1}$$

شکل 14.9: مسئلہ خطی میل سے حل کرتے ہوئے باری باری ایک ایک منبع کو نافذ کیا گیا ہے

یوں تقسیم دباو کے کلیے سے $V_1'(s)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
V_1'(s) &= \left(\frac{Z_1(s)}{2s+Z_1(s)}\right)\frac{8}{s}\\
&= \left(\frac{\frac{3s+2}{2s+1}}{2s+\frac{3s+2}{2s+1}}\right)\frac{8}{s}\\
&= \frac{\frac{8}{s}(3s+2)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$

تقسیم دباو کے کلیے کو دوبارہ استعمال کرتے ہوئے $V_1'(s)$ سے $V_0''(s)$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_0'(s) &= \left(\frac{6}{6+\frac{4}{s}}\right)V_1'(s)\\
&= \left(\frac{3s}{3s+2}\right)\frac{\frac{8}{s}(3s+2)}{4s^2+5s+2}\\
&= \frac{24}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$

اب شکل 14.9-ب سے دوسرے منبع سے پیدا $V_0''(s)$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $2s$ اور $(6+\frac{4}{s})$ متوازی

جڑے ہیں جن کے مساوی کو $Z_2(s)$ کہہ کر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}Z_2(s) &= \frac{2s(6+\frac{4}{s})}{2s+6+\frac{4}{s}}\\ &= \frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}\end{aligned}$$

یوں تقسیم دباو کے کلیے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

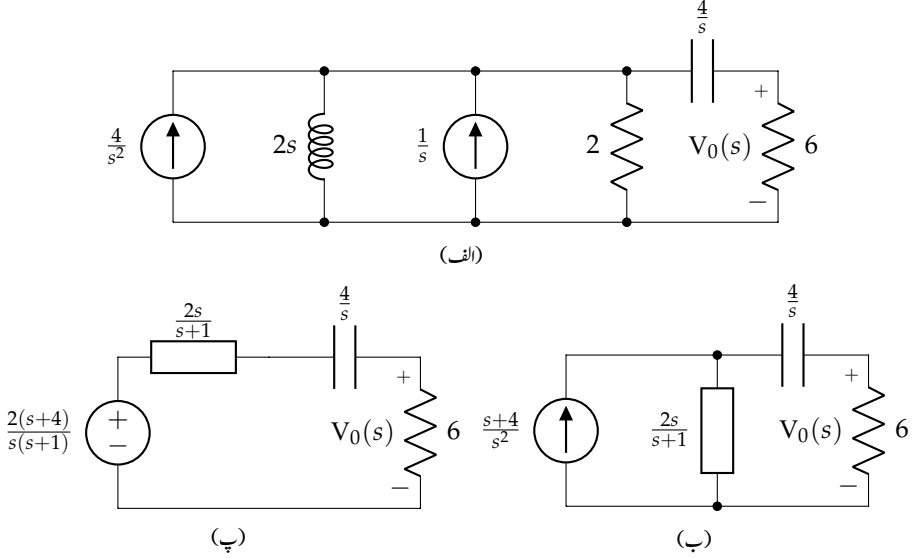
$$\begin{aligned}V_1''(s) &= \left(\frac{Z_2(s)}{2+Z_2(s)}\right)\frac{2}{s}\\ &= \left(\frac{\frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}}{2+\frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}}\right)\frac{2}{s}\\ &= \frac{2(3s+2)}{4s^2+5s+2}\end{aligned}$$

اور ایک مرتبہ دوبارہ تقسیم دباو سے

$$\begin{aligned}V_0''(s) &= \left(\frac{6}{6+\frac{4}{s}}\right)V_1''(s)\\ &= \left(\frac{3s}{3s+2}\right)\frac{2(3s+2)}{4s^2+5s+2}\\ &= \frac{6s}{4s^2+5s+2}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں دونوں منبع کی موجودگی میں $V_0(s) = V_0'(s) + V_0''(s)$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}V_0(s) &= \frac{24}{4s^2+5s+2} + \frac{6s}{4s^2+5s+2}\\ &= \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}\end{aligned}$$

آئیں اب شکل 14.8-الف کو تبادلہ منبع سے حل کریں۔دونوں منبع دباو کے مساوی منبع رو نسب کرتے ہوئے شکل 14.10-الف ملتا ہے جہاں منبع دباو $\frac{8}{s}$ اور اس کے سلسلہ وار $2s$ کو منبع رو $\frac{4}{s^2} = \frac{8/s}{2s}$ جس کے متوازی $2s$ جڑا ہے میں تبدیل کیا گیا ہے۔اسی طرح منبع دباو $\frac{2}{s}$ اور سلسلہ وار 2 کو منبع رو $\frac{1}{s} = \frac{2/s}{2}$ میں تبدیل کیا گیا ہے جس کے متوازی 2 نسب ہے۔

شکل 14.10: منبع دباو کی جگہ منبع رو نسب کیا گیا ہے۔

شکل 14.10-الف میں متوازی جڑے منبع رو کا مساوی منبع رو $\frac{s+4}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{4}{s^2}$ ہے۔اسی طرح منبع کے متوازی 2 اور $2s$ مل کر $\frac{2s}{s+1} = \frac{2(2s)}{2+2s}$ دیتے ہیں۔یوں شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔

شکل 14.10-ب میں منبع رو $\frac{s+4}{s^2}$ اور متوازی رکاوٹ $\frac{2s}{s+1}$ کو سلسلہ وار جڑے منبع دباو $(\frac{s+4}{s^2})(\frac{2s}{s+1}) = \frac{2(s+4)}{s(s+1)}$ اور رکاوٹ $\frac{2s}{s+1}$ میں تبدیل کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتی ہے جس سے تقسیم دباو کے کلیے سے $V_0(s)$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= \left(\frac{6}{\frac{2s}{s+1} + \frac{4}{s} + 6}\right)\frac{2(s+4)}{s(s+1)} \\
&= \frac{6(s+4)}{4s^2 + 5s + 2}
\end{aligned}$$

مسئلہ تھونن سے حل کرنے کی خاطر شکل 14.8-الف میں سلسلہ وار جڑے $6\,\Omega$ اور $0.25\,\mathrm{F}$ کو بوجھ تصور کرتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔تھونن دباو شکل 14.11-الف اور تھونن رکاوٹ شکل-ب

سے حاصل کی جائے گی۔ شکل-الف سے درج ذیل لکھتے

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{\frac{8}{s} - \frac{2}{s}}{2s+2} \\ &= \frac{3}{s(s+1)} \end{aligned}$$

ہوئے تھونن دباو حاصل کی جا سکتی ہے۔

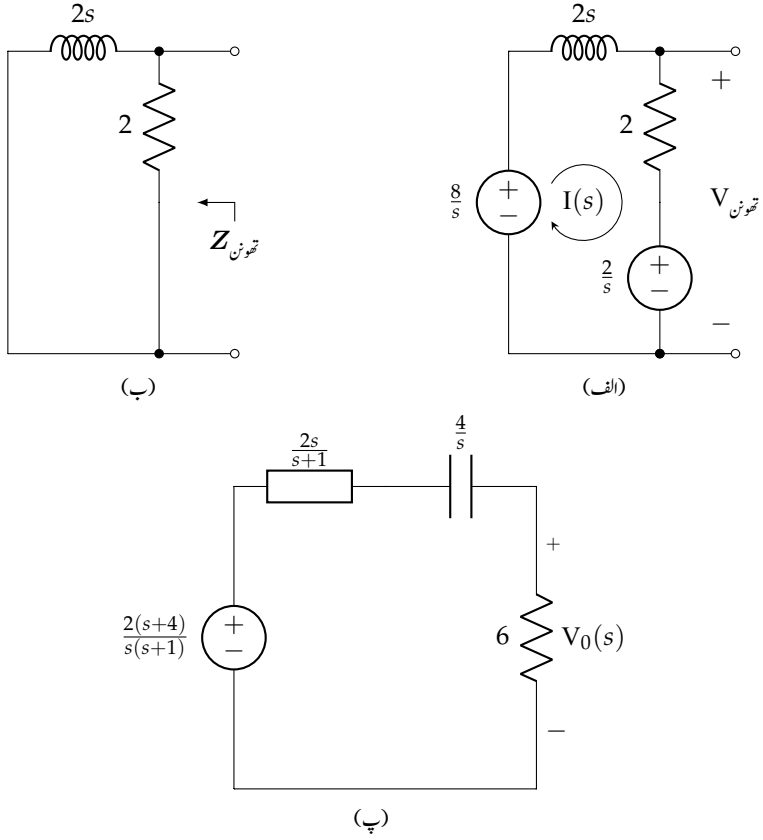
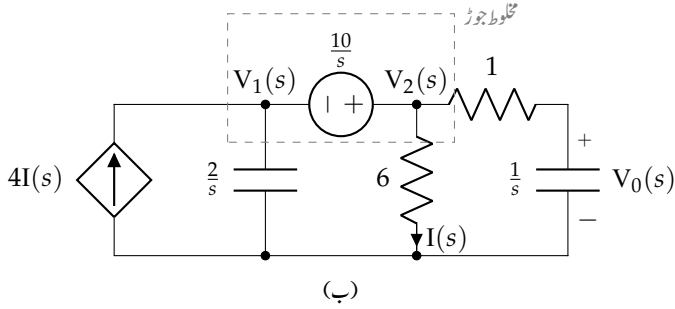
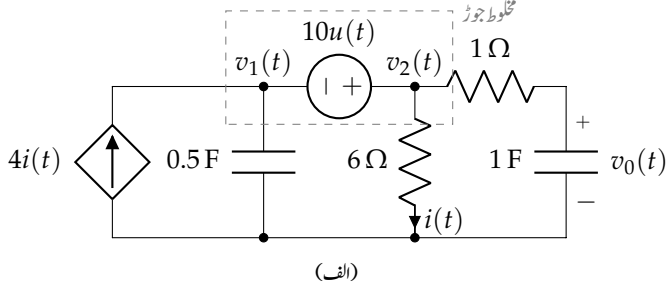
$$\begin{aligned} V_{\text{تھونن}} &= \frac{2}{s} + 2I(s) \\ &= \frac{2}{s} + \frac{6}{s(s+1)} \\ &= \frac{2(s+4)}{s+1} \end{aligned}$$

شکل-ب سے تھونن رکاوٹ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}} &= \frac{(2)(2s)}{2+2s} \\ &= \frac{2s}{s+1} \end{aligned}$$

تھونن دباو اور تھونن رکاوٹ استعمال کرتے ہوئے تھونن دور حاصل ہوتا ہے جس کے ساتھ بوجھ جوڑتے ہوئے شکل 14.11-پ حاصل ہوتی ہے جہاں سے تقسیم دباو کے کلیے سے $V_0(s)$ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \left(\frac{6}{\frac{2s}{s+1} + \frac{4}{s} + 6} \right) \frac{2(s+4)}{s(s+1)} \\ &= \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2} \end{aligned}$$

مشق 14.1: شکل 14.8-الف کو مسئلہ نارٹن سے حل کریں۔

شکل 14.11: مثال 14.3 کے دور کا تھونن سے حل۔

شکل 14.12: مثال 14.4 کا دور۔

جواب مثال 14.3 میں دیا گیا ہے۔

مثال 14.4: شکل 14.12-الف میں $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: اگر $v_2(t)$ معلوم کیا جائے تو $v_0(t)$ کو تقسیم دباو کے کلیے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس دور میں مخلوط جوڑ پایا جاتا ہے لہٰذا مساوات جوڑ کی تعداد کم ہو گی۔ شکل-ب میں لاپلاس بدل دکھایا گیا ہے جس سے کرخوف مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$\frac{V_2(s)}{6}+\frac{V_2(s)}{1+\frac{1}{s}}+\frac{V_2(s)-\frac{10}{s}}{\frac{2}{s}}-4I(s)=0$$

جہاں

$$I(s) = \frac{V_2(s)}{6}$$

ہے لہٰذا

$$\frac{V_2(s)}{6} + \frac{V_2(s)}{1+\frac{1}{s}} + \frac{V_2(s) - \frac{10}{s}}{\frac{2}{s}} - \frac{4V_2(s)}{6} = 0$$

یعنی

$$\frac{V_2(s)}{6} + \frac{sV_2(s)}{s+1} + \frac{sV_2(s) - 10}{2} - \frac{2V_2(s)}{3} = 0$$

یا

$$V_2(s) = \frac{10(s+1)}{s^2+2s-1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے درکار جواب لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= V_2(s)\left(\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}\right) \\
&= \frac{10(s+1)}{s^2+2s-1}\left(\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}\right) \\
&= \frac{10}{s^2+2s-1}
\end{aligned}$$

جزوی کسری پھیلاو حاصل کرتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں دباو حاصل ہو گا۔ نسب نما کے جذر $-1 \mp \sqrt{2}$ ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= \frac{10}{(s+1-\sqrt{2})(s+1+\sqrt{2})} \\
&= \frac{K_1}{s+1-\sqrt{2}} + \frac{K_2}{s+1+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

جس سے

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \left.\frac{10}{s+1+\sqrt{2}}\right|_{s=-1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{2}} \\
K_2 &= \left.\frac{10}{s+1-\sqrt{2}}\right|_{s=-1-\sqrt{2}} \\
&= -\frac{5}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

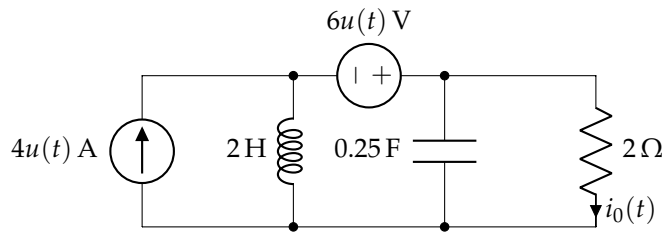
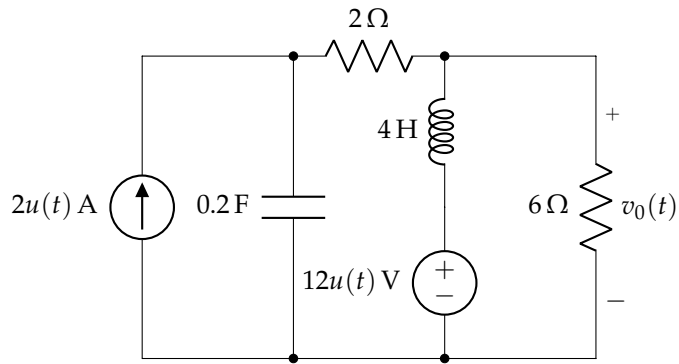
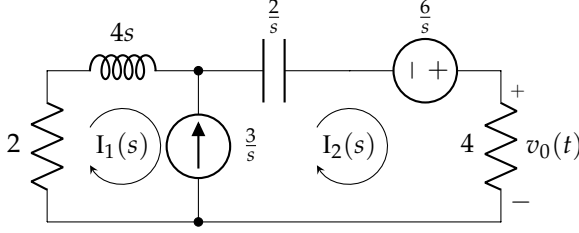
حاصل ہوتے ہیں۔یوں

$$
\mathrm{V}_0(s) = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{s+1+\sqrt{2}}\right)
$$

لکھ کر الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درکار دباو حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= \frac{5}{\sqrt{2}}\left[e^{-(1-\sqrt{2})t} - e^{-(1+\sqrt{2})t}\right]u(t) \\
&= 5\sqrt{2}e^{-t}\sinh(\sqrt{2}t)u(t)\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

مشق 14.2: شکل 14.13 میں $i_0(t)$ بذریعہ مساوات جوڑ دریافت کریں۔

جواب: $i_0(t) = [e^{-t}(5\sin t - 3\cos t) + 3]u(t)\,\mathrm{A}$

شکل 14.13: مثال 14.2 کا دور۔

شکل 14.14: مثال 14.3 کا دور۔

شکل 14.15: مثال 14.4 اور مثال 14.5 کا دور۔

مشق 14.3: شکل 14.14 میں $v_0(t)$ بذریعہ مساوات جوڑ دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t) = \left[e^{-\frac{t}{2}}\left(7.24\sin\frac{\sqrt{11}}{4}t - 12\cos\frac{\sqrt{11}}{4}t\right) + 12\right]u(t)\,\mathrm{V}$

مشق 14.4: شکل 14.15 میں $v_0(t)$ بذریعہ دائری مساوات دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t) = 12e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{V}$

مشق 14.5: مسئلہ تھونن کی مدد سے شکل 14.15 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

لاپلاس بدل کی مدد سے کچھ ادوار ہم حل کر چکے جن میں ابتدائی رو اور دباو صفر تھے۔ آئیں اب چند ایسے ادوار دیکھیں جن میں ابتدائی رو یا ابتدائی دباو پایا جاتا ہو۔ اس طرز کے ادوار ہم پہلے باب 7 میں حل کر چکے ہیں۔ اس باب کے

شروع میں ابتدائی رو اور ابتدائی دباو کو شامل کرتے ہوئے پرزوں کے لاپلاس بدل حاصل کئے گئے نہیں شکل 14.2، شکل 14.3 اور شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔انہیں کو استعمال کرتے ہوئے ادوار حل کئے جائیں گے۔

مثال 14.5: شکل 14.16 میں ازل سے ایک سوئچ منقطع اور ایک سوئچ چالو ہے۔عین $t = 0\,\mathrm{s}$ پر چالو سوئچ کو منقطع کر دیا جاتا ہے جبکہ منقطع سوئچ کو چالو کر دیا جاتا ہے۔لمحہ $t < 0$ پر دور کو حل کرتے ہوئے ابتدائی دباو اور ابتدائی رو حاصل کرتے ہوئے $t \geq 0$ پر $i_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: لمحہ $t < 0$ پر برق گیر کو کھلے دور جبکہ امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے جہاں سے امالہ گیر کی ابتدائی رو $i_L(0)$ اور برق گیر کا ابتدائی دباو $v_C(0)$ حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_L(0) &= \frac{2}{4} = 0.5\,\mathrm{A}\\
v_C(0) &= 2\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

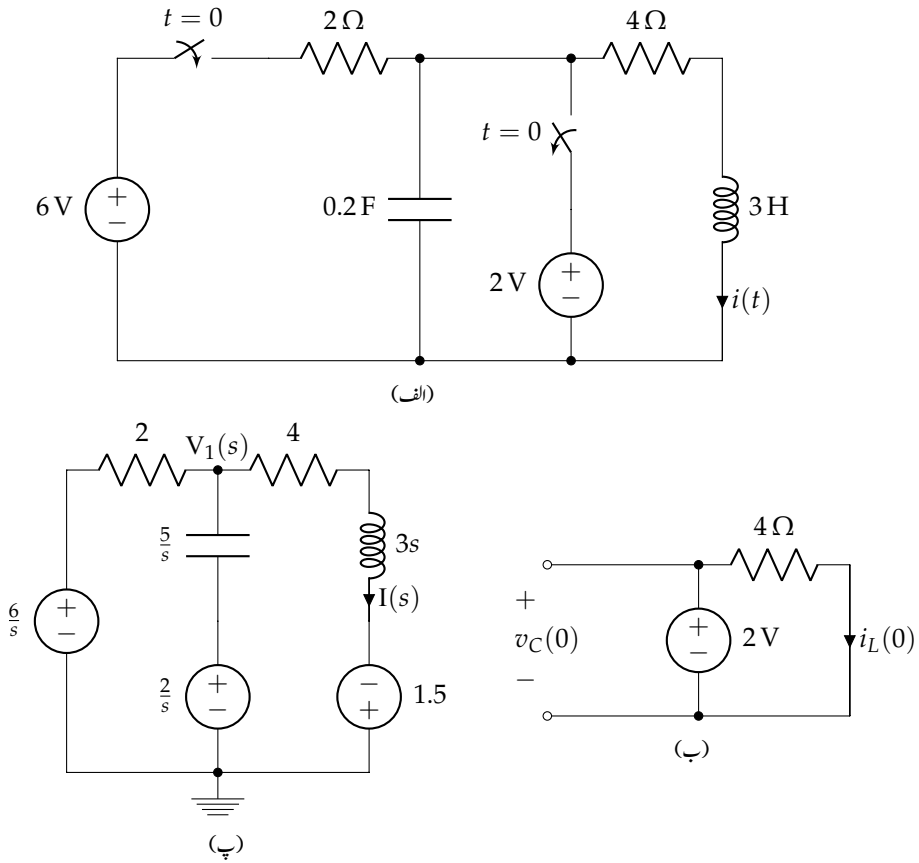
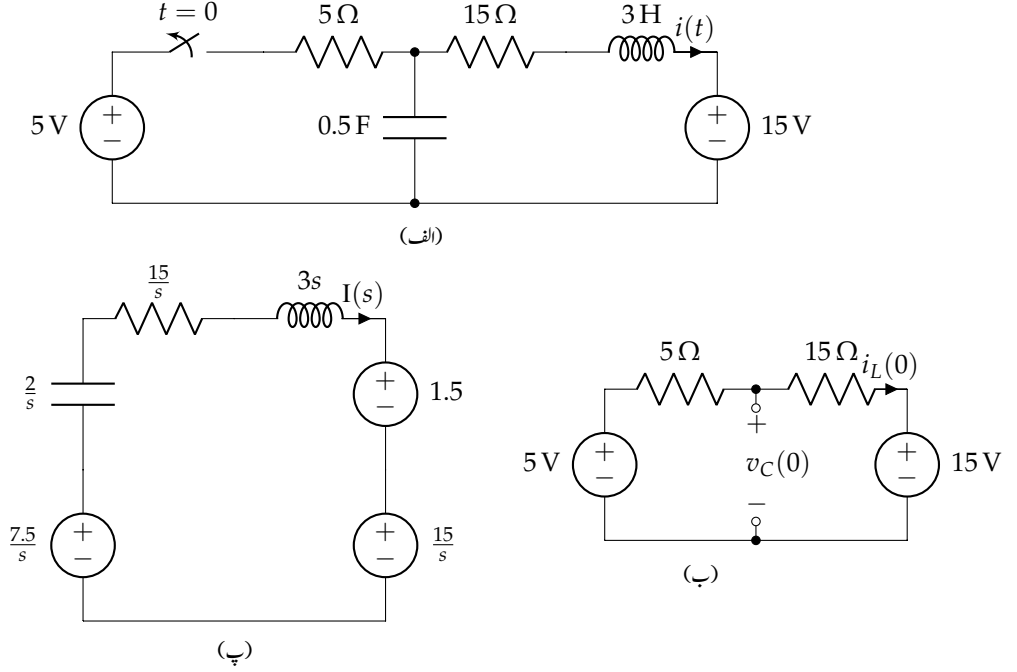
ابتدائی معلومات کو شامل کرتے ہوئے پرزوں کے لاپلاس مساوی دور پر کرنے سے لمحہ $t \geq 0$ کے لئے شکل حاصل ہوتا ہے۔مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$
\frac{\mathrm{V}_1(s)-\frac{6}{s}}{2}+\frac{\mathrm{V}_1(s)-\frac{2}{s}}{\frac{5}{s}}+\frac{\mathrm{V}_1(s)+1.5}{3s}=0
$$

جس سے

$$
\mathrm{V}_1(s)=\frac{12s^2+91s+120}{s(6s^2+23s+30)}
$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں رو درج ذیل ہے

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &= \frac{\mathrm{V}_1(s)}{3s+4}\\
&= \frac{12s^2+91s+120}{s(s+4)(6s^2+23s+30)}
\end{aligned}
$$

شکل 14.16: مثال 14.5 کا دور۔

شکل 14.17: مثال 14.6 کا دور۔

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$i(t) = \left[e^{-\frac{23}{12}t}\left(\frac{44}{\sqrt{191}}\sin\frac{\sqrt{191}t}{12} - 2\cos\frac{\sqrt{191}t}{12}\right) + 4\right]u(t)\,\mathrm{A}$$

مثال 14.6: شکل 14.17 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ پر منقطع کیا جاتا ہے۔سوئچ منقطع ہونے کے بعد کی رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل: چالو سوئچ کی صورت میں برق گیر کو کھلا دور اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتی ہے جہاں سے امالہ گیر کی ابتدائی رو $i_L(0)$ اور برق گیر کی ابتدائی دباو $v_C(0)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$i_L(0) = \frac{10-20}{5+15} = -0.5\,\mathrm{A}$$
$$v_C(0) = \frac{5\times 15 + 15\times 5}{5+15} = 7.5\,\mathrm{V}$$

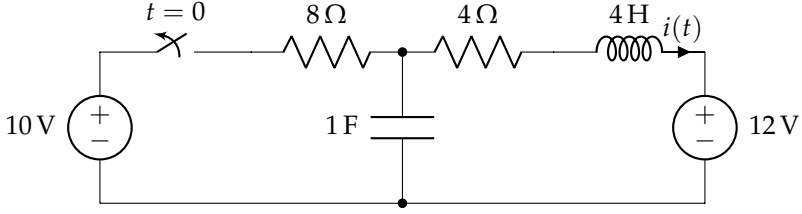
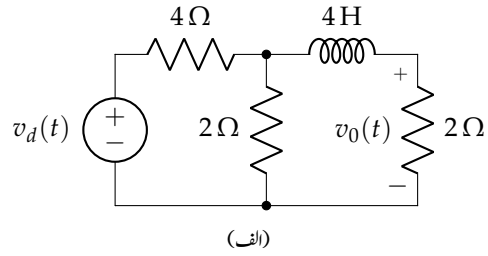
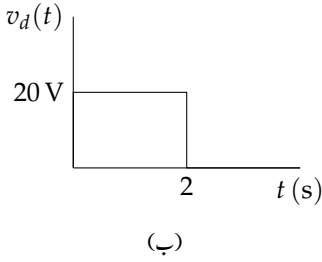
ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے، سوئچ منقطع ہونے کے بعد کا لاپلاس بدل دور شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔ابتدائی رو منفی ہونے کی وجہ سے امالہ کے لاپلاسی اظہار میں $1.5\,\mathrm{V}$ منبع کے قطبین شکل 14.4 کے الٹ ہیں۔ شکل 14.17-ب سے $\mathrm{I}(s)$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(s) &= \frac{\frac{7.5}{s} - 1.5 - \frac{15}{s}}{\frac{2}{s} + 15 + 3s}\\ &= \frac{-(s+5)}{2(s^2+5s+\frac{2}{3})}\\ &= \frac{-(s+5)}{2(s+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{201}}{6})(s+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{201}}{6})}\end{aligned}$$

اس کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$i(t) = -e^{-\frac{5}{2}t}\left[\frac{45}{6\sqrt{201}}\sinh\left(\frac{\sqrt{201}}{6}t\right) + \frac{1}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{201}}{6}t\right)\right]u(t)\,\mathrm{A}$$

مشق 14.6: شکل 14.18 میں $i_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $i_0(t) = -\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{6}(1+\frac{t}{2})u(t)\,\mathrm{A}$

شکل 14.18: مشق 14.6 کا دور۔

شکل 14.19: مشق 14.7 کا دور۔

مشق 14.7: شکل 14.19-الف میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔ شکل-ب میں داخلی دباو کی مستطیل صورت دی گئی ہے۔

جواب: $v_0(t) = 4(1 - e^{-\frac{5}{6}t})u(t) + 4(1 - e^{-(\frac{5}{6}-2)t})u(t-2)\,\text{V}$

14.4 تبادلی تفاعل جال

دور میں کسی بھی دباو یا رو اور داخلی اشارے کے تناسب کو جال کی تبادلی تفاعل[1] یا تفاعل جال[2] کہتے ہیں۔ اگر دونوں متغیرات دباو ہوں تب تبادلی تفاعل افزائش دباو[3] کہلاتا ہے، اگر دونوں متغیرات رو ہوں تب اس کو افزائش رو[4] کہتے ہیں۔ اسی طرح دباو اور رو کے تناسب کو افزائش مزاحمت نما[5] کہتے ہیں جبکہ رو اور دباو کے تناسب کو افزائش موصلیت نما[6] کہتے ہیں۔ تبادلی تفاعل کے حصول میں ابتدائی دباو اور ابتدائی رو کو صفر لیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ کسی دور کا تبادلی تفاعل درج ذیل مساوات دیتی ہے جہاں $x_d(t)$ داخلی اشارہ اور $y_0(t)$ خارجی اشارہ ہیں۔

$$\begin{aligned} b_n \frac{\mathrm{d}^n\, y_0(t)}{\mathrm{d}t^n} + b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}\, y_0(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}^1\, y_0(t)}{\mathrm{d}t^1} + b_0 y_0(t) = \\ a_m \frac{\mathrm{d}^m\, x_d(t)}{\mathrm{d}t^m} + a_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1}\, x_d(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}^1\, x_d(t)}{\mathrm{d}t^1} + a_0 x_d(t) \end{aligned}$$

تمام ابتدائی معلومات صفر ہونے کی صورت میں درج بالا کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} \left(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right) \mathrm{Y}_0(s) = \\ \left(a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) \mathrm{X}_d(s) \end{aligned}$$

جس سے تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s)$

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{\mathrm{Y}_0(s)}{\mathrm{X}_d(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

یا

$$\mathrm{Y}_0(s) = \boldsymbol{H}(s)\mathrm{X}_d(s) \tag{14.18}$$

لکھتے ہیں۔

---

transfer function[1]
network function[2]
voltage gain[3]
current gain[4]
transresistance gain[5]
transconductance gain[6]

مساوات 14.18 کہتی ہے کہ تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s)$ اور داخلی تفاعل X_d کا حاصل ضرب خارجی تفاعل $\mathrm{Y}_0(s)$ کے برابر ہے۔یوں $x_d(t) = \delta(t)$ کی صورت میں چونکہ $\mathrm{X}_d(s) = 1$ ہے لہٰذا $\mathrm{Y}_0(s) = \boldsymbol{H}(s)$ ہو گا۔

$$\mathrm{Y}_0(s) = \boldsymbol{H}(s) \quad \delta(t) \tag{14.19}$$

یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دور پر اکائی ضرب تفاعل لاگو کرتے ہوئے خارجی اشارے سے دور کا تبادلی تفاعل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایک بار دور کا تبادلی تفاعل معلوم ہو جائے اس کے بعد کسی بھی داخلی اشارے پر دور کا رد عمل مساوات 14.18 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اکائی ضرب تفاعل لاگو کرتے ہوئے خارجی رد عمل $h(t)$ دے گا جس کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے $\boldsymbol{H}(s)$ حاصل کیا جائے گا۔چونکہ تجزیہ گاہ[7] میں اکائی ضرب تفاعل پیدا کرنا مشکل بلکہ ناممکن کام ہے لہٰذا ہم دور پر اکائی سیڑھی تفاعل لاگو کرتے ہوئے تبادلی تفاعل حاصل کر سکتے ہیں۔چونکہ $u(t)$ کا لاپلاس بدل $\frac{1}{s}$ ہے لہٰذا دور پر اکائی سیڑھی تفاعل لاگو کرتے ہوئے مساوات 14.18 کے تحت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{Y}_0(s) = \frac{\boldsymbol{H}(s)}{s} \quad u(t) \tag{14.20}$$

یوں اکائی سیڑھی تفاعل لاگو کرتے ہوئے دور کا خارجی اشارہ $y_0(t)$ ناپا جاتا ہے۔خارجی اشارے کا لاپلاس بدل $\mathrm{Y}_0(s)$ دے گا۔درج بالا مساوات کے تحت $\boldsymbol{H}(s) = \mathrm{Y}_0(s)$ کے برابر ہے۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ ناپے گئے خارجی اشارے کے تفرق $\frac{\mathrm{d}y_0(t)}{\mathrm{d}t}$ کا لاپلاس بدل نظام کا تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s)$ ہو گا۔

مثال 14.7: دور کا اکائی ضرب تفاعل رد عمل $\boldsymbol{H}(s) = \frac{2}{s+5}$ ہے۔داخلی اشارہ $v_d(t) = 3e^{-4t}u(t)\,\mathrm{V}$ لاگو کرتے ہوئے خارجی اشارہ $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل:داخلی اشارے کا لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{V}_d(s) = \frac{3}{s+4}$$

[7] lab

یوں مساوات استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}_0(s) &= \boldsymbol{H}(s)\mathrm{V}_d(s) \\
&= \frac{6}{(s+5)(s+4)} \\
&= \frac{6}{s+4} - \frac{6}{s+5}
\end{aligned}
$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے خارجی اشارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0(t) = 6\left(e^{-4t} - e^{-5t}\right)u(t)\,\mathrm{V}$$

تبادلی تفاعل کے قطب سے دور کے رد عمل کے بارے میں بہت کچھ جانا جاتا ہے۔ہم یک رتبی اور دو رتبی ادوار پر باب 7 میں غور کر چکے ہیں۔ یہاں نتائج کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ایک عدد امالہ گیر یا برق گیر کی صورت میں رد عمل $y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ صورت رکھتا ہے جہاں τ دور کا وقتی مستقل ہے۔دو رتبی ادوار کا رد عمل دور کے **امتیازی مساوات**

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

کے قطبین پر منحصر ہوتا ہے۔یاد رہے کہ تبادلی تفاعل کا نسب نما امتیازی مساوات کہلاتا ہے۔امتیازی مساوات میں ζ **تقصیری مستقل** اور ω_0 **بلا تقصیر قدرتی تعدد** ہے اور یہی دو قیمتیں رد عمل کی تین ممکنہ صورتیں تعین کرتی ہیں۔

زیادہ تقصیر: **امتیازی مساوات میں** $\zeta > 1$ اور مساوات کے جذر

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \\
s_2 &= -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}
\end{aligned}
$$

ہیں لہٰذا جال کا رد عمل درج ذیل ہے۔

$$y(t) = K_1 e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t}$$

کم تقصیر: امتیازی مساوات میں $\zeta < 1$ اور مساوات کے جذر

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \\
s_2 &= -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}
\end{aligned}
$$

ہیں لہٰذا جال کا رد عمل درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
y(t) &= K_1 e^{-(\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t} \\
&= K e^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi)
\end{aligned}
$$

فاصل تقصیر: امتیازی مساوات میں $\zeta = 1$ اور مساوات کے جذر

$$
s_1 = s_2 = -\omega_0
$$

ہیں لہٰذا جال کا رد عمل درج ذیل ہے۔

$$
y(t) = K_1 e^{-\omega_0 t} + K_2 t e^{-\omega_0 t}
$$

جال کے قطبین اور صفروں کو عموماً مخلوط سطح[8] یا s سطح پر دکھایا جاتا ہے۔ مخلوط سطح کے افقی محور پر σ اور عمودی محور پر $j\omega$ رکھتے ہوئے مخلوط تعدد $s = \sigma + j\omega$ دکھایا جاتا ہے۔اس سطح پر صفر کو 0 جبکہ قطبین کو $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

شکل 14.20 میں سادہ اور علیحدہ قطبین، مخلوط قطبین اور کثیر ہم رتبی قطبین مخلوط سطح پر دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ٹ میں دو عدد ہم رتبی قطبین کو علیحدہ علیحدہ کر کے دکھایا گیا ہے۔حقیقت میں یہ دونوں حقیقی محور پر ایک ہی نقطے پر پائے جاتے ہیں۔ساتھ ہی ساتھ ان سے حاصل رد عمل بھی دکھایا گیا ہے۔سادہ اور علیحدہ قطبین کے تفاعل کی شرح تبدیلی کم ہوتی ہے لہٰذا اس کو صفر تک پہنچنے میں زیادہ وقت لگتا ہے۔ مخلوط قطبین کے تفاعل کی شرح تبدیلی زیادہ ہوتی ہے البتہ یہ صفر پر پہنچ کر دوسری جانب نکل جاتا ہے۔یوں مخلوط قطبین کا تفاعل مقصور سائن نما[9] ہوتا ہے۔ کثیر ہم رتبی قطبین کا رد عمل ان دونوں کے درمیان ہے۔یہ تیز تر ممکنہ رفتار سے صفر تک پہنچتا ہے، البتہ اتنا تیز نہیں کہ صفر پر رک نہ سکے اور دوسری جانب نکل جائے۔

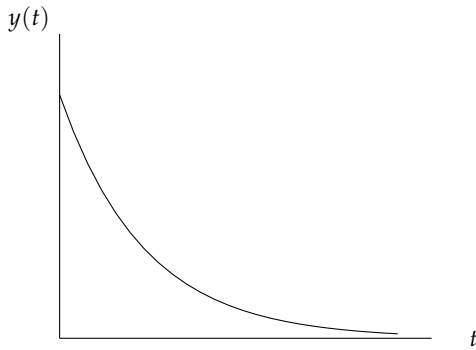
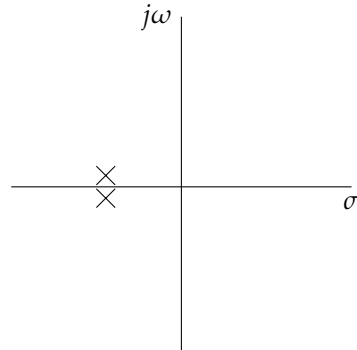
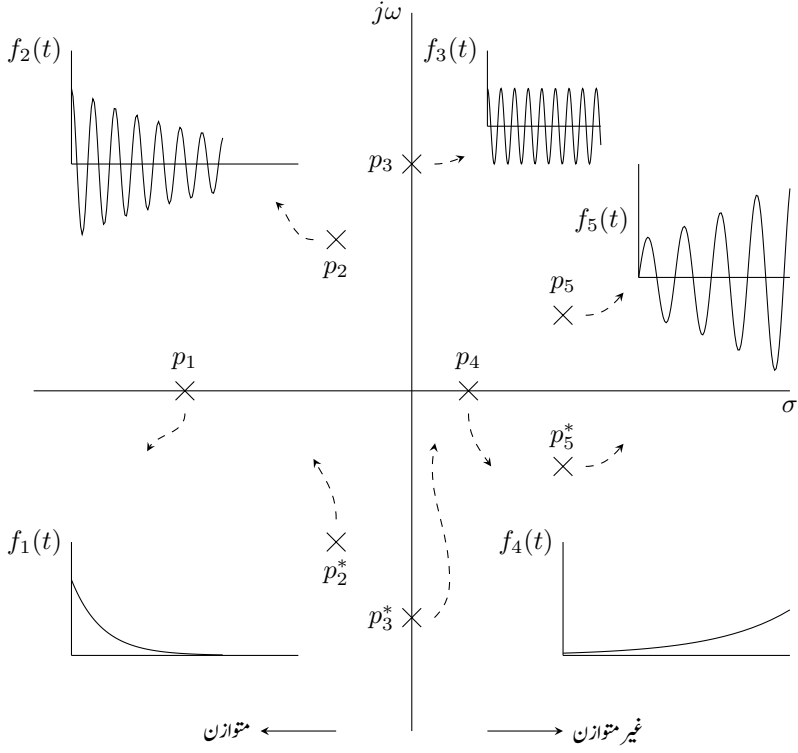
[8] complex plane
[9] damped sinusoidal

(الف) مخلوط سطح پر حقیقی سادہ قطبین کا اظہار۔

(ب) حقیقی منفی سادہ قطبین سے پیدا ردعمل۔

(پ) مخلوط سطح پر جوڑی دار مخلوط قطبین کا اظہار۔

(ت) مخلوط جوڑی دار قطبین سے پیدا ردعمل۔

(ٹ) کثیر ہم رتبی حقیقی منفی قطبین۔

(ث) کثیر ہم رتبی حقیقی منفی قطبین سے پیدا ردعمل۔

شکل 14.20: قطبین اور ردعمل

شکل 14.21: مخلوط سطح پر مختلف قطبین اور ان کے تفاعل کے رد عمل۔

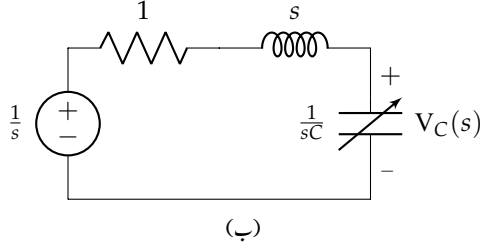
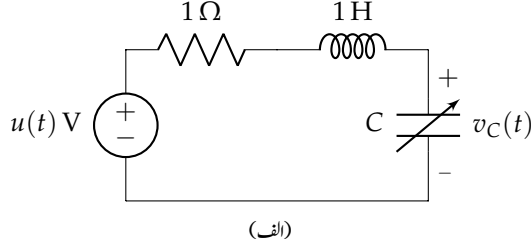
شکل 14.21 میں مخلوط سطح پر مختلف تفاعل اور تفاعل کے قطبین دکھائے گئے۔اس شکل سے کئی حقائق کی وضاحت ہوتی ہے لہٰذا اس پر کچھ وقت صرف کرتے ہیں۔فرض کریں کہ p_1 تا p_5 بالترتیب $f_1(t)$ تا $f_5(t)$ تفاعل کو ظاہر کرتے ہیں۔مخلوط قطبین جوڑیوں میں پائے جاتے ہیں۔یوں p_2 اور p_2^* مخلوط جوڑی ہے جو $f_2(t)$ کو ظاہر کرتے ہیں۔حقیقی جزو صفر ہونے کی صورت میں خیالی قطبین کی جوڑی مثلاً p_3 اور p_3^* ملتی ہے۔قطب کا حقیقی جزو اگر مثبت ہو تو تفاعل مسلسل بڑھتا ہے اور اگر حقیقی جزو منفی ہو تب تفاعل مسلسل گھٹتا ہے۔یوں $f_4(t)$ یا $f_5(t)$ مسلسل بڑھتے تفاعل ہیں جبکہ $f_1(t)$ اور $f_2(t)$ مسلسل گھٹتے تفاعل ہیں۔مسلسل بڑھتا تفاعل غیر متوازن صورت حال کو ظاہر کرتی ہے جو حقیقی دنیا میں زیادہ دیر برقرار نہیں رہ سکتی جیسے مسلسل بڑھتی رو آخر کار کسی نہ کسی چیز کو تباہ کر کے ہی رہے گی۔مسلسل گھٹتا تفاعل متوازن صورت حال کو ظاہر کرتی ہے۔یوں خیالی محور کے دائیں جانب قطب غیر متوازن جبکہ محور کے بائیں جانب قطب متوازن نظام کو ظاہر کرتی ہے۔کسی بھی متوازن نظام کی تخلیق کے دوران مخلوط سطح میں قطبین کے مقام پر کھڑی نظر رکھی جاتی ہے اور خیالی محور کے دائیں جانب قطبین سے ہر صورت چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔قطب کا خیالی جزو صفر نہ ہونے کی صورت میں تفاعل سائن نما ہو گا لہٰذا $f_5(t)$ مسلسل بڑھتا سائن نما تفاعل ہے جبکہ $f_2(t)$ مسلسل گھٹتا سائن نما یعنی مقصور سائن نما[10] ہے۔خیالی قطبین کی جوڑی سائن نما تفاعل کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا $f_3(t)$ برقرار حیطے کا سائن نما تفاعل ہے۔حقیقی محور سے جتنا دور جایا جائے، تعدد اتنی بڑھتی ہے لہٰذا $f_5(t)$ سے $f_2(t)$ کا تعدد زیادہ ہے اور $f_3(t)$ کا تعدد اس سے بھی زیادہ ہے۔اسی طرح خیالی محور سے جتنا دور جایا جائے، بڑھنے یا گھٹنے کی شرح اتنی بڑھتی ہے لہٰذا $f_4(t)$ کے بڑھنے کی شرح سے $f_2(t)$ کے گھٹنے کی شرح زیادہ ہو گی جبکہ $f_5(t)$ اس سے زیادہ اور $f_1(t)$ تمام سے زیادہ تیزی سے تبدیل ہو گا۔

مثال 14.8: شکل 14.22-الف میں تغیر پذیر برق گیر استعمال کیا گیا ہے۔خارجی دباو $v_C(t)$ کو $C = 1\,\mathrm{F}$ ، $C = 4\,\mathrm{F}$ اور $C = 10\,\mathrm{F}$ کے لئے حاصل کریں۔

شکل 14.22-ب میں لاپلاس بدل دور دکھایا گیا ہے جس سے تقسیم دباو کے کلیے سے خارجی دباو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_C(s) &= \left(\frac{\frac{1}{sC}}{1+s+\frac{1}{sC}}\right)\frac{1}{s} \\
&= \frac{\frac{1}{C}}{s(s^2+s+\frac{1}{C})}
\end{aligned}$$

---

[10] damped sinusoidal

شکل 14.22: مثال 14.8 کا دور۔

$C = 1\,\mathrm{F}$ کے لئے $\mathrm{V}_C(s)$ کے مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_C(s) &= \frac{1}{s(s^2+s+1)} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{6}(3+j\sqrt{3})}{s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\frac{1}{6}(3-j\sqrt{3})}{s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}
\end{aligned}$$

امتیازی مساوات کے جذر یعنی $\mathrm{V}_C(s)$ کے قطبین $p_1 = 0$ ، $p_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $p_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہیں۔ یوں ایک عدد حقیقی اور مخلوط جوڑی دار قطبین پائے جاتے ہیں جو کم مقصور صورت حال ہے۔ الٹ لاپلاس بدل سے وقتی دائرہ کار میں خارجی دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right] u(t)\,\mathrm{V}$$

$C = 4\,\mathrm{F}$ کے لئے $\mathrm{V}_C(s)$ کے مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_C(s) &= \frac{0.25}{s(s^2+s+0.25)}\\ &= \frac{0.25}{s(s+\frac{1}{2})^2}\\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2(s+\frac{1}{2})^2}\end{aligned}$$

یہاں تینوں قطبین حقیقی ہیں جن میں $p = -\frac{1}{2}$ کثیر رتبی قطب ہے جو فاصلہ مقصور حال کو ظاہر کرتی ہے۔الٹ لاپلاس لیتے ہوئے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} - \frac{t}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)\,\mathrm{V}$$

$C = 10\,\mathrm{F}$ کے لئے $\mathrm{V}_C(s)$ کے مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_C(s) &= \frac{0.1}{s(s^2+s+0.1)}\\ &= \frac{1}{s} + \frac{0.145}{s+0.887} - \frac{1.145}{s+0.113}\end{aligned}$$

اس مساوات کے قطبین $p_1 = 0$ ، $p_2 = -0.887$ اور $p_3 = -0.113$ ہیں۔یوں تینوں سادہ علیحدہ علیحدہ حقیقی قطبین ہیں لہٰذا تفاعل کا رد عمل زیادہ مقصور ہو گا۔الٹ لاپلاس بدل سے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = \left(1 + 0.145e^{-0.887t} - 1.145e^{-0.113t}\right)u(t)\,\mathrm{V}$$

مثال 14.9: اکائی ضرب رد عمل $y(t) = 2e^{-5t} - 4e^{-2t}$ ہے۔اکائی سیڑھی رد عمل دریافت کریں۔

حل:اکائی ضرب رد عمل تبادلی تفاعل دیتا ہے لہٰذا دیے گیے رد عمل کا لاپلاس بدل $\boldsymbol{H}(s)$ ہو گا۔

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{2}{s+5} - \frac{4}{s+2}$$

یوں اکائی سیڑھی رد عمل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{Y}(s) = \left(\frac{2}{s+5} - \frac{4}{s+2}\right)\frac{1}{s}$$

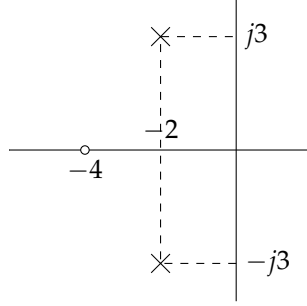
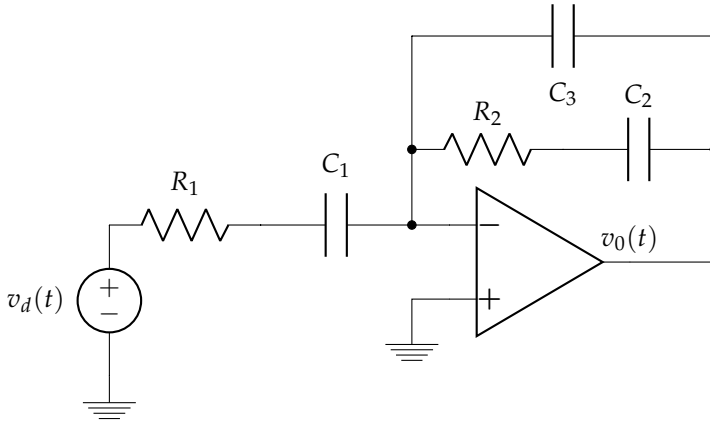
مخلوط تعددی دائرہ کار میں s سے تقسیم سے مراد وقتی دائرہ کار میں تفاعل کا تکمل ہے لہٰذا اکائی سیڑھی رد عمل وقتی دائرہ کار میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t 2e^{-5t} - 4e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{2e^{-5t}}{-5} - \frac{4e^{-2t}}{-2}\right|_0^t \\
&= \left(-\frac{8}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t} + 2e^{-2t}\right)u(t)
\end{aligned}$$

مشق 14.8: اکائی ضرب رد عمل $y(t) = 2\cos 2t + 3\sin 2t$ ہے۔اکائی سیڑھی رد عمل دریافت کریں۔

جواب: $y(t) = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t + \sin 2t\right)u(t)$

مشق 14.9: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+13}$ کے صفر اور قطب حاصل کرتے ہوئے مخلوط سطح پر دکھائیں۔ اس کا اکائی سیڑھی رد عمل بھی حاصل کریں۔

جواب: قطبین اور صفر کو شکل 14.23 میں دکھایا گیا ہے۔ $y(t) = e^{-2t}\left(\cos 3t + \frac{2}{3}\sin 3t\right)u(t)$

شکل 14.23: مشق 14.9 کے قطبین اور صفر۔

شکل 14.24: مشق 14.10 کا دور۔

مشق 14.10: شکل 14.24 کا تبادلی تفاعل $\mathrm{A}_v(s)=\frac{\mathrm{V}_0(s)}{\mathrm{V}_d(s)}$ حاصل کریں۔

جواب:

$$\mathrm{A}_v(s)=-\frac{\frac{1}{R_1C_3\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}}{\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)\left[s+\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)\right]}$$

آپ جانتے ہیں کہ دو رتبی کم قصری جال کا امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2$$

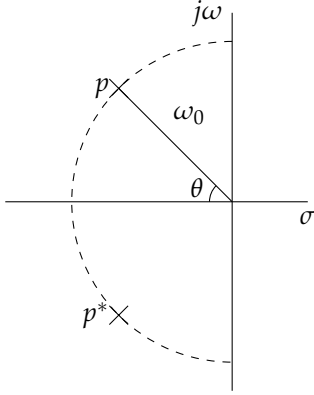
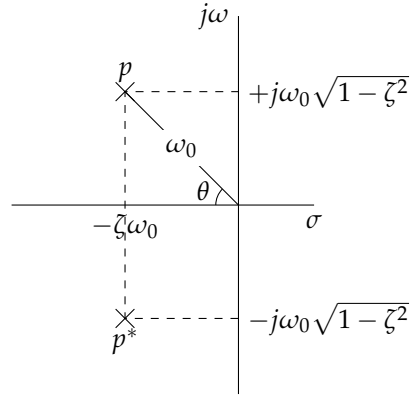
جس کے مخلوط جوڑی دار قطبین

$$\begin{aligned}
s_1&=-\zeta\omega_0-j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\\
s_2&=-\zeta\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}
\end{aligned}$$

کو مخلوط سطح پر شکل 14.25 میں دکھایا گیا ہے۔قطب p کو زاویائی صورت میں لکھتے ہیں۔ محدد کے مبدا $(0,0)$ سے قطب کا فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کرتے ہیں

$$\text{رداس}=\sqrt{(\zeta\omega_0)^2+\left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2}=\omega_0$$

جسے شکل میں ω_0 دکھایا گیا ہے۔اسی طرح زاویہ θ شکل سے دیکھ کر لکھا جا سکتا ہے۔شکل میں تکون کا قاعدہ $\omega_0\zeta$ اور وتر ω_0 ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\cos\theta&=\frac{\omega_0\zeta}{\omega_0}\\
&=\zeta
\end{aligned}$$

(الف) قطب تک رداس ω_0 ہے جبکہ زاویہ $\cos^{-1}\zeta$ ہے۔ (ب) تقصیر تبدیل کرنے سے قطب نقطہ دار دائرے پر حرکت کرتا ہے۔

شکل 14.25: کم قصری، دور تبی جال کے مخلوط جوڑی دار قطبین۔

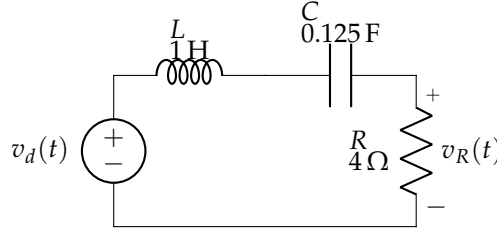
یوں درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{رداس} &= \omega_0 \\ \text{زاویہ} &= \theta = \cos^{-1}\zeta \end{aligned} \tag{14.21}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ محدد کے مبدا سے قطب تک فاصلہ ω_0 کے برابر ہے جبکہ زاویہ $\cos^{-1}\zeta$ ہے۔یوں ζ تبدیل کرنے سے رداس تبدیل نہیں ہوتا البتہ زاویہ تبدیل ہونے سے قطب دائری حرکت کرتا ہے۔شکل-ب میں ζ تبدیل کرنے سے مخلوط جوڑی دار قطبین نقطہ دار دائرے پر حرکت کرتے ہیں۔

14.5 ترسیم قطبین وصفر اور بوڈا خط

ہم تعددی رد عمل پر غور کے دوران بوڈا خطوط پر بحث کر چکے ہیں۔آئیں تبادلی تفاعل کے ترسیم قطبین و صفر اور بوڈا خط کے تعلق پر غور کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم شکل 14.26 میں دیے RLC کا تبادلی تفاعل

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(s) &= \frac{\mathrm{V}_R(s)}{\mathrm{V}_d(s)} \\ &= \frac{\frac{R}{L}s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

شکل 14.26: RLC دور۔

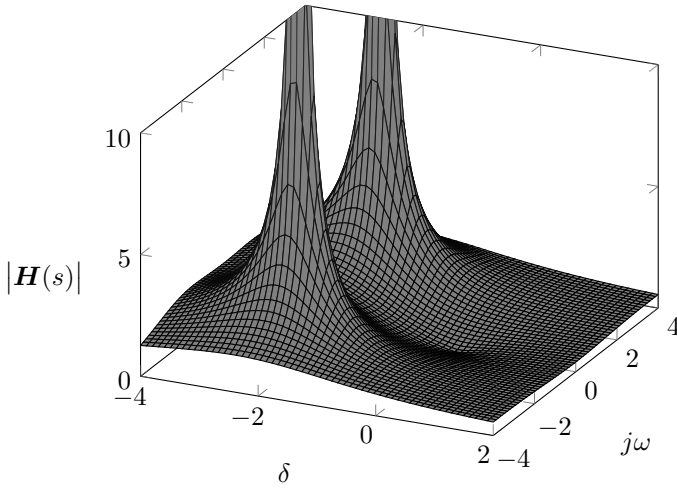
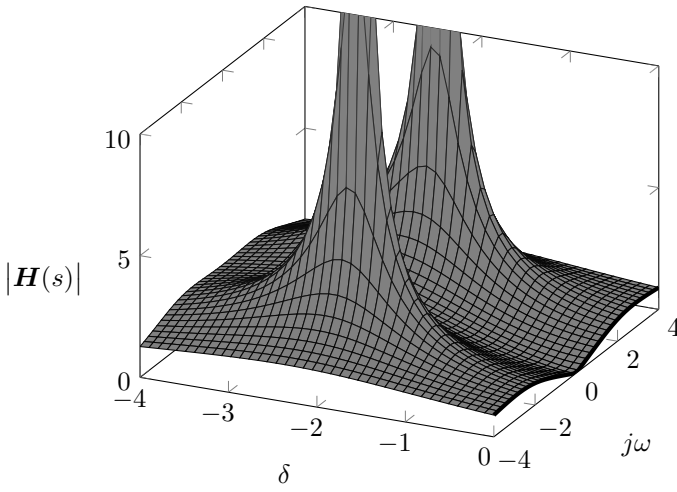
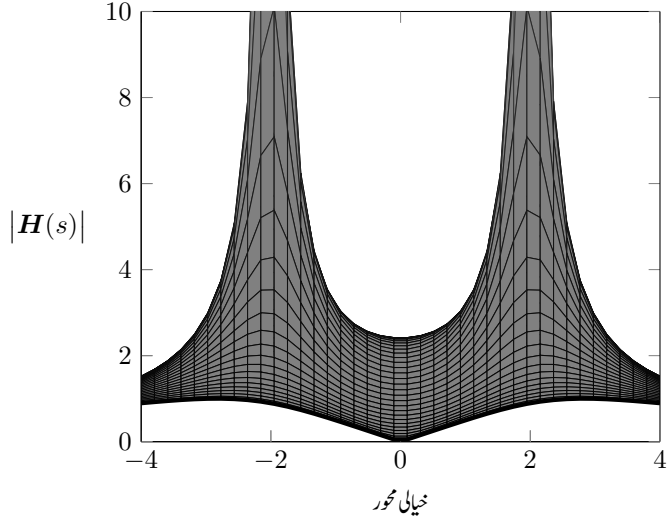
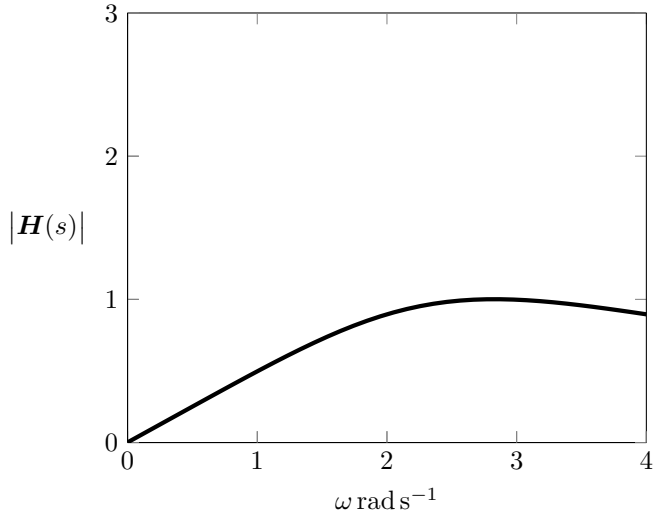
استعمال کریں گے جو پرزوں کی دی گئی قیمتیں پر کرنے سے درج ذیل صورت اختیار کر لیتا ہے۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(s) &= \frac{4s}{s^2+4s+8} \\ &= \frac{4s}{(s+2-j2)(s+2+j2)} \end{aligned} \tag{14.22}$$

درج بالا تبادلی تفاعل کی تین بعدی مقداری ترسیم شکل 14.27 میں دکھائی گئی ہے۔تبادلی تفاعل کا صفر $s=0$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $s=-2\mp j2$ پر قطبین پائے جاتے ہیں۔یوں قطبین پر تین بعدی ترسیم لامتناہی ہو گی جبکہ صفر پر اس کی قیمت صفر ہو گی۔

حقیقی دنیا میں تعدد ω ہوتا ہے نا کہ $\delta+j\omega$ جو کہ مخلوط تعدد ہے۔بوڈا مقداری خط ω بالمقابل مقدار کا خط ہے۔مخلوط سطح کے خیالی محور پر $s=j\omega$ ہوتا ہے لہٰذا مخلوط سطح کے خیالی محور پر بوڈا مقداری خط پایا جاتا ہے۔تین بعدی ترسیم کو $\delta=0$ پر کاٹتے ہوئے شکل 14.28 ملتی ہے جس کے خیالی محور پر بوڈا مقداری خط کو موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.28 کو یوں گھماتے ہیں کہ حقیقی محور صفحہ کتاب کے عمودی ہو۔اس طرح شکل 14.29 ملتا ہے جہاں حقیقی محور کے دونوں جانب برابر فاصلے پر قطبین دیکھے جا سکتے ہیں۔ اس شکل میں حقیقی محور δ کے دونوں جانب بوڈا خط بالکل یکساں ہے لہٰذا ہم خیالی محور کا مثبت حصہ لیتے ہوئے شکل 14.30 حاصل کرتے ہیں جہاں صرف اور صرف خیالی محور پر تفاعل کا مقدار دکھایا گیا ہے۔یہی بوڈا مقداری خط ہے۔

14.6 برقرار حال ردعمل

کسی بھی نظام کے عارضی ردعمل اور برقرار ردعمل کا مجموعہ مکمل ردعمل ہوتا ہے۔عارضی ردعمل $t\to\infty$ پر ختم ہو جاتا ہے جبکہ برقرار ردعمل تمام اوقات پر پایا جاتا ہے۔آئیں برقرار ردعمل کو براہ راست حاصل کرنے کا طریقہ

شکل 14.27: مساوات 14.22 کا تین بعدی ترسیم۔

شکل 14.28: تین بعدی ترسیم کے خیالی محور پر بوڈا خط پایا جاتا ہے۔

شکل 14.29: تین بعدی ترسیم کا حقیقی محور صفحہ کتاب کے عمودی ہے۔

شکل 14.30: تین بعدی ترسیم کے مثبت خیالی محور پر بوڈا مقداری خط پایا جاتا ہے۔

سیکھیں۔آپ جانتے ہیں کہ رد عمل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\mathrm{Y}(s) = \boldsymbol{H}(s)\mathrm{X}(s) \tag{14.23}$$

جہاں $\mathrm{X}(s)$ داخلی اشارہ، $\mathrm{Y}(s)$ رد عمل اور $\boldsymbol{H}(s)$ نظام کا تبادلی تفاعل ہے۔عارضی رد عمل $\boldsymbol{H}(s)$ کے قطبین سے پیدا ہوتا ہے جبکہ برقرار رد عمل داخلی اشارے یعنی جبری تفاعل کے قطبین سے پیدا ہوتا ہے۔

بالکل حصہ 8.3 کی طرح چلتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ داخلی اشارہ مخلوط تفاعل

$$x(t) = X_0 e^{j(\omega_0 t + \theta)} \tag{14.24}$$

ہے جس کا لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{X}(s) = \frac{X_0 e^{j\theta}}{s - j\omega_0}$$

یوں رد عمل

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}(s) &= \boldsymbol{H}(s)\mathrm{X}(s)\\ &= \boldsymbol{H}(s)\left(\frac{X_0 e^{j\theta}}{s - j\omega_0}\right)\end{aligned}$$

ہو گا۔یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ داخلی اشارے میں $\frac{1}{s-j\omega_0}$ نہیں پایا جاتا یعنی اس میں $j\omega_0$ قطب نہیں پایا جاتا۔اگر داخلی اشارے میں $j\omega_0$ قطب پایا جاتا ہو تب ہمیں برقرار حالت دریافت کرنے میں دشواری پیش آتی ہے۔ درج بالا کا جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{K_1}{s - j\omega_0} + \text{تبادلی تفاعل } \boldsymbol{H}(s) \text{ کے قطبین سے پیدا کسر}$$

مستقل K_1 حاصل کرنے کی خاطر مساوات کے دونوں اطراف کو $s - j\omega_0$ سے ضرب دیتے ہوئے $s = j\omega_0$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}K_1 &= \boldsymbol{H}(\omega_0) X_0 e^{j\theta}\\ &= \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\phi_{H0} + \theta)}\end{aligned}$$

یوں جزوی کسری پھیلاو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{\left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\phi_{H0} + \theta)}}{s - j\omega_0} + \cdots$$

جس کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\phi_{H0}+\theta)} e^{j\omega_0 t} + \cdots \\
&= \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\omega_0 t+\phi_{H0}+\theta)} + \cdots
\end{aligned}
$$

درج بالا مساوات میں دیا جزو جبری ردعمل یا برقرار ردعمل ہے جبکہ بقایا اجزاء فطری ردعمل یا عارضی ردعمل کو ظاہر کریں گی۔یوں برقرار حال یا جبری ردعمل درج ذیل ہو گا

$$
y_j(t) = y_{\text{برقرار}}(t) = \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\omega_0 t+\phi_{H0}+\theta)}
$$

جو مخلوط ردعمل ہے۔اصل جبری تفاعل مساوات 14.24 کا حقیقی جزو یعنی $x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$ ہو گا۔اسی طرح اصل برقرار ردعمل درج بالا مساوات کا حقیقی جزو ہو گا یعنی

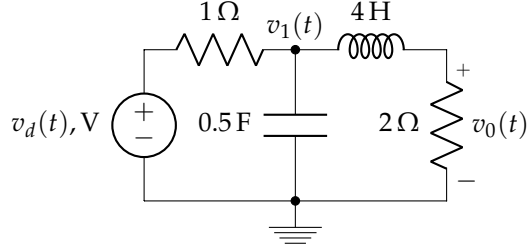
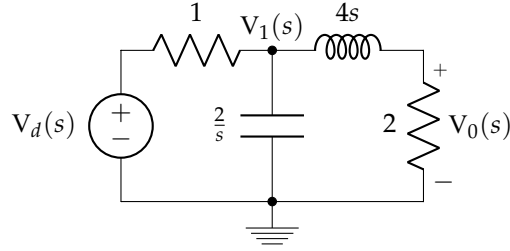
$$
y_j(t) = y_{\text{برقرار}}(t) = \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 \cos(\omega_0 t + \phi_{H0} + \theta) \tag{14.25}
$$

مثال 14.10: شکل 14.31-الف میں برقرار خارجی اشارہ $v_0(t)$ دریافت کریں جہاں $v_d(t) = 10\cos 4t\, u(t)\,\text{V}$ ہے۔

حل: شکل-ب میں لاپلاس بدل دکھایا گیا ہے۔اس دور کو کسی بھی طریقے سے حل کیا جا سکتا ہے۔ہم ترکیب جوڑ سے $\text{V}_1(s)$ حاصل کرتے ہوئے تقسیم دباو کے کلیے سے $\text{V}_0(s)$ حاصل کریں گے۔کرخوف مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$
\frac{\text{V}_1(s) - \text{V}_d(s)}{1} + \frac{\text{V}_1(s)}{\frac{2}{s}} + \frac{\text{V}_1(s)}{4s+2} = 0
$$

جس سے

$$
\begin{aligned}
\text{V}_1(s) &= \frac{\text{V}_d(s)}{1 + \frac{s}{2} + \frac{1}{4s+2}} \\
&= \frac{(4s+2)\text{V}_d(s)}{2s^2 + 5s + 3}
\end{aligned}
$$

(الف)

(ب)

شکل 14.31: مثال 14.10 کا دور۔

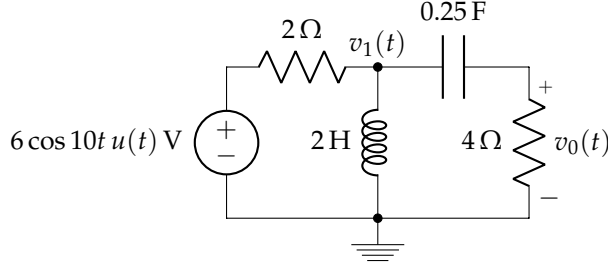
ملتا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے خارجی دباو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= V_1(s)\left(\frac{2}{4s+2}\right)\\
&= \frac{(4s+2)V_d(s)}{2s^2+5s+3}\left(\frac{2}{4s+2}\right)\\
&= \frac{2V_d(s)}{2s^2+5s+3}
\end{aligned}$$

مساوات 14.23 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے تبادلی تفاعل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{2}{2s^2+5s+3}$$

دی گئی داخلی اشارے کی تعدد $\omega_0 = 4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا اس تعدد پر تبادلی تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(j4) &= \frac{2}{2(j4)^2+5(j4)+3}\\
&= 0.057\underline{/214.6^\circ}
\end{aligned}$$

شکل 14.32: مشق 14.11 کا دور۔

یوں مساوات 14.25 سے برقرار ردعمل لکھی جا سکتی ہے۔

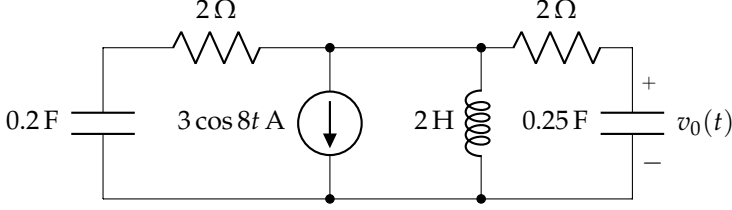
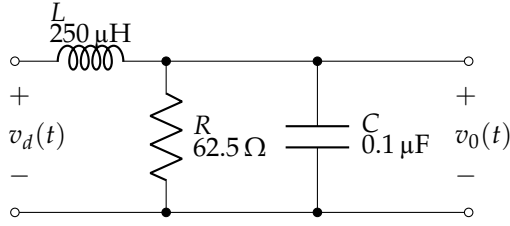
$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= 10(0.057)\cos(4t + 214.6^\circ) \\
&= 0.57\cos(4t + 214.6^\circ)\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

مکمل ردعمل

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}_0(s) &= \frac{2\mathrm{V}_d(s)}{2s^2 + 5s + 3} \\
&= \frac{20s}{(s^2 + 4^2)(2s^2 + 5s + 3)}
\end{aligned}
$$

کے الٹ لاپلاس بدل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مشق 14.11: شکل 14.32 کا برقرار ردعمل حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = 3.99\cos(10t + 7.6^\circ)u(t)\,\mathrm{V}$

شکل 14.33: مشق 14.12 کا دور۔

شکل 14.34: مثال 14.11 کا دور۔

مشق 14.12: شکل 14.33 کا برقرار ردعمل حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = 0.768\cos(8t + 92^\circ)u(t)\ \mathrm{V}$

مثال 14.11: شکل 14.34 میں پست گزار چھلنی دکھائی گئی ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے دیکھا گیا کہ مستطیل داخلی دباو پر خارجی دباو درکار قیمت سے تجاوز کرتے ہوئے آگے نکل جاتا ہے جو کم تقصیر کی نشانی ہے۔ تقصیر بڑھاتے ہوئے اس مسئلے کو حل کریں۔

حل: متوازی جڑے برق گیر اور مزاحمت کی رکاوٹ $\frac{R}{1+sRC}$ لیتے ہوئے تقسیم دباو کے کلیے سے چھلنی کا تبادلی

تفاعل لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(s) &= \frac{\frac{R}{1+sRC}}{sL+\frac{R}{1+sRC}}\\
&= \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}\\
&= \frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}
\end{aligned}
$$

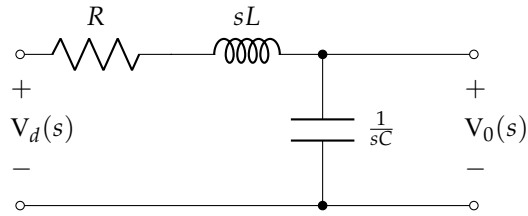
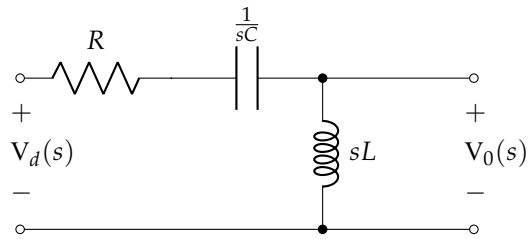
پرزوں کی دی گئی قیمتیں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

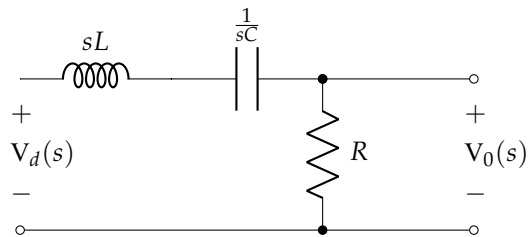
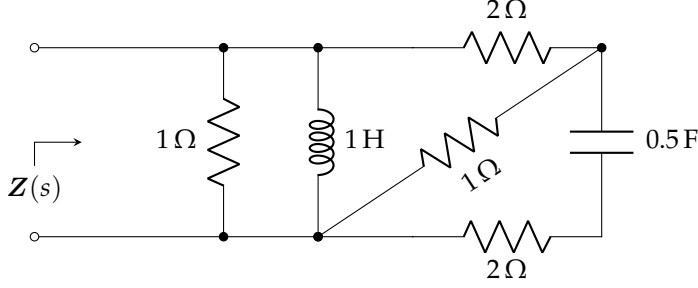
$$
\boldsymbol{H}(s) = \frac{4\times 10^{10}}{s^2+1.6\times 10^5 s+4\times 10^{10}}
$$

یعنی $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 200\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور $\zeta = \frac{160000}{2\times 200000} = 0.4$ ہیں۔یقیناً تقصیری مستقل کی قیمت نہایت کم ہے جس کو بڑھا کر $\zeta = 1$ کرنے سے ہمارا مسئلہ حل ہو سکتا ہے۔تعدد کو تبدیل کئے بغیر ایسا مزاحمت کو تبدیل کرنے سے ہو گا۔مزاحمت کی نئی قیمت $2\zeta\omega_0 = \frac{1}{RC}$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{2\zeta\omega_0 C}\\
&= \frac{1}{2\times 1\times 2\times 10^5\times 0.1\times 10^{-1}}\\
&= 25\,\Omega
\end{aligned}
$$

یوں مزاحمت کو تبدیل کرتے ہوئے $62.5\,\Omega$ کی جگہ $25\,\Omega$ نسب کرنے سے خارجی اشارہ درکار حد سے آگے گزرنا بند کر دیگا۔

مشق 14.13: شکل میں سلسلہ وار RLC دکھایا گیا ہے۔خارجی اشارہ مختلف پرزوں کے متوازی حاصل کرتے ہوئے اس دور کو بطور پست گزار، بلند گزار اور پٹی گزار چھلنی استعمال کیا جا سکتا ہے۔تینوں کے تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s) = \frac{V_0(s)}{V_d(s)}$ لکھیں۔

(الف) پست گزار چھلنی۔

(ب) بلند گزار چھلنی۔

(پ) پٹی گزار چھلنی۔

شکل 14.36: سوال 14.1 کا دور۔

جوابات:

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \quad \text{پست گزار}$$

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{s^2}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \quad \text{بلند گزار}$$

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{\frac{R}{L}s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}} \quad \text{پٹی گزار}$$

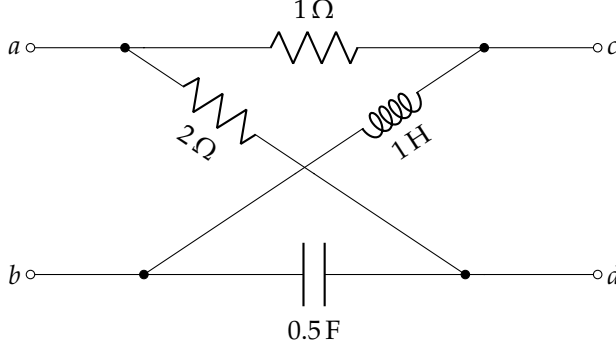
سوالات

سوال 14.1: شکل 14.36 کی داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}(s)$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s)=\frac{2s(4s+3)}{11s^2+16s+6}$

سوال 14.2: شکل 14.37 میں c اور d کو کھلے سر رکھتے ہوئے a اور b کے مابین رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s)=\frac{2s+2}{s+2}$

سوال 14.3: شکل 14.37 میں c اور d کو آپس میں قصر دور کرتے ہوئے a اور b کے مابین رکاوٹ دریافت کریں۔

شکل 14.37: سوال 14.2 اور سوال 14.3 کا دور۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s) : \frac{2s^2+6s+4}{3s^2+6}$

سوال 14.4: شکل 14.38-الف میں $v_C(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_C(t) = [5 - 5e^{-\frac{4}{3}t}]\,u(t)\,\text{V}$

سوال 14.5: شکل 14.38-الف میں $v_L(t)$ حاصل کریں۔

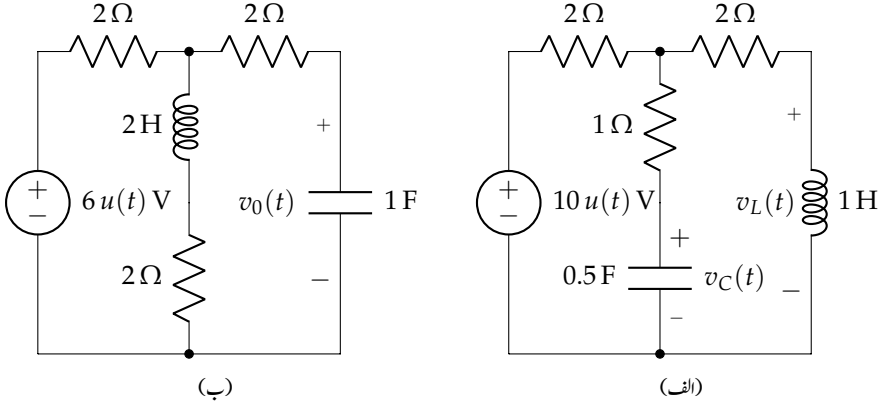
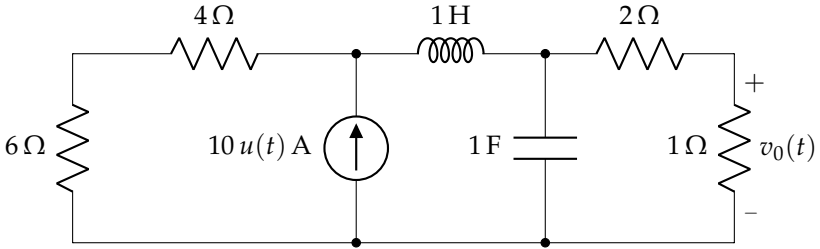
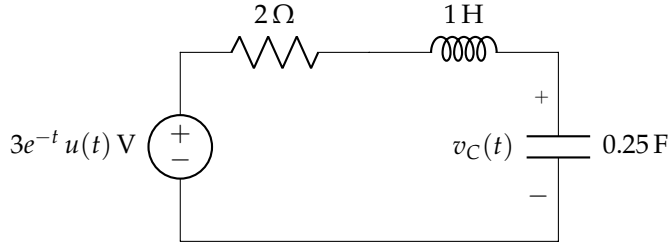
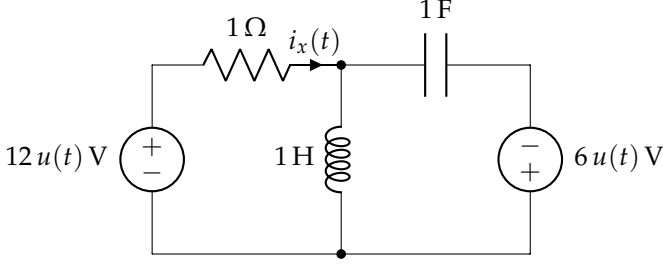
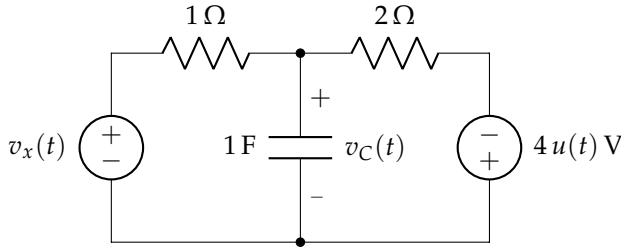
جواب: $v_L(t) = \frac{10}{3}e^{-\frac{4}{3}t}\,u(t)\,\text{V}$

سوال 14.6: شکل 14.38-ب میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{17}}\left[6\sqrt{17} - (9+3\sqrt{17})e^{-\frac{7}{8}t} + (9-3\sqrt{17})e^{-\left(\frac{7+\sqrt{17}}{8}\right)t}\right]u(t)$

سوال 14.7: شکل 14.39 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = \frac{100}{13}[1 - e^{-\frac{31}{6}t}(\cosh\frac{\sqrt{805}t}{6} + \frac{31}{\sqrt{805}}\sinh\frac{\sqrt{805}t}{6})]\,u(t)\,\text{V}$

سوال 14.8: شکل 14.40 میں $v_C(t)$ حاصل کریں۔

شکل 14.38: سوال 14.4 تا سوال 14.6 کے ادوار۔

شکل 14.39: سوال 14.7 کا دور۔

شکل 14.40: سوال 14.8 کا دور۔

شکل 14.41: سوال 14.9 کا دور۔

شکل 14.42: سوال 14.10 کا دور۔

جواب: $v_C(t) = 4e^{-t}(1-\cos\sqrt{3}t)\,u(t)\,\mathrm{V}$

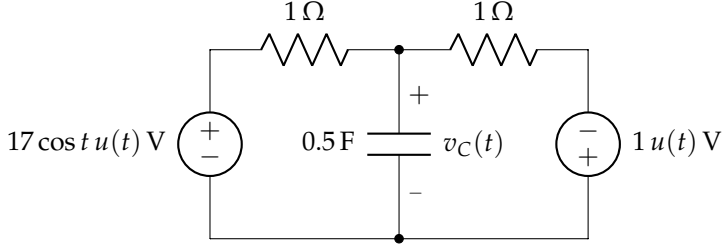
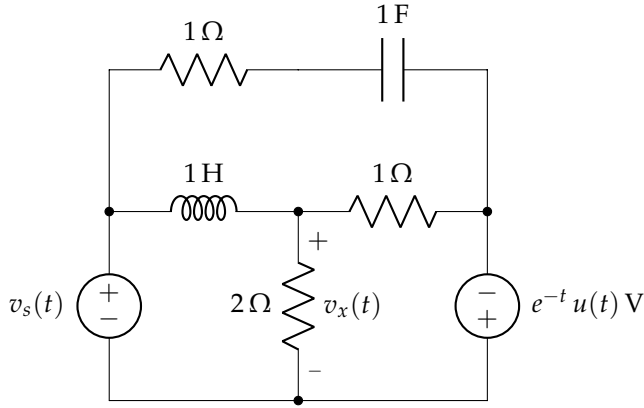
سوال 14.9: شکل 14.41 میں $i_x(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $i_x(t) = [12 - e^{-\frac{t}{2}}(10\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2} - 6\cos\frac{\sqrt{3}t}{2})]\,u(t)\,\mathrm{A}$

سوال 14.10: شکل 14.42 میں $v_x = 8\,u(t)\,\mathrm{V}$ ہے۔آپ سے گزارش ہے کہ $v_C(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_C(t) = 4(1-e^{-\frac{3}{2}t})\,u(t)\,\mathrm{V}$

سوال 14.11: شکل 14.42 میں $v_x = 8e^{-t}\,u(t)\,\mathrm{V}$ ہے۔ $v_C(t)$ حاصل کریں۔

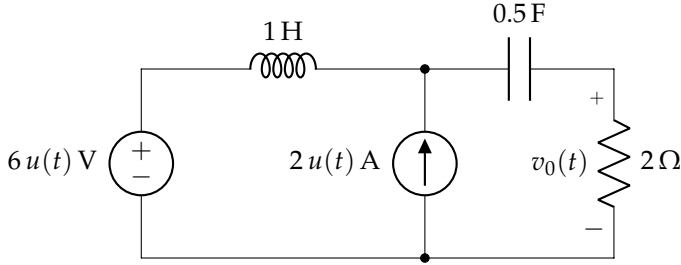
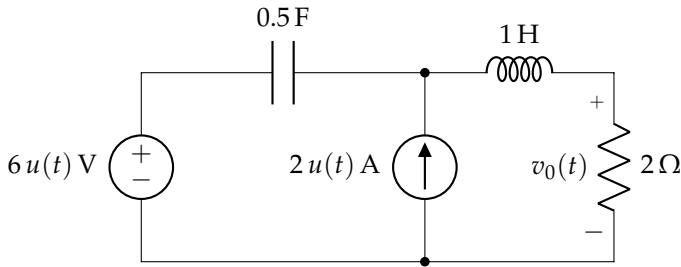
جواب: $v_C(t) = \left(16e^{-t} - \frac{44}{3}e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{4}{3}\right)\,u(t)\,\mathrm{V}$

شکل 14.43: سوال 14.12 کا دور۔

شکل 14.44: سوال 14.13 کا دور۔

سوال 14.12: شکل 14.43 میں $v_C(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_C(t) = \left(8\cos t + 2\sin t - 7.5e^{-4t} - 0.5\right)\, u(t)\,\mathrm{V}$

سوال 14.13: شکل 14.44 میں $v_s(t) = 4\,u(t)\,\mathrm{V}$ ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ $v_x(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_x(t) = [4 - 2e^{-t} - \frac{8}{3}e^{-\frac{2}{3}t}]\, u(t)\,\mathrm{V}$

سوال 14.14: شکل 14.44 میں $v_s(t) = 4e^{-2t}\, u(t)\,\mathrm{V}$ ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ $v_x(t)$ حاصل کریں۔

شکل 14.45: سوال 14.15 کا دور۔

شکل 14.46: سوال 14.16 کا دور۔

جواب: $v_x(t) = [\frac{10}{3}e^{-\frac{2}{3}t} - 2e^{-t} - 2e^{-2t}]\, u(t)\,\mathrm{V}$

سوال 14.15: شکل 14.45 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

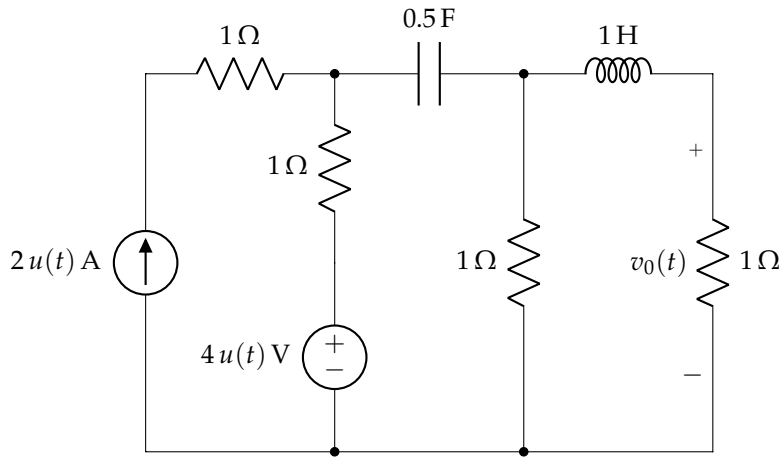
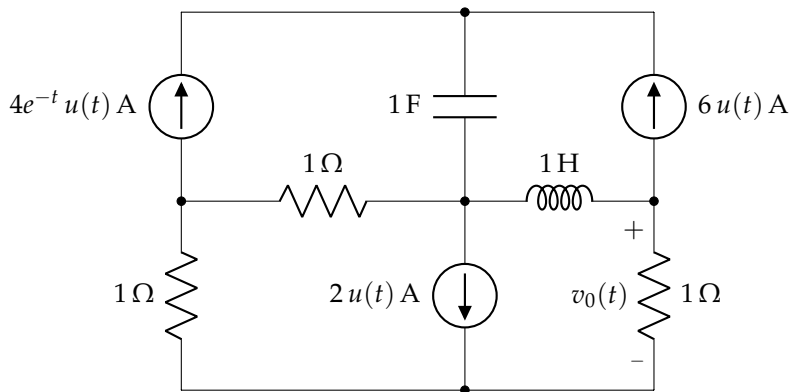
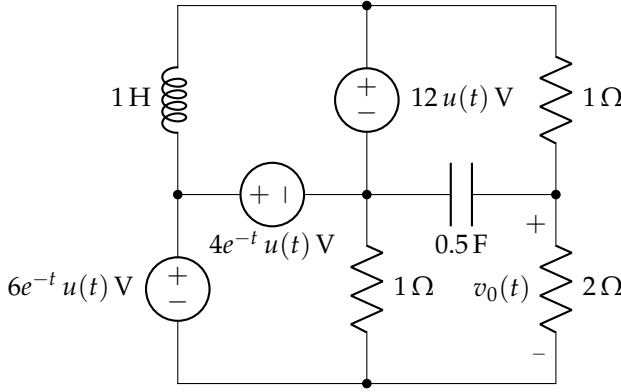
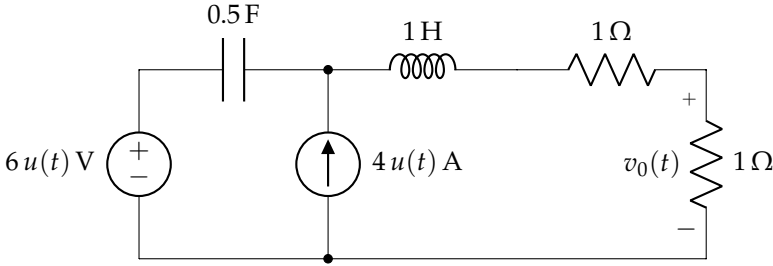
جواب: $v_0(t) = e^{-t}(4\cos t + 8\sin t)\, u(t)\,\mathrm{V}$

سوال 14.16: شکل 14.46 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = [4 - e^{-t}(4\cos t - 8\sin t)]\, u(t)\,\mathrm{V}$

سوال 14.17: شکل 14.47 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = \frac{12}{\sqrt{15}}e^{-\frac{7}{4}t}\sin\frac{\sqrt{15}t}{4}\, u(t)\,\mathrm{V}$

سوال 14.18: شکل 14.48 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

شکل 14.47: سوال 14.17 کا دور۔

شکل 14.48: سوال 14.18 کا دور۔

شکل 14.49: سوال 14.19 کا دور۔

شکل 14.50: سوال 14.20 کا دور۔

جواب: $v_0(t) = [2e^{-t} - \frac{22}{3}e^{-3t} - \frac{2}{3}]\, u(t)\,\mathrm{V}$

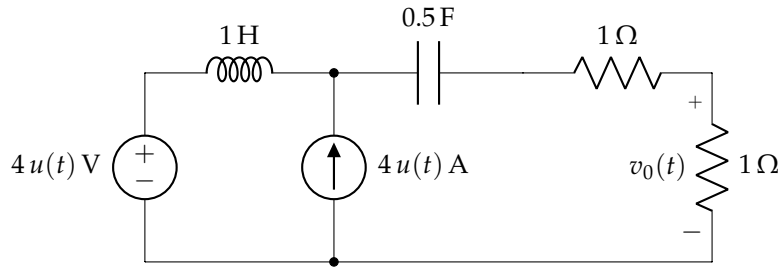
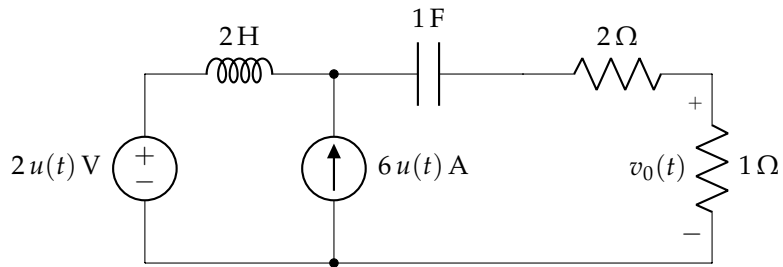
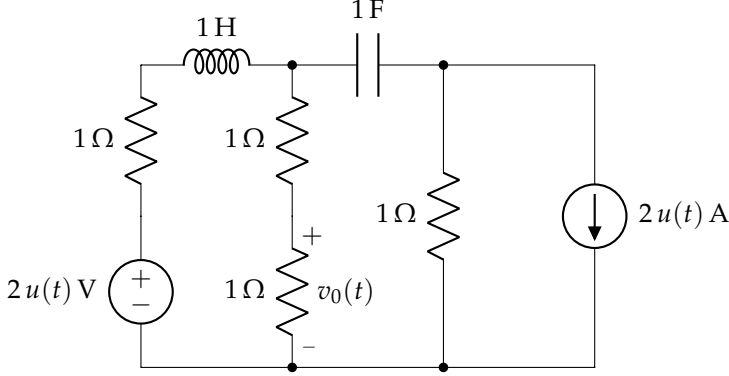
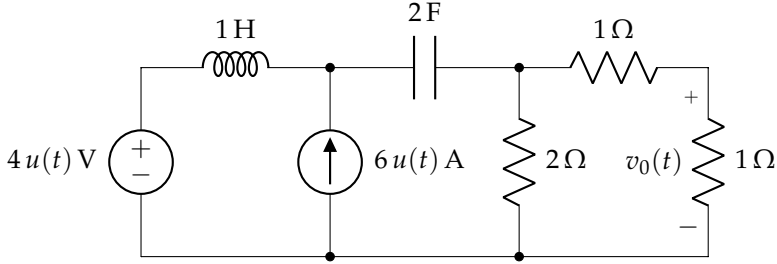
سوال 14.19: شکل 14.49 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = (e^{-t} - 7e^{-3t} + 8)\, u(t)\,\mathrm{V}$

سوال 14.20: شکل 14.50 میں مسئلہ خطی میل سے $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = [4 - e^{-t}(4\cos t - 2\sin t)]\, u(t)\,\mathrm{V}$

سوال 14.21: شکل 14.51 میں مسئلہ خطی میل سے $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = 4e^{-t}\cos t\,(t)\,\mathrm{V}$

شکل 14.51: سوال 14.21 کا دور۔

شکل 14.52: سوال 14.22 کا دور۔

شکل 14.53: سوال 14.23 کا دور۔

شکل 14.54: سوال 14.24 کا دور۔

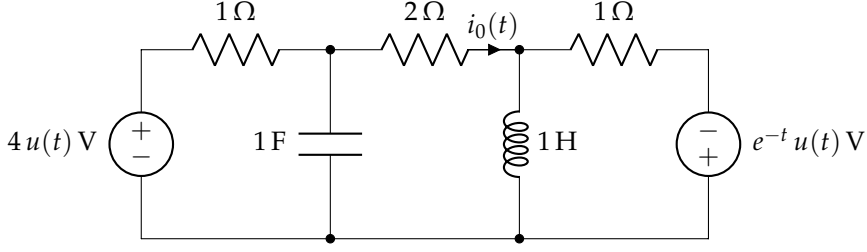
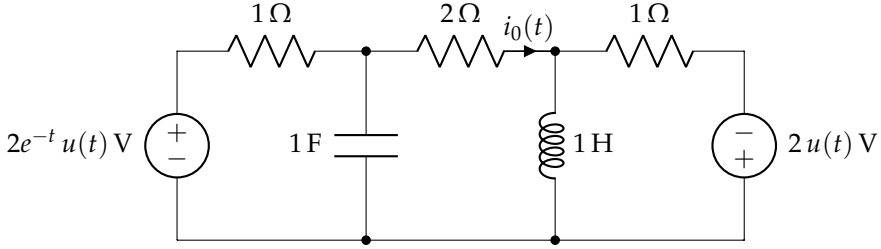
سوال 14.22: شکل 14.52 کو تبادلہ منبع سے حل کرتے ہوئے $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = (10e^{-t} - 4e^{-0.5t})\,u(t)\,\text{V}$

سوال 14.23: شکل 14.53 کو تبادلہ منبع سے حل کرتے ہوئے $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^{-\frac{t}{2}})\,u(t)\,\text{V}$

سوال 14.24: شکل 14.54 کو مسئلہ تھونن سے حل کرتے ہوئے $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = e^{-\frac{t}{2}}(3\cos\frac{t}{2} + \sin\frac{t}{2})\,u(t)\,\text{V}$

شکل 14.55: سوال 14.25 کا دور۔

شکل 14.56: سوال 14.26 کا دور۔

سوال 14.25: شکل 14.55 کو مسئلہ تھونن سے حل کرتے ہوئے $i_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $i_0(t) = (\frac{1}{3}te^{-t} + e^{-t} - \frac{4}{3})\,u(t)$ A

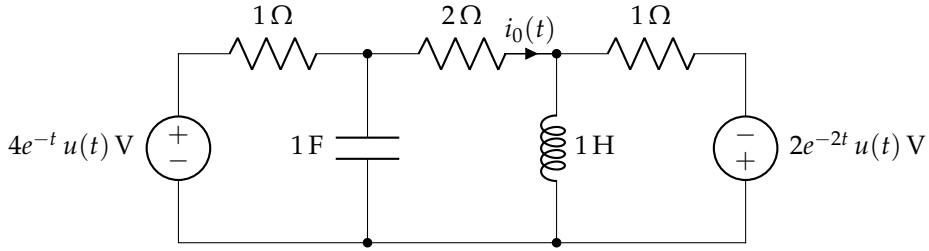
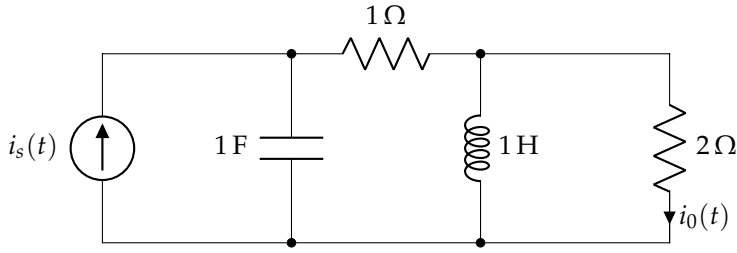
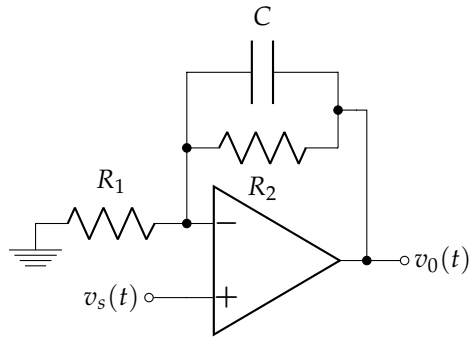
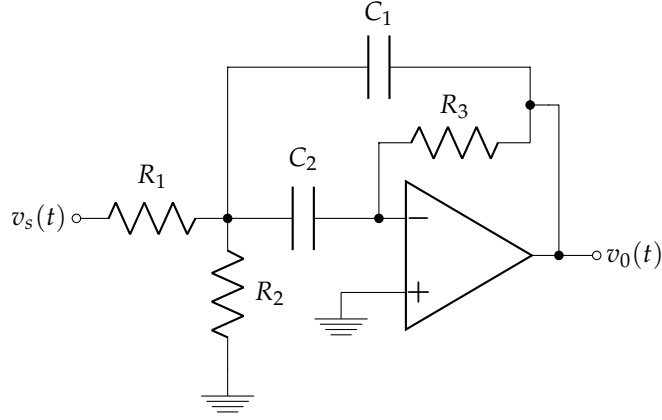
سوال 14.26: شکل 14.56 کو مسئلہ تھونن سے حل کرتے ہوئے $i_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $i_0(t) = -\frac{2}{3}e^{-t}(t+1)\,u(t)$ A

سوال 14.27: شکل 14.57 کو مسئلہ تھونن سے حل کرتے ہوئے $i_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $i_0(t) = (-\frac{4}{3}te^{-t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{-2t})\,u(t)$ A

سوال 14.28: شکل 14.58 کا تبادلی تفاعل $\frac{I_0(s)}{I_s(s)}$ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{I_0(s)}{I_s(s)} = \frac{s}{3s^2+3s+2}$

شکل 14.57: سوال 14.27 کا دور۔

شکل 14.58: سوال 14.28 کا دور۔

شکل 14.59: سوال 14.29 کا دور۔

شکل 14.60: سوال 14.30 کا دور۔

سوال 14.29: شکل 14.59 کا تبادلی تفاعل $\frac{V_0(s)}{V_s(s)}$ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{V_0(s)}{V_s(s)} = \frac{\frac{1}{R_1 C}}{s+\frac{1}{R_2 C}}$

سوال 14.30: شکل 14.60 کا تبادلی تفاعل $\frac{V_0(s)}{V_s(s)}$ حاصل کریں۔

جواب: $\frac{V_0(s)}{V_s(s)} = \frac{-sR_2R_3C_2}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2+sR_1R_2(C_1+C_2)+R_1+R_2}$

باب 15

فوریئر تجزیہ

15.1 تکونیاتی فوریئر تسلسل

دوری تفاعل[1] سے مراد وہ تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں T_0 **دوری عرصہ**[2] کہلاتی ہے۔

$$f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \cdots \tag{15.1}$$

درج بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی لمحہ t پر دوری تفاعل کی قیمت $f(t)$ اور اس لمحے سے T_0 وقت بعد تفاعل کی قیمت $f(t + T_0)$ برابر ہیں۔ شکل 15.1 میں اس کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری عرصے کو سیکنڈ (s) میں ناپا جاتا ہے۔ دوری عرصہ T_0 اور تعدد f_0 کا تعلق درج ذیل ہے جہاں تعدد کو ہرٹز[3] (Hz) میں ناپا جاتا ہے۔

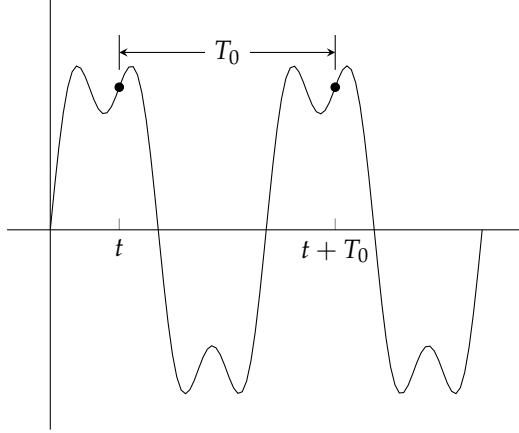
$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{15.2}$$

زاویائی تعدد ω_0 اور تعدد f_0 کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{15.3}$$

زاویائی تعدد کو ریڈیئن فی سیکنڈ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$ میں ناپا جاتا ہے۔ شکل 15.2 میں چند **دوری امواج**[4] دکھائے گئے ہیں۔

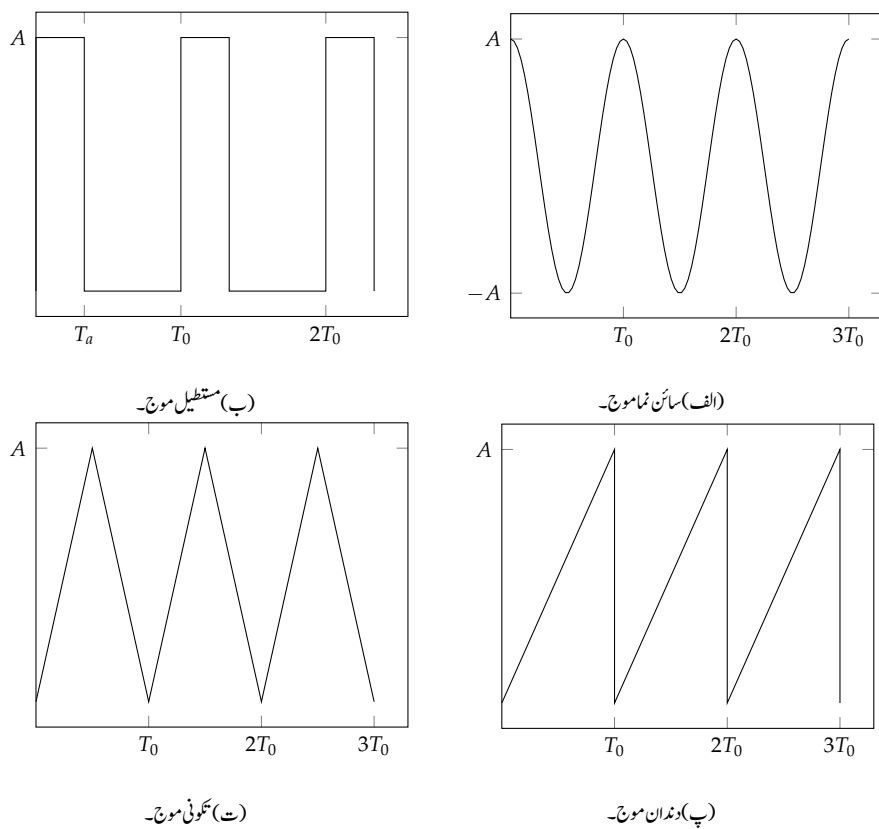
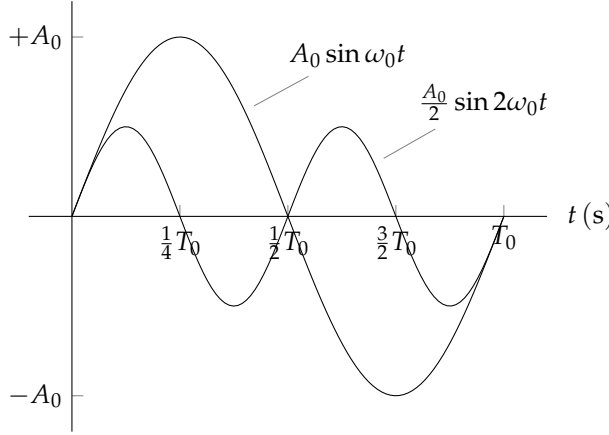
---

[1] periodic function
[2] time period
[3] Hertz, Hz
[4] periodic wave

شکل 15.1: دوری عرصہ۔

کسی بھی دوری تفاعل کو بطور درج ذیل (تکونیاتی) فوریئر تسلسل[5] لکھا[6] جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\
&= a_0 + a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \cdots \\
&\quad + b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \cdots
\end{aligned} \tag{15.4}
$$

جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، b_1 وغیرہ تسلسل کے عددی سر[7] کہلاتے ہیں۔ فوریئر تسلسل کی اوسط قیمت a_0 کے برابر ہے۔ ایک دوری عرصہ T_0 میں $\cos\omega_0 t$ یا $\sin\omega_0 t$ کی ایک لہر، $\cos(2\omega_0 t)$ یا $\sin(2\omega_0 t)$ کی دو لہریں اور $\cos(m\omega_0 t)$ یا $\sin(m\omega_0 t)$ کی m لہریں پوری آتی ہیں۔ اس حقیقت کو شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے جہاں وضاحت کی خاطر امواج کے حیطے مختلف رکھے گئے ہیں۔ فوریئر تسلسل میں $a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \sin\omega_0 t$ بنیادی رکن[8] یا پہلا ہارمونی رکن کہلاتا ہے، $a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t)$ دوسرا ہارمونی رکن[9] کہلاتا ہے، $a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t)$ تیسرا ہارمونی رکن اور اسی طرح $a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t)$ ایم ہارمونی رکن کہلاتا ہے۔ ہم یہاں اصل رک کر چند حقائق اور تکملات پر غور کرتے ہیں جو فوریئر تسلسل میں کلیدی

[5] trignometric Fourier series
[6] ژاں باپٹیسٹ یوسف فوریئر نے حرارتی توانائی کے بہاو پر غور کے دوران اس تسلسل کو دریافت کیا۔
[7] coefficients
[8] fundamental component
[9] second harmonic

شکل 15.2: چند دوری امواج۔

شکل 15.3: ایک دوری عرصہ میں فوریئر تسلسل کے ارکان کی تعداد۔

کردار ادا کرتے ہیں۔

آپ دو سمتیوں کے نقطہ ضرب[10] سے خوب واقف ہیں۔ سمتیہ **A** اور **B** کا نقطہ ضرب یا غیر سمتی ضرب[11] درج ذیل ہے جہاں دونوں سمتیوں کے مابین زاویہ θ ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB \cos\theta \tag{15.5}$$

آپس میں عمودی[12] سمتیوں کے مابین $\theta = 90°$ ہونے کی بدولت $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہوتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کے خود نقطہ ضرب کا جذر اس کے حیطے کے برابر ہوتا ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} \tag{15.6}$$

اسی سوچ کے ساتھ تفاعل کا نقطہ ضرب بیان کیا جاتا ہے۔

اگر تفاعل $f(t) \neq 0$ اور $g(t) \neq 0$ کے حاصل ضرب کا تکمل $a \leq t \leq b$ فاصلے پر صفر کے برابر ہو

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{15.7}$$

تو $a \leq t \leq b$ فاصلے پر ان تفاعل کو آپس میں عمودی تصور کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ دونوں تفاعل از خود غیر سمتی[13] اور غیر صفر ہیں۔

---

dot product[10]
scalar product[11]
orthogonal[12]
scalar[13]

کسی بھی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے لہٰذا تفاعل کا مربع $f^2(t)$ ہر نقطے پر مثبت ہو گا۔ فاصلہ $a \le t \le b$ پر تفاعل کے معیار[14] $\| f(t) \|$ سے مراد

$$\| f(t) \| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) \, \mathrm{d}t} \tag{15.8}$$

ہے۔

مثال 15.1: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\cos(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں لیکن $m \ne n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] + \cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0} \\
&= \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \\
&\qquad - \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \ne n) \tag{15.9}$$

---

[14] norm

مثال 15.2: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\sin(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0} \\
&= \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \\
&\quad - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.10}$$

مثال 15.3: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]\mathrm{d}t\\ &= -\frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\Bigg|_0^{T_0}\\ &= -\frac{\cos[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\\ &\quad + \frac{\cos[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\cos[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\cos(m+n)2\pi = 1$ اور $\cos(m-n)2\pi = 1$ ہوں گے۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.11}$$

مثال 15.4: تفاعل $f(t) = \cos(m\omega_0 t)$ کا معیار $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر حاصل کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر معیار کو تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\| f(t) \|^2 &= \int_0^{T_0} \cos^2\left(m\frac{2\pi}{T_0}t\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \left[1+\cos\left(2m\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right] \mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{t}{2} + \frac{\sin\left(2m\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{4m\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0} \\
&= \frac{T_0}{2} + \frac{\sin 4m\pi}{4m\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4m\frac{2\pi}{T_0}} \\
&= \frac{T_0}{2}
\end{aligned}
$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر معیار ملتا ہے۔

$$
\| \cos(m\omega_0 t) \| = \sqrt{\int_0^{T_0} \cos^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T_0}{2}} \tag{15.12}
$$

مشق 15.1: تفاعل $f(t) = \sin m\omega_0 t$ کا معیار $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر درج ذیل ہے جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔ اس معیار کو حاصل کریں۔

$$
\| \sin(m\omega_0 t) \| = \sqrt{\int_0^{T_0} \sin^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T_0}{2}} \tag{15.13}
$$

مشق 15.2: درج ذیل دو مساوات کو ثابت کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{15.14}$$

$$\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{15.15}$$

مساوات 15.9، مساوات 15.10 اور مساوات 15.11 مل کر ثابت کرتے ہیں کہ فوریئر تسلسل میں استعمال ہونے والا ہر تفاعل بقایا تمام تفاعل کے ساتھ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر عمودی ہے۔یوں $\cos(3\omega_0 t)$ کو مثال بناتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $\cos\omega_0 t$ ، $\cos(2\omega_0 t)$ ، $\cos(4\omega_0 t)$ ، $\sin\omega_0 t$ ، $\sin(2\omega_0 t)$ ، $\sin(3\omega_0 t)$ وغیرہ کے ساتھ عمودی ہے۔

درج بالا تکملات حاصل کرنے کے بعد اصل مضمون یعنی فوریئر تسلسل پر دوبارہ آتے ہیں۔مساوات 15.9 تا مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.4 کے عددی سر $a_0, a_1, a_2, b_1, \cdots$ حاصل کئے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسا ہی کریں۔

عددی سر a_0 کی قیمت دریافت کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.4 کا تکمل $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر لیتے ہیں

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} a_0\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\ &= a_0 T_0\end{aligned}$$

جہاں مساوات 15.14 اور مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مجموعے میں دیے تمام تکمل کو صفر کے برابر پر کیا گیا ہے۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{15.16}$$

مساوات 15.16 کہتا ہے کہ a_0 تفاعل $f(t)$ کی اوسط قیمت ہے۔

عددی سر a_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\cos(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے ایک دوری عرصے پر تکمل کرتے ہیں۔ہم تکمل کو $0 \le t \le T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \\ \int_0^{T_0} a_0\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n\cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n\sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.17}$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمل مساوات 15.14 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت تیسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔آئیں دوسرے تکمل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n\cos n\omega_0 t\cos m\omega_0 t\,\mathrm{d}t = \\ \int_0^{T_0}\cos(m\omega_0 t)\,\big[a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots \\ + a_{m-1}\cos[(m-1)\omega_0 t] + a_m\cos(m\omega_0 t) + \cdots\big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.9 کے تحت تکمل صفر کے برابر ہو گا۔البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.12 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} a_m\cos^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = a_m\frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \tag{15.18}$$

عددی سر b_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\sin(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے

ہوئے ایک دوری عرصے پر تکمل کرتے ہیں۔ہم تکمل کو $0 \le t \le T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0} a_0 \sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n\cos(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.19}$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمل مساوات 15.15 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت دوسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔آئیں تیسرے تکمل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n\sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0}\sin(m\omega_0 t)\left[b_1\sin\omega_0 t + b_2\sin(2\omega_0 t)+\cdots\right. \\ &\quad \left. +b_{m-1}\sin[(m-1)\omega_0 t] + b_m\sin(m\omega_0 t)+\cdots\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.10 کے تحت تکمل صفر کے برابر ہو گا۔البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.13 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} b_m \sin^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = b_m\frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \tag{15.20}$$

مساوات 15.16، مساوات 15.18 اور مساوات 15.20 فوریئر تکمل کے عددی سر دیتے ہیں۔انہیں یہاں اکٹھے پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ a_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ b_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.21}$$

مثال 15.5: شکل 15.4-الف میں دکھائے گئے دندانی موج کا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔دو، پانچ اور پچاس فوریئر ارکان استعمال کرتے ہوئے موج کا خط کھینچیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موج کا دوری عرصہ $T_0 = 3\,\mathrm{s}$ ہے۔

حل: شکل میں دکھائی گئی موج $(0,0)$ سے $(3,1)$ تک بالکل سیدھی لکیر کی مانند ہے جس کی ڈھلوان

$$\text{ڈھلوان} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

ہے لہٰذا اس سیدھے حصے کی مساوات درج ذیل لکھی جا سکتی ہے جہاں لکیر پر کسی بھی نقطے کے کارتیسی محدد مساوات میں پر کرنے سے c کی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$y = \frac{x}{3} + c$$

ہم درج بالا میں $(0,0)$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{0}{3} + c$$

$c = 0$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا سیدھی حصے کی مساوات $y = \frac{x}{3}$ یعنی

$$f(t) = \frac{t}{3} \tag{15.22}$$

ہے جہاں کارتیسی نظام کے x محور پر t اور y محور پر $f(t)$ پر کئے گئے ہیں۔

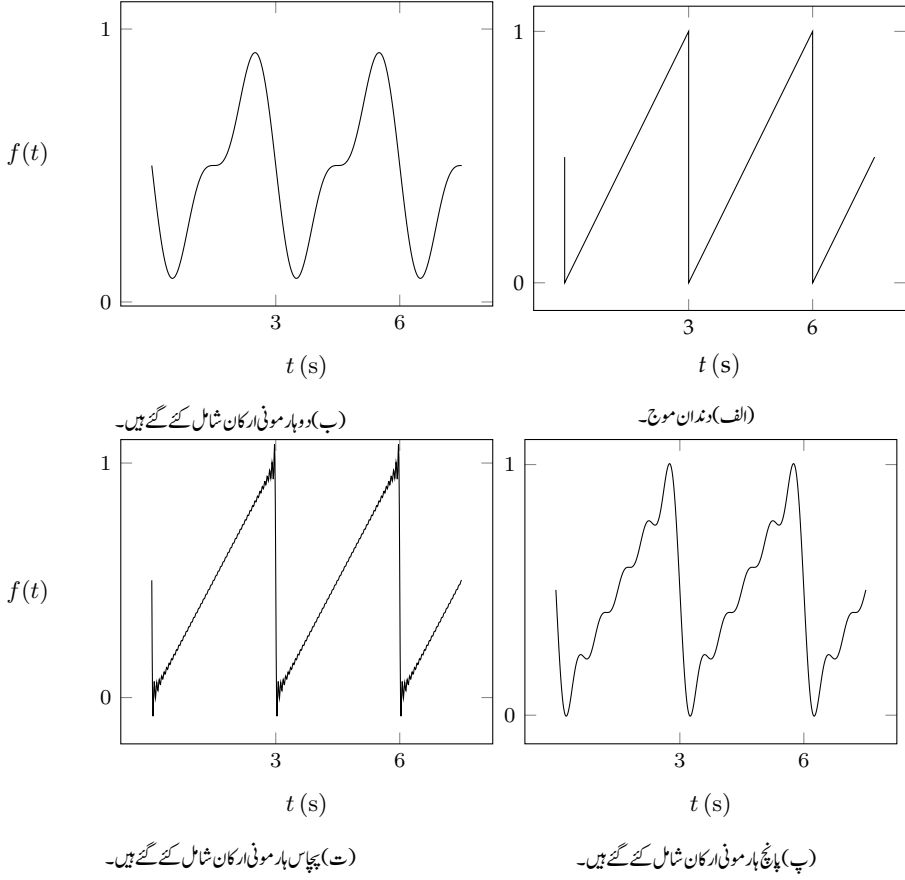
مساوات 15.21 سے فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{3} \frac{t}{3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\frac{t^2}{6}\bigg|_0^3 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(الف) دندان موج۔

(ب) دو ہارمونی ارکان شامل کئے گئے ہیں۔

(پ) پانچ ہارمونی ارکان شامل کئے گئے ہیں۔

(ت) پچاس ہارمونی ارکان شامل کئے گئے ہیں۔

شکل 15.4: مثال 15.5 کی دندان موج۔

چونکہ a_0 تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہے لٰہذا یہی جواب تکون کے رقبہ $\frac{3}{2} = 1 \times 3 \times \frac{1}{2}$ اور قاعدہ 3 سے حاصل کی جا سکتی ہے یعنی

$$\text{اوسط} = \frac{\text{رقبہ}}{\text{قاعدہ}} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

عددی سر a_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{t}{3}\cos(m\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{2}{9}t\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}mt)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2}{9}\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}mt)}{\left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2}\right|_0^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

اس کا مطلب ہے کہ دندان موج کی فوریئر تسلسل میں کوئی کوسائن تفاعل نہیں پایا جاتا۔

عددی سر b_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{t}{3}\sin(m\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left.-\frac{2}{9}t\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}mt)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2}{9}\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}mt)}{\left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2}\right|_0^3 \\
&= -\frac{1}{m\pi}
\end{aligned}$$

یوں $m = 1, 2, 3, \cdots$ پر کرتے ہوئے عددی سر حاصل ہوتے ہیں یعنی

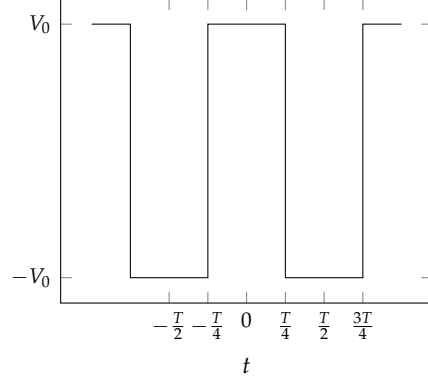
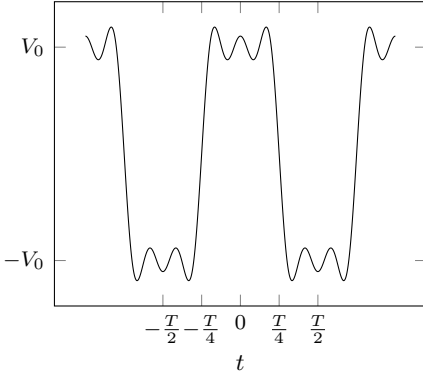
$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{\pi} \\ b_2 &= -\frac{1}{2\pi} \\ b_3 &= -\frac{1}{3\pi} \\ &\vdots \end{aligned}$$

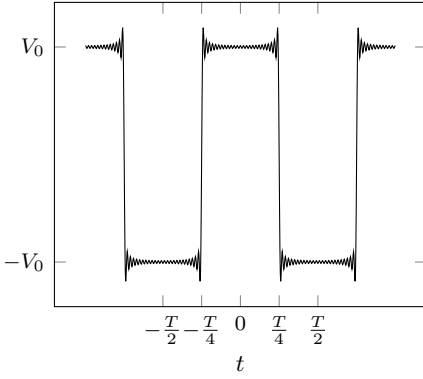
لہٰذا فوریئر تسلسل درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \cdots\right] \tag{15.23}$$

شکل 15.4-ب میں مساوات 15.23 کو $m = 2$ تک استعمال کرتے ہوئے خط کھینچا گیا ہے۔شکل-پ میں پانچ ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں جبکہ شکل-ت میں پچاس ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ارکان بڑھانے سے اصل موج کے قریب تر خط حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 15.6: آئیں شکل 15.5-الف میں دکھائے گئے دوری مستطیل موج کا فوریئر تسلسل حاصل کریں جس میں دوری عرصے کو T لکھا گیا ہے۔

حل:افقی محور کے دونوں اطراف برابر موج پائی جاتی ہے لہٰذا اس کی اوسط قیمت صفر ہو گی اور یوں $a_0 = 0$ ہو گا۔آئیں یہی جواب مساوات 15.21 سے حاصل کریں۔اس مرتبہ ہم دوری عرصے کو $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ لیتے ہیں۔شکل کو دیکھ معلوم ہوتا ہے کہ $-\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{4}$ تفاعل کی قیمت V_0 ہے جبکہ $-\frac{T}{2} \le t \le -\frac{T}{4}$

(الف) مستطیل موج۔

(ب) ایک، تین اور پانچ ہارمونی ارکان کا مجموعہ یعنی $m = 5$ ہے۔

(پ) $m = 9$ تک ارکان کا مجموعہ۔

(ت) $m = 49$ تک ارکان کا مجموعہ۔

شکل 15.5: مثال 15.6 کی مستطیل موج۔

اور $\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{2}$ پر تفاعل کی قیمت $-V_0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\left(-V_0\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{d}t + V_0\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\mathrm{d}t - V_0\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{T}\left[-V_0\left(-\frac{T}{4}+\frac{T}{2}\right) + V_0\left(\frac{T}{4}+\frac{T}{4}\right) - V_0\left(\frac{T}{2}-\frac{T}{4}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

کوسائن کے عددی سر a_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو تکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}\cos(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\cos(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{T}V_0\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\cos(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2V_0}{T}\left.\frac{\sin(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} + \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\sin(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\sin(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{4V_0}{m\pi}\sin(\frac{m\pi}{2})
\end{aligned}$$

اس سے درج ذیل عددی سر لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{4V_0}{1\pi}\sin(\frac{1\pi}{2}) = \frac{4V_0}{\pi} \\
a_2 &= \frac{4V_0}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{2}) = 0 \\
a_3 &= \frac{4V_0}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{4V_0}{3\pi} \\
a_4 &= \frac{4V_0}{4\pi}\sin(\frac{4\pi}{2}) = 0 \\
a_5 &= \frac{4V_0}{5\pi}\sin(\frac{5\pi}{2}) = \frac{4V_0}{5\pi} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

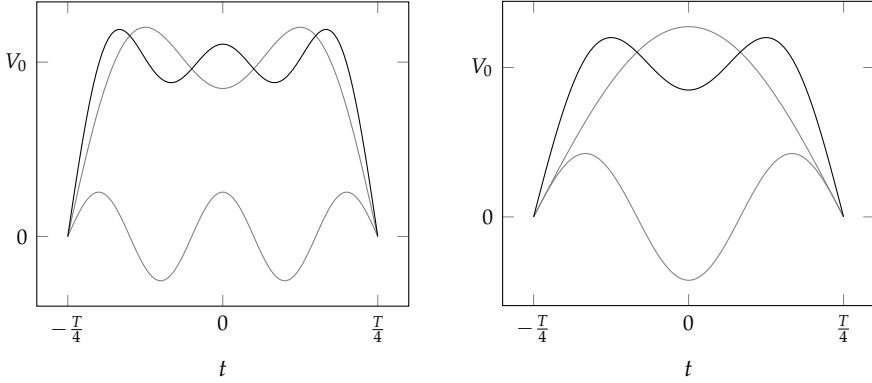
سائن کے عددی سر b_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو تکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}\sin(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\sin(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{T}V_0\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\sin(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\cos(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} - \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\cos(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\cos(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے مستطیل موج کی فوریئر مساوات لکھتے ہیں۔

$$
f(t) = \frac{4V_0}{\pi}\left[\cos\omega_0 t - \frac{1}{3}\cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\cos(5\omega_0 t) - \frac{1}{7}\cos(7\omega_0 t) + \cdots\right] \tag{15.24}
$$

مختلف تعداد میں فوریئر تسلسل کے ارکان شامل کرتے ہوئے تفاعل کو شکل 15.5-ب تا شکل 15.5-ت میں دکھایا گیا ہے۔

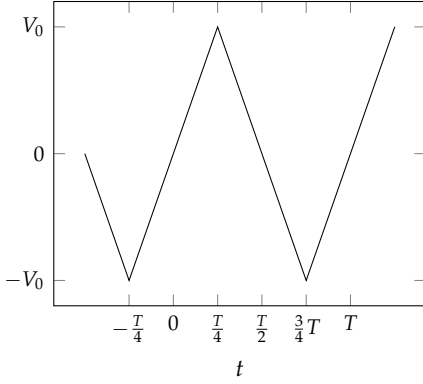
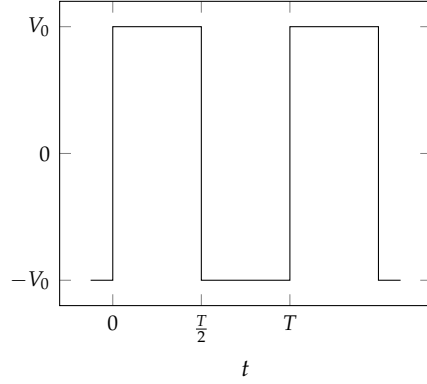
مثال 15.6 میں مستطیل موج کی فوریئر تسلسل حاصل کی گئی۔ آئیں تسلسل کے ایک رکن سے شروع کرتے ہوئے دیکھیں کہ اس میں مزید ارکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کیسے حاصل ہوتی ہے۔ شکل 15.6-الف میں مساوات 15.24 کا پہلا ہارمونی رکن $\frac{4V_0}{\pi}\cos\omega_0 t$ اور تیسرا ہارمونی رکن $-\frac{4V_0}{3\pi}\cos(3\omega_0 t)$ ہلکی سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ دونوں سائن نما صورت رکھتے ہیں جس کا مستطیل سے دور دور تک کوئی واسطہ نہیں ہے۔ اسی شکل میں دونوں کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دو سائن نما امواج مل کر ایسی شکل بناتے ہیں جو مستطیل زیادہ اور سائن نما کم نظر آتا ہے۔ مستطیل موج کی چوٹی V_0 ہے جبکہ پہلے ہارمونی رکن کی چوٹی $\frac{4V_0}{\pi} = 1.27V_0$ ہے۔ تیسرا ہارمونی رکن اس چوٹی کو نیچے کھینچتا ہے۔ اسی طرح مستطیل موج $\mp\frac{T}{4}$ پر یکدم قیمت تبدیل کرتی ہے جبکہ پہلا ہارمونی جزو نہایت صبر و تحمل کے ساتھ منفی چوٹی سے مثبت چوٹی اور مثبت چوٹی سے منفی چوٹی پہنچتی ہے۔ یہاں بھی تیسرا ہارمونی رکن پہلے رکن کے اطراف کو کھینچ کر ان کی ڈھلوان بڑھاتی ہے۔

(الف) پہلا اور تیسرا ہارمونی رکن مل کر مستطیل صورت بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔ (ب) پہلے، تیسرا اور پانچواں ہارمونی ارکان مل کر مستطیل شکل بناتے ہیں۔

شکل 15.6: بتدریج زیادہ ارکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کی صورت ابھرتے ہوئے دیکھتے ہیں۔

شکل 15.6-الف میں تیسرا رکن زیادہ جزبات میں آ کر پہلی رکن کی چوٹی ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچ دیتا ہے۔ شکل-ب میں پہلے اور تیسرے ارکان سے حاصل موج کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ پانچویں رکن کو بھی ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ ان کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں پانچواں رکن ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچی گئی چوٹی کو معمولی اٹھاتا ہے تا کہ یہ V_0 کے قریب ہو جائے۔ اسی طرح یہ رکن بھی موج کے اطراف کی ڈھلوان بڑھاتا ہے۔ فوریئر تسلسل کے بقایا ارکان بھی اسی طرح مدد کرتے ہوئے اطراف کو زیادہ عمودی اور چوٹی کو بالکل چپٹی بنانے میں مدد دیتے ہیں حتٰی کہ ہمیں بالکل مستطیل موج نظر آتی ہے۔

شکل 15.5-ب، پ اور ت میں آپ دیکھتے ہیں کہ فوریئر تسلسل سے حاصل موج $\mp \frac{T}{4}$ پر درکار قیمت سے تجاوز کرتے ہوئے آگے نکل جاتی ہے۔ تسلسل میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے ان تجاوزات کا خاتمہ نہیں ہوتا۔

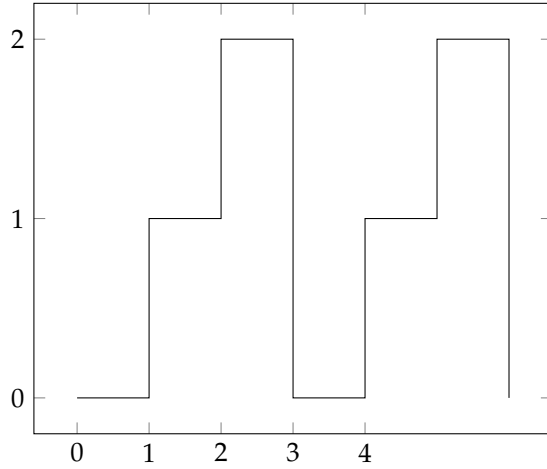
مشق 15.3: شکل 15.5-الف میں عددی سر حاصل کرتے ہوئے تکملات کو $-\frac{T}{4} \le t \le \frac{3T}{4}$ پر حاصل کرتے ہوئے فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب: عددی سر حاصل کرتے ہوئے دوری موج کے کسی بھی حصے پر مسلسل ایک دوری عرصے پر تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ جوابات میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا۔

شکل 15.7: مشق 15.4 اور مشق 15.5 کے امواج۔

مشق 15.4: شکل 15.7-الف میں دکھائے گئے مستطیل موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=\frac{4V}{\pi}\left[\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t)+\cdots\right]$

مشق 15.5: شکل 15.7-ب میں دکھائے گئے تکونی موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔ پہلے $-\frac{T}{4}\leq t\leq\frac{T}{4}$ اور $\frac{T}{4}\leq t\leq\frac{3T}{4}$ سیدھے حصوں کے مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $f_1(t)=\frac{4V_0}{T}t$ ، $f_2(t)=2V_0(1-2\frac{t}{T})$ ،
$f(t)=\frac{8V_0}{\pi^2}\left[\sin\omega_0 t-\frac{1}{3^2}\sin(3\omega_0 t)+\frac{1}{5^2}\sin(5\omega_0 t)-\cdots\right]$

شکل 15.8: مشق 15.6 کا تفاعل۔

مشق 15.6: شکل 15.8 میں دیے تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب:

$$1-\frac{3}{\pi}\left[\sin\omega_0 t+\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)+\frac{1}{4}\sin(4\omega_0 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t)+\frac{1}{7}\sin(7\omega_0 t)+\cdots\right]$$

دوری سمتیہ کا حقیقی جزو اصل تفاعل ہوتا ہے لہٰذا دوری سمتیہ $(a_m-jb_m)e^{jm\omega t}$ درج ذیل حقیقی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}
(a_m-jb_m)e^{jm\omega_t}\Big|_{\text{حقیقی}} &= (a_m-jb_m)[\cos(m\omega_0 t)+j\sin(m\omega_t)]\Big|_{\text{حقیقی}}\\
&= a_m\cos(m\omega_0 t)+ja_m\sin(m\omega_0 t)-jb_m\cos(m\omega_0 t)+b_m\sin(m\omega_0 t)\Big|_{\text{حقیقی}}\\
&= a_m\cos(m\omega_0 t)+b_m\sin(m\omega_0 t)
\end{aligned} \tag{15.25}$$

مساوات 15.25 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.4 کے فوریئر تسلسل کو

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t}\Big|_{\text{حقیقی}} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{D}_n e^{jn\omega_0 t}\Big|_{\text{حقیقی}}
\end{aligned}
\tag{15.26}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$
\boldsymbol{D}_n = D_n \underline{/\theta_n} = a_n - jb_n \tag{15.27}
$$

کے برابر ہے۔

15.2 قوت نمائی فوریئر تسلسل

فوریئر تسلسل کی قوت نمائی صورت درج ذیل ہے۔

$$
f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{15.28}
$$

مساوات 15.28 سے مساوات 15.4 حاصل کرتے ہیں۔درج بالا کو پھیلا کر لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
f(t) = \cdots &+ \boldsymbol{c}_{-3}e^{-3j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_{-2}e^{-2j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_{-1}e^{-1j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_0 \\
&+ \boldsymbol{c}_1 e^{1j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_2 e^{2j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_3 e^{3j\omega_0 t} + \cdots
\end{aligned}
$$

اس کو ترتیب دے کر جوڑیوں کی صورت میں لکھتے ہیں

$$
f(t) = \boldsymbol{c}_0 + \boldsymbol{c}_1 e^{1j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_{-1}e^{-1j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_2 e^{2j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_{-2}e^{-2j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_3 e^{3j\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_{-3}e^{-3j\omega_0 t} \cdots
$$

جس کو مجموعے کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \boldsymbol{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t} + \boldsymbol{c}_{-n} e^{-jn\omega_0 t} \\
&= \boldsymbol{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{c}_n [\cos(n\omega_0 t) + j\sin(n\omega_0 t)] + \boldsymbol{c}_{-n}[\cos(n\omega_0 t) - j\sin(n\omega_0 t)] \\
&= \boldsymbol{c}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\boldsymbol{c}_n + \boldsymbol{c}_{-n})\cos(n\omega_0 t) + j(\boldsymbol{c}_n - \boldsymbol{c}_{-n})\sin(n\omega_0 t)
\end{aligned}
\tag{15.29}
$$

درج بالا مساوات اور مساوات 15.4 صرف اس صورت برابر ہوں گے جب

$$
\begin{aligned}
a_n &= \boldsymbol{c}_n + \boldsymbol{c}_{-n} \\
b_n &= j(\boldsymbol{c}_n - \boldsymbol{c}_{-n})
\end{aligned} \tag{15.30}
$$

ہوں۔اب تصور کریں کہ $\boldsymbol{c}_n = e + jf$ اور $\boldsymbol{c}_{-n} = g + jh$ ہیں تب درج بالا کے تحت

$$
\begin{aligned}
a_n &= e + jf + g + jh \\
b_n &= j(e + jf - g - jh)
\end{aligned}
$$

ہو گا۔اب a_n اور b_n حقیقی قیمتیں ہیں لہٰذا پہلی مساوات میں $f = -h$ ہو گا اور دوسری مساوات میں $e = g$ ہو گا۔اس طرح

$$
\begin{aligned}
a_n &= e + g = 2e \\
b_n &= h - f = 2h
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_n &= e + jf \\
\boldsymbol{c}_{-n} &= e - jf
\end{aligned}
$$

ہوں گے۔آپ نے دیکھا کہ $\boldsymbol{c}_n$ اور $\boldsymbol{c}_{-n}$ آپس میں مخلوط جوڑی ہے یعنی

$$
\boldsymbol{c}_{-n} = \boldsymbol{c}_n^* \tag{15.31}
$$

مساوات 15.30 سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
2\boldsymbol{c}_n = a_n - jb_n \tag{15.32}
$$

فوریئر تسلسل کے تین اقسام کے عددی سر کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$
\boldsymbol{D}_n = D_n \underline{/\theta_n} = 2\boldsymbol{c}_n = a_n - jb_n \tag{15.33}
$$

قوت نمائی فوریئر تسلسل کا عددی سر $\boldsymbol{c}_m$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.28 کے دونوں اطراف کو $e^{-jm\omega_0 t}$ سے ضرب دیتے ہوئے $0 \le t \le T_0$ پر ان کا تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

$$
\int_0^{T_0} f(t) e^{-jm\omega_0 t} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_0} \boldsymbol{c}_n e^{j(n-m)\omega_0 t} \, \mathrm{d}t \tag{15.34}
$$

اگر $n \neq m$ ہو تب

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} \boldsymbol{c}_n e^{j(n-m)\omega_0 t}\,\mathrm{d}t &= \left.\frac{\boldsymbol{c}_n e^{j(n-m)\omega_0 t}}{j(n-m)\omega_0}\right|_0^{T_0}\\ &= \frac{\boldsymbol{c}_n\left[e^{j(n-m)2\pi}-e^0\right]}{j(n-m)\omega_0}\\ &= 0\end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں آخری قدم پر $e^{j(n-m)2\pi} = \cos[(n-m)2\pi] + j\sin[(n-m)2\pi] = 1$ اور $e^0 = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔اس کے برعکس $n = m$ کی صورت میں $\boldsymbol{c}_n$ کو $\boldsymbol{c}_m$ لکھا جا سکتا ہے اور

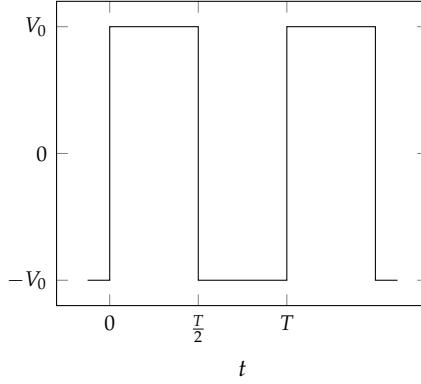
$$\int_0^{T_0} \boldsymbol{c}_m\,\mathrm{d}t = T_0\boldsymbol{c}_m$$

ہو گا لہٰذا مساوات 15.34 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{c}_m = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)e^{-jm\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{15.35}$$

مثال 15.7: ہم شکل 15.7-الف کے مستطیل تفاعل کا تکونیاتی فوریئر تسلسل حاصل کر چکے ہیں۔آئیں اس کی قوت نمائی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔تفاعل کو شکل 15.9 میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔

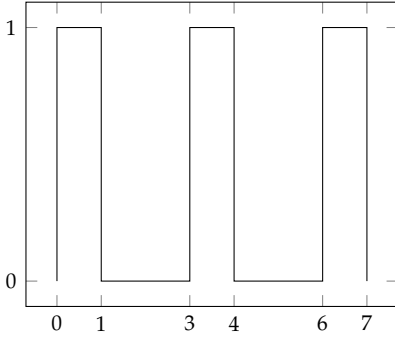
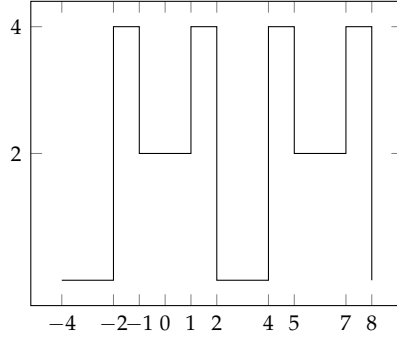
حل: مساوات 15.35 استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{c}_0$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} V_0\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-V_0)\,\mathrm{d}t\\ &= 0\end{aligned}$$

شکل 15.9: مثال 15.7 کا تفاعل۔

اسی طرح c_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jm\omega_0 t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{V_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-jm\omega_0 t}\,\mathrm{d}t - \frac{V_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} e^{-jm\omega_0 t}\,\mathrm{d}t\\
&= \left.\frac{V_0 e^{-jm\omega_0 t}}{-jm\omega_0 T}\right|_0^{\frac{T}{2}} - \left.\frac{V_0 e^{-jm\omega_0 t}}{-jm\omega_0 T}\right|_{\frac{T}{2}}^{T}\\
&= \frac{jV_0}{m\pi}(\cos m\pi - 1) \qquad {\scriptstyle -\infty \le m \le \infty \atop m\neq 0}
\end{aligned}$$

جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
c_1 &= c_1^* = -\frac{j2V_0}{\pi}\\
c_2 &= c_2^* = 0\\
c_3 &= c_3^* = -\frac{j2V_0}{3\pi}\\
c_4 &= c_4^* = 0\\
c_5 &= c_5^* = -\frac{j2V_0}{5\pi}
\end{aligned}$$

(ب)

(الف)

شکل 15.10: مشق 15.8 اور مشق 15.9 کے تفاعل۔

یوں شکل میں دیے مستطیل تفاعل کی فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=\text{طاق} \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{j2V_0}{n\pi} e^{jn\omega_0 t} \tag{15.36}$$

مشق 15.7: مساوات 15.36 میں $c_n e^{jn\omega_0 t} + c_n^* e^{-jn\omega_0 t}$ اکٹھے کرتے ہوئے مشق 15.4 میں دیا جواب حاصل کریں۔

مشق 15.8: شکل 15.10-الف میں دیے تفاعل کے قوت نمائی فوریئر تسلسل کے عددی سر معلوم کریں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2}\\
c_n &= \frac{2}{n\pi}\left[2\sin\frac{2\pi n}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right]
\end{aligned}
$$

مشق 15.9: شکل 15.10-ب میں دیے تفاعل کے قوت نمائی فوریئر تسلسل کے عددی سر معلوم کریں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{3}\\
c_n &= \frac{1-e^{-j\frac{2}{3}n\pi}}{j2n\pi}
\end{aligned}
$$

15.3 تشاکل تفاعل

آپ نے مختلف تفاعل کے فوریئر تسلسل دیکھے۔ان میں کئی ایسے تھے جن کے یا تمام a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر تھے۔آئیں اس کی وجہ سمجھیں اور تکملات حل کرنے سے پہلے یہ دریافت کرنا سیکھیں کہ آیا فوریئر تسلسل میں a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر ہوں گے۔فوریئر تسلسل کے ارکان کا دارومدار تفاعل کی شکل و صورت پر ہے۔ تین قسم کے تشاکل تفاعل پائے جاتے ہیں۔ان پر باری باری غور کرتے ہیں۔

15.3.1 جفت تشاکل تفاعل

جفت تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

$$f(t) = f(-t) \tag{15.37}$$

جفت تفاعل عمودی محور کے دونوں اطراف یکساں دکھائی دیتا ہے۔جفت تفاعل کی اہم مثال $\cos(n\omega_0 t)$ ہے۔آپ جانتے ہیں کہ $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ ہوتا ہے لہٰذا یہ جفت تفاعل ہے۔شکل 15.5-الف بھی جفت تفاعل ہے۔ آئیں جفت تفاعل کے فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

مساوات 15.21 میں تکمل کو $-\frac{T_0}{2} \le t \le \frac{T_0}{2}$ لیتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
a_m &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
b_m &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{15.38}$$

a_0 کی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ان میں پہلے تکمل میں متغیرہ کو تبدیل کرتے ہوئے $t = -x$ لکھنے سے $f(t) = f(-x)$ اور $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$ لکھے جائیں گے اور تکمل کے حدود $0 \le t \le \frac{T_0}{2}$ ہوں گے۔چونکہ تفاعل جفت ہے لہٰذا $f(-x) = f(x)$ ہو گا۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{15.39}$$

جہاں آخری قدم پر دونوں تکمل میں صرف متغیرات کی علامت مختلف ہے لہٰذا ان کی قیمتیں برابر ہیں۔

a_m کو بھی اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{0} f(-x)\cos(-m\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(x)\cos(m\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{15.40}$$

آخر میں b_m کو اسی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں

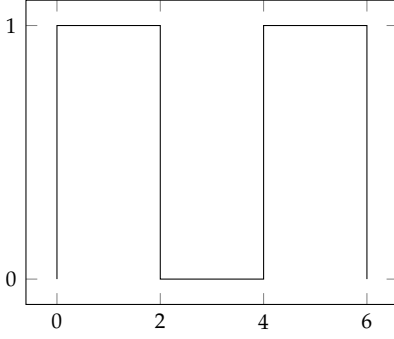
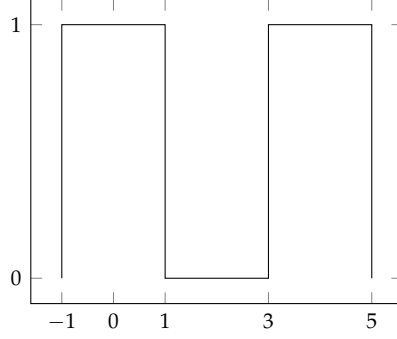
$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{0} f(-x)\sin(-m\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(x)\sin(-m\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned} \tag{15.41}$$

جہاں آخری قدم پر $\sin(-m\omega_0 t) = -\sin(m\omega_0 t)$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

آپ نے دیکھا کہ جفت تفاعل کی صورت میں فوریئر تسلسل کے $b_m = 0$ ہیں لہٰذا انہیں حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

15.3.2 طاق تشاکل تفاعل

طاق تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

$$f(-t) = -f(t) \tag{15.42}$$

شکل 15.11: مثال 15.8 اور مثال 15.9 کے اشکال۔

طاق تفاعل کی مثال $\sin(m\omega_0 t)$ ہے۔ہم جفت تفاعل کی طرح طاق تفاعل کے عددی سر حاصل کرتے ہوئے درج ذیل نتائج پر پہنچتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0\\
a_m &= 0\\
b_m &= \frac{4}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{15.43}
$$

یوں طاق تفاعل کے فوریئر تسلسل کے صرف b_m عددی سر حاصل کرنے کی ضرورت پیش آئے گی۔

مثال 15.8: شکل 15.11-الف میں جفت تفاعل دکھایا گیا ہے۔اس کے فوریئر تکونیاتی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

حل: چونکہ دیا تفاعل جفت ہے لہٰذا $b_m = 0$ ہوں گے۔بقایا عددی سر دریافت کرتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-1} 1\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{4}\int_{-1}^{1}\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}
\end{aligned}
$$

مثال 15.9: شکل 15.11-ب میں طاق تفاعل دکھایا گیا ہے۔اس کے فوریئر تکونیاتی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

حل:چونکہ دیا تفاعل طاق ہے لہٰذا $a_m = 0$ ہوں گے۔بقایا عددی سر دریافت کرتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{4}\int_{0} 2\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{4}\int_{0}^{2}\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1-\cos n\pi}{n\pi}
\end{aligned}
$$

15.4 منتقلی وقت

فرض کریں کہ ایک تفاعل جس کی فوریئر تسلسل درج ذیل ہے

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{15.44}$$

کو وقت کے لحاظ سے منتقل کیا جاتا ہے۔تفاعل $f(t)$ کو t_0 سیکنڈ تاخیر سے $f(t-t_0)$ لکھا جاتا ہے۔

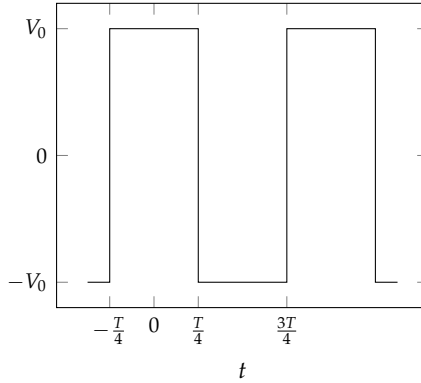
$$\begin{aligned}f(t-t_0)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0(t-t_0)}\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\boldsymbol{c}_n e^{-jn\omega_0 t_0}\right)e^{jn\omega_0 t}\end{aligned} \tag{15.45}$$

چونکہ $e^{-jn\omega_0 t_0}$ سے مراد زاویائی فاصلہ ہے لہٰذا وقت میں منتقل تفاعل $f(t-t_0)$ کے فوریئر عددی سر اصل تفاعل $f(t)$ کے عددی سر ہوتے ہیں جن میں تعدد کے راست متناسب زاویائی ہٹاو $e^{-jn\omega_0 t_0}$ پایا جاتا ہے۔ اس طرح وقتی دائرہ کار میں تبادلے سے تعددی دائرہ کار میں مراد زاویائی تبادلہ ہے۔

مثال 15.10: مثال 15.7 میں ہم شکل 15.9 کے تفاعل $f(t)$ کا قوت نمائی فوریئر تسلسل حاصل کر چکے ہیں۔ اس تفاعل کو $\frac{T}{4}$ بائیں منتقل کرتے ہوئے شکل 15.12 یعنی $f(t+\frac{T}{4})$ حاصل ہوتا ہے جس کی قوت نمائی فوریئر تسلسل درکار ہے۔ حل: اس کو تبادلہ وقت کے کلیے سے حل کرتے ہیں۔مساوات 15.45 کے ذریعہ نئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔چونکہ $t_0=-\frac{T}{4}$ ہے لہٰذا زاویائی ہٹاو

$$-jn\omega_0 t_0=jn\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}=jn\frac{\pi}{2}$$

ہو گا۔یوں بنیادی ہارمونی رکن کے عددی سر میں 90° کا زاویائی ہٹاو پایا جائے گا۔ مساوات 15.36 میں ان زاویائی ہٹاو کو شامل کرتے ہوئے فوریئر تسلسل لکھتے ہیں۔

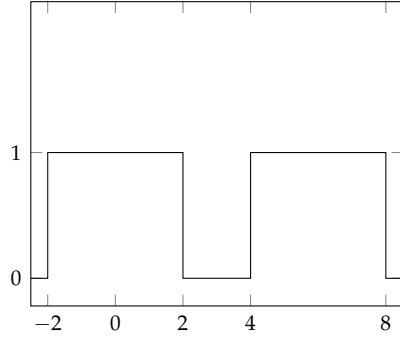
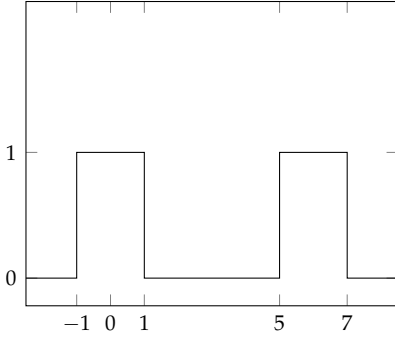
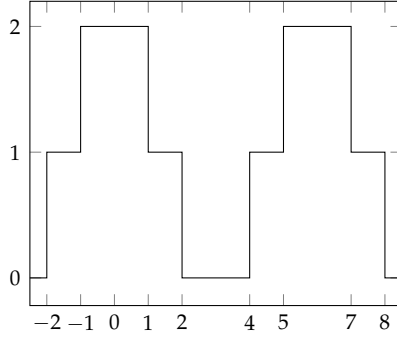
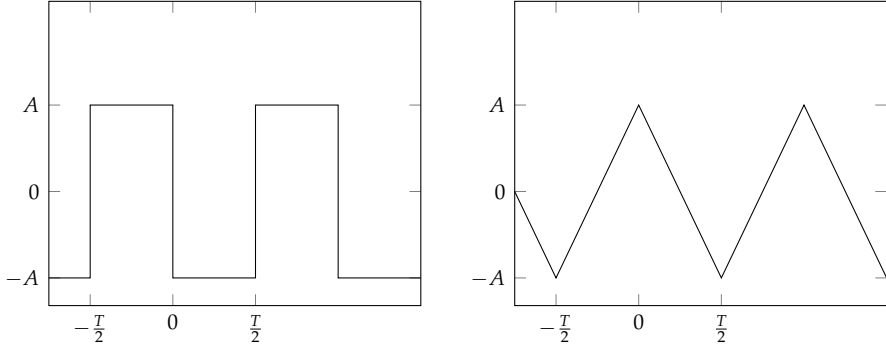
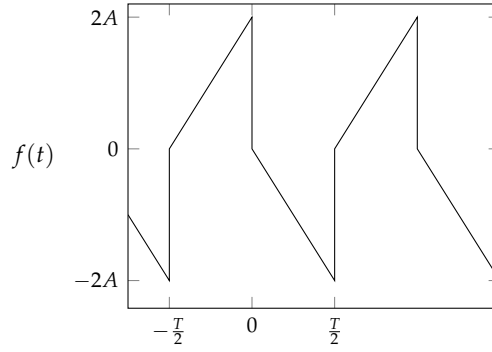
$$f\left(t+\frac{T}{4}\right)=\sum_{\substack{n=-\infty\\ n=\text{طاق}\\ n\neq 0}}^{\infty}-\frac{j2V_0}{n\pi}e^{jn\left(\omega_0+\frac{\pi}{2}\right)t} \tag{15.46}$$

شکل 15.12: مثال 15.10 کا تفاعل۔

15.5 تخلیق موج

دو یا دو سے زیادہ امواج کا مجموعہ لیتے ہوئے دیگر امواج حاصل کئے جا سکتے ہیں۔یوں شکل 15.13-الف اور شکل-ب مل کر شکل-پ دیتے ہیں۔انفرادی امواج کے فوریئر تسلسل کا مجموعہ حاصل موج کی فوریئر تسلسل دے گی۔ فوریئر تسلسل میں تعددی ارکان کا دارومدار وقت کے لحاض سے موج کی صورت پر منحصر ہوتا ہے نا کہ موج کی مطلق قیمت پر۔یوں جس نسبت سے موج کا حیطہ تبدیل کیا جائے اسی نسبت سے تسلسل کو ضرب دیتے ہوئے کم یا زیادہ حیطے کی موج کا تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

فوریئر تسلسل میں $\sum a_n \cos(n\omega_0 t)$ جفت موج کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $\sum b_n \sin(n\omega_0 t)$ طاق موج کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا کسی بھی موج کو جفت موج اور طاق موج کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مشق 15.10: شکل 15.13-الف اور ب کی فوریئر قوت نمائی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔ان کے مجموعے سے شکل-پ کی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

جواب: $c_0 = 1$ ، $c_n = \frac{\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3}}{n\pi}$

شکل 15.13: دو یا دو سے زیادہ امواج کے جمع و منفی سے نئی موج کی تخلیق۔

شکل 15.14: مشق 15.11 کے اشکال۔

مشق 15.11: شکل 15.14-ال اور ب کا مجموعہ شکل-پ ہے۔ شکل-الف اور ب کے فوریئر تسلسل حاصل کرتے ہوئے شکل-پ کا تسلسل حاصل کریں۔

جواب: $f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{طاق}}}^{\infty} \left[\frac{4A}{n\pi}\sin(n\omega_0 t) - \frac{8A}{n^2\pi^2}\cos(n\omega_0 t)\right]$

15.6 تعددی طیف

تفاعل $f(t)$ کے عددی سر کی مقدار بالمقابل تعدد کے ترسیم کو مقداری طیف[15] کہتے ہیں جبکہ عددی سر کی زاویائی ہٹاو بالمقابل تعدد کے ترسیم کو زاویائی ہٹاو طیف[16] کہتے ہیں۔ چونکہ طیف انفرادی لکیروں پر مشتمل ہے لہٰذا اسے انفرادی لکیری طیف[17] کہتے ہیں۔انفرادی لکیری طیف تفاعل کی تعددی مواد کے بارے میں معلومات دیتی ہے۔

مثال 15.11: مشق 15.11 میں شکل 15.14-پ کا تسلسل حاصل کیا گیا جو $A = 5$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{طاق}}}^{\infty} \left[\frac{20}{n\pi} \sin(n\omega_0 t) - \frac{40}{n^2\pi^2} \cos(n\omega_0 t) \right]$$

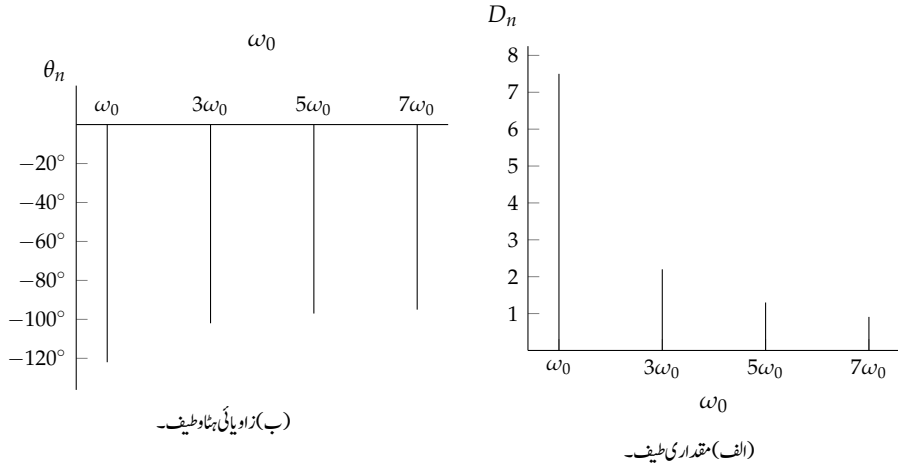
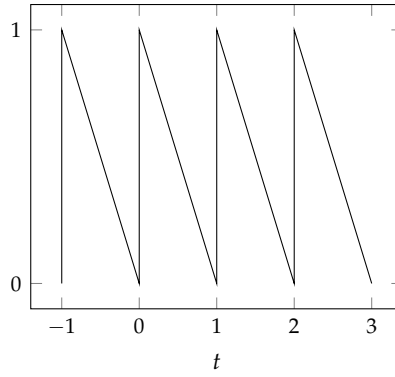
تفاعل کی مقداری طیف اور زاویائی ہٹاو طیف درکار ہے۔

حل: چونکہ $D_n \underline{/\theta_n} = a_n - jb_n$ ہے لہٰذا پہلے چار $D_n \underline{/\theta_n}$ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
D_1 \underline{/\theta_1} &= -\frac{40}{\pi^2} - j\frac{20}{\pi} = 7.5 \underline{/-122^\circ} \\
D_3 \underline{/\theta_1} &= -\frac{40}{9\pi^2} - j\frac{20}{3\pi} = 2.2 \underline{/-102^\circ} \\
D_5 \underline{/\theta_1} &= -\frac{40}{25\pi^2} - j\frac{20}{5\pi} = 1.3 \underline{/-97^\circ} \\
D_7 \underline{/\theta_1} &= -\frac{40}{49\pi^2} - j\frac{20}{7\pi} = 0.91 \underline{/-95^\circ}
\end{aligned}$$

مقداری طیف اور زاویائی ہٹاو طیف کو شکل 15.15 میں دکھایا گیا ہے۔

(ب) زاویائی ہٹاو طیف۔

(الف) مقداری طیف۔

شکل 15.15: مثال 15.11 کے طیف۔

شکل 15.16: مشق 15.12 کا تفاعل۔

مشق 15.12: شکل 15.16 میں دیے تفاعل کے D_n عددی سر حاصل کریں۔ جوابات:

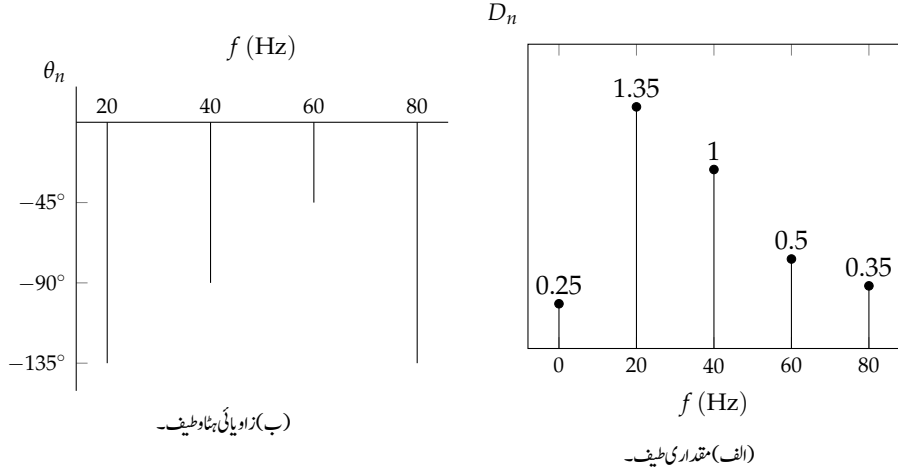
$$a_0 = \frac{1}{2}$$
$$D_1 = -\frac{j}{\pi}$$
$$D_2 = -\frac{j}{2\pi}$$
$$D_3 = -\frac{j}{3\pi}$$
$$D_4 = -\frac{j}{4\pi}$$

مشق 15.13: انفرادی لکیری طیف شکل 15.17 میں دکھائے گئے ہیں۔تفاعل کی تکونیاتی تسلسل لکھیں۔
جواب:

$$f(t) = 0.25 + 1.35\cos(40\pi t - 135^\circ) + 1\cos(80\pi t - 90^\circ) + 0.5\cos(120\pi t - 45^\circ) + 0.35\cos(160\pi t - 135^\circ) + \cdots$$

15.7 برقرار حال برقی جال

کسی دور پر سائن نما دباو مسلط کرتے ہوئے دور میں مختلف مقامات پر دباو اور رو حاصل کرنا ہم دیکھ چکے ہیں۔فرض کریں کہ کسی دور پر دوری دباو $v(t)$ مسلط کی جاتی ہے۔ایسے دور کو حل کرنے کی خاطر ہم مسلط دباو کا فوریئر تسلسل حاصل کرتے ہیں۔فوریئر تسلسل کا ہر رکن سائن نما دباو ہو گا۔انفرادی ہارمونی دباو کے لئے دور کو تعددی دائرہ کار میں حل کیا جاتا ہے۔ ان جوابات کا وقتی دائرہ کار میں مطلوبہ قیمت حاصل کی جاتی ہے۔تمام جوابات کا مجموعہ درکار جواب ہوتا ہے۔

amplitude spectrum[15]
phase spectrum[16]
discrete line spectra[17]

شکل 15.17: مشق 15.13 کے طیف۔

15.7.1 اوسط طاقت

جیسا اوپر ذکر کیا گیا، دور پر دوری دباو یا دوری رو مسلط کرنے سے مختلف مقامات پر دباو اور رو پیدا ہوں گے جنہیں تسلسل کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(t)=V_{DC}+\sum_{n=1}^{\infty}V_n\cos(n\omega_0t-\theta_{v,n}) \tag{15.47}$$

$$i(t)=I_{DC}+\sum_{n=1}^{\infty}I_n\cos(n\omega_0t-\theta_{i,n}) \tag{15.48}$$

غیر فعال رائج سمت استعمال کرتے ہوئے فرض کریں کہ کسی پرزے پر دباو اور اس میں رو درج بالا مساوات دیتے ہیں۔یوں اس پرزے کی اوسط طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)\,\mathrm{d}t \tag{15.49}$$

درج بالا مساوات میں دو فوریئر تسلسل کے حاصل ضرب کا تکمل لیا گیا ہے۔ دو عدد فوریئر تسلسل کے حاصل ضرب میں تین قسم کے ارکان پائے جاتے ہیں۔ایک رکن $V_{DC}I_{DC}$ ہے جس کا تکمل تقسیم T از خود $V_{DC}I_{DC}$ کے برابر ہے۔ دوسرا قسم وہ ہے جو $V_{DC}I_n\cos(n\omega_0t-\theta_{i,n})$ یا $I_{DC}V_n\cos(n\omega_0t-\theta_{v,n})$ صورت رکھتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ سائن نما تفاعل کا ایک دوری عرصے پر تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ایسے تمام ارکان

صفر کے برابر ہوں گے۔تیسرا اور سب سے زیادہ تعداد میں ارکان $\cos(m\omega_0 t - \theta_{v,n})\cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})$ صورت رکھتے ہیں۔آپ جانتے ہیں کہ $\cos(n\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی تفاعل ہیں لہٰذا $m \neq n$ کی صورت میں تمام $\cos(m\omega_0 t - \theta_{v,n})\cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})$ کا ایک دوری عرصے پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔یوں صرف ایسے ارکان غیر صفر ہوں گے جن میں دباو کی تعدد اور رو کی تعدد برابر ہو یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T}\int_0^T V_n I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v,n})\cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2}\cos(\theta_{v,n} - \theta_{i,n})$$

اس طرح اوسط طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$P = V_{DC} I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2}\cos(\theta_{v,n} - \theta_{i,n}) \tag{15.50}$$

درج بالا مساوات کا مطلب ہے کہ تمام انفرادی ہارمونی اجزاء کے اوسط طاقت کا مجموعہ کل اوسط طاقت دیتا ہے۔

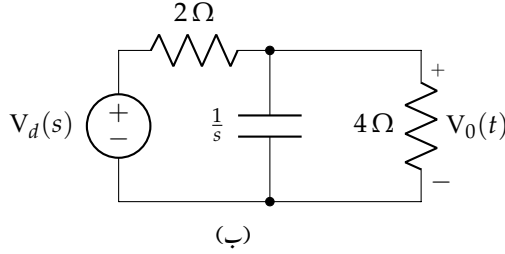
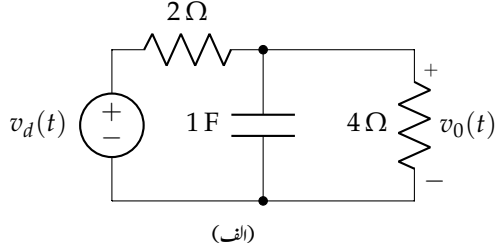
مثال 15.12: شکل 15.18-الف پر درج ذیل داخلی دباو $v_d(t)$ مسلط کی گئی ہے۔خارجی دباو $v_0(t)$ حاصل کریں۔

$$v_d(t) = \sum_{\substack{n=1\\ \text{طاق}}}^{\infty} \frac{20}{n\pi}\sin(2nt) - \frac{40}{n^2\pi^2}\cos(2nt)$$

حل:داخلی دباو کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} v_d(t) &= 7.5\cos(2t - 122^\circ) + 2.2\cos(6t - 102^\circ) \\ &\quad + 1.3\cos(10t - 97^\circ) + 0.91\cos(14t - 95^\circ) + \cdots \end{aligned} \tag{15.51}$$

شکل 15.18-ب میں تعددی دائرہ کار میں دور کو دکھایا گیا ہے جس میں متوازی جڑے برق گیر اور مزاحمت کی رکاوٹ $\frac{4(1/j\omega)}{4+1/j\omega} = \frac{4}{1+j4\omega}$ ہے لہٰذا تقسیم دباو سے خارجی دباو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{V}_0(\omega) = \frac{\frac{4}{1+j4\omega}}{2 + \frac{4}{1+j4\omega}}\mathrm{V}_d(s) = \frac{2}{3 + j4\omega}\mathrm{V}_d \tag{15.52}$$

شکل 15.18: مثال 15.12 کا دور۔

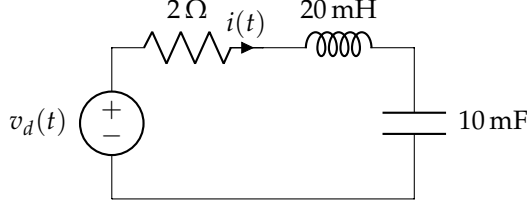
مساوات 15.51 کے پہلے رکن سے $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ دیکھا جا سکتا ہے لہٰذا تسلسل کے پہلے رکن سے پیدا خارجی دباو درج بالا مساوات سے

$$V_0(\omega_0) = \left(\frac{2}{3+j8}\right) 7.5\underline{/-122^\circ} = 1.7556\underline{/-191.4^\circ}$$

ہو گا۔ داخلی دباو کے تسلسل میں اگلے رکن یعنی تیسرے ہارمونی جزو کی تعدد $\omega = 3\omega_0 = 6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ جبکہ پانچویں ہارمونی رکن کی تعدد $5\omega_0$ ہے۔ یوں ان ارکان سے پیدا خارجی دباو کو مساوات 15.52 میں درست تعدد پر کرتے ہوئے حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$V_0(3\omega_0) = \frac{\frac{4}{1+j24}}{2+\frac{4}{1+j24}} 2.2\underline{/-102^\circ} = 0.1819\underline{/-184.9^\circ}$$

$$V_0(5\omega_0) = \frac{\frac{4}{1+j40}}{2+\frac{4}{1+j40}} 1.3\underline{/-97^\circ} = 0.0648\underline{/-182.7^\circ}$$

$$V_0(7\omega_0) = \frac{\frac{4}{1+j56}}{2+\frac{4}{1+j56}} 0.91\underline{/-95^\circ} = 0.0325\underline{/-181.9^\circ}$$

شکل 15.19: مثال 15.13 کا دور۔

یوں برقرار خارجی دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} v_d(t) &= 1.7556\cos(2t - 191.4^\circ) + 0.1819\cos(6t - 184.9^\circ) \\ &\quad + 0.0648\cos(10t - 182.7^\circ) + 0.0325\cos(14t - 181.9^\circ) + \cdots \end{aligned} \tag{15.53}$$

مثال 15.13: شکل 15.19 میں سلسلہ وار RLC پر درج ذیل دباو $v_d(t)$ مسلط کیا گیا ہے۔ مزاحمت میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

$$v_d(t) = 33 + 2\cos(100t - 30^\circ) + 1.1\cos(200t - 45^\circ) + 0.6\cos(300t - 60^\circ) + \cdots$$

حل: برق گیر یک سمتی رو نہیں گزرتی لہٰذا داخلی دباو کا یک سمت جزو یعنی $33\,\text{V}$ کوئی رو نہیں پیدا کر پائے گا اور $I_{DC} = 0$ ہو گا۔ پہلے ہارمونی جزو سے $\omega_0 = 100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ دیکھا جا سکتا ہے۔ داخلی دباو کے تسلسل کے بقایا ارکان کو باری باری حل کرتے ہوئے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{I}(\omega_0) &= \frac{2\underline{/-30^\circ}}{2 + j100 \times 0.02 + \frac{1}{j100 \times 0.01}} = 0.89\underline{/-56.6^\circ} \\ \text{I}(2\omega_0) &= \frac{1.1\underline{/-45^\circ}}{2 + j200 \times 0.02 + \frac{1}{j200 \times 0.01}} = 0.27\underline{/-105.3^\circ} \\ \text{I}(3\omega_0) &= \frac{0.6\underline{/-60^\circ}}{2 + j300 \times 0.02 + \frac{1}{j300 \times 0.01}} = 0.099\underline{/-130.6^\circ} \end{aligned}$$

یوں رو

$$i(t) = 0.89\cos(100t - 56.6^\circ) + 0.27\cos(200t - 105.3^\circ) + 0.099\cos(300t - 130.6^\circ) + \cdots$$

ہو گی۔دور میں صرف مزاحمت طاقت ضائع کرتی ہے لہٰذا پورے دور کا ضیاع مزاحمتی ضیاع ہو گا۔دور میں کل اوسط طاقت کا ضیاع درج ذیل ہے

$$P = \frac{2 \times 0.89}{2}\cos(56.6^\circ - 30^\circ) + \frac{1.1 \times 0.27}{2}\cos(105.3^\circ - 45^\circ) + \frac{0.6 \times 0.099}{2}\cos(130.6^\circ - 60^\circ) + \cdots$$

یعنی

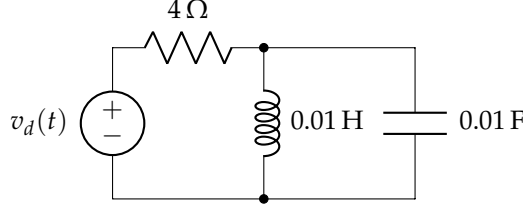
$$P \approx 0.61\,\mathrm{W}$$

مشق 15.14: ایک دور کے داخلی دباو اور داخلی رو درج ذیل ہیں۔دور میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

$$v_d(t) = 20 + 7\cos(100t - 30^\circ) + 5\cos(200t - 45^\circ) + 2\cos(300t - 60^\circ) + \cdots$$
$$i_d(t) = 5 + 3\cos(100t + 40^\circ) + 1\cos(200t - 45^\circ) + 0.2\cos(300t - 70^\circ) + \cdots$$

جواب: $P = 108.99\,\mathrm{W}$

مشق 15.15: شکل 15.20 میں داخلی رو دریافت کریں۔داخلی دباو درج ذیل ہے۔

$$v_d(t) = 5\cos(50t - 30^\circ) + 4\cos(100t + 45^\circ) + 2\cos(150t - 10^\circ)\,\mathrm{V}$$

شکل 15.20: مشق 15.15 کا دور۔

جواب: متوازی امالہ اور برق گیر کی قدرتی تعدد $100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے جس پر ان کی رکاوٹ لامتناہی ہو جاتی ہے لہٰذا رو میں $100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ کا جزو نہیں پایا جاتا۔

$i_d(t) = 1.23\cos(50t - 39.5°) + 0.48\cos(150t + 6.7°)\,\mathrm{A}$

15.8 فوریئر بدل

ہم دوری تفاعل کو فوریئر تسلسل سے ظاہر کرنا دیکھ چکے ہیں۔ آئیں اب غیر دوری[18] تفاعل کو ظاہر کرنے پر غور کریں۔

شکل 15.21-الف میں غیر دوری تفاعل $f(t)$ دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب میں اس تفاعل کو T دورانیے پر دہراتے ہوئے تفاعل $f_d(t)$ حاصل کیا گیا ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ شکل-ب کے دوری تفاعل کو ہم قوت نمائی تسلسل سے ظاہر کر سکتے ہیں

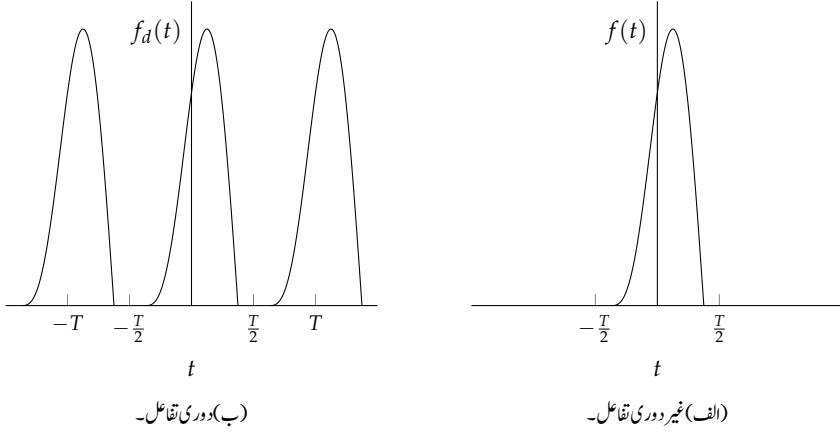
$$f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{15.54}$$

جہاں

$$\boldsymbol{c}_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_d(t) e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{15.55}$$

---

[18] aperiodic

(ب) دوری تفاعل۔

(الف) غیر دوری تفاعل۔

شکل 15.21: دوری اور غیر دوری تفاعل۔

اور

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{15.56}$$

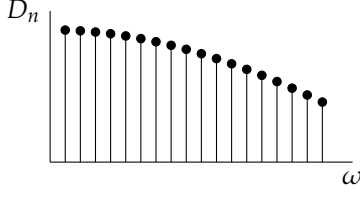
ہیں۔ شکل 15.21-ب میں $T \to \infty$ کرنے سے شکل-الف حاصل ہوتا ہے یعنی تفاعل غیر دوری ہو گا۔ ایسی صورت میں $-T$ ، T ، $2T$ وغیرہ پر پائے جانے والے حصے لامتناہی پر پائے جائیں گے۔

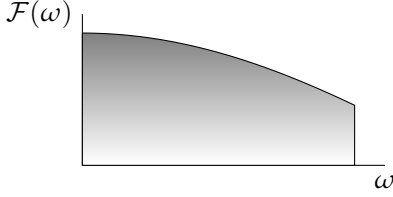
دوری تفاعل کے لکیری طیف میں لکیریں ہارمونی تعدد $n\omega_0$ پر پائی جاتی ہے لہٰذا دو قریبی لکیروں کے مابین تعددی فاصلہ

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \tag{15.57}$$

ہو گا۔ شکل 15.22-الف میں ان حقائق کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری فاصلہ T بڑھانے سے طیفی لکیروں کے مابین تعددی فاصلہ کم ہو گا۔ شکل-ب اور پ میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل-ت میں دکھایا گیا ہے، $T \to \infty$ کرنے سے $\Delta\omega \to \mathrm{d}\omega$ ہو گا، طیف اپنی لکیری خاصیت کھو دے گا اور یہ ایک مسلسل طیف کی صورت اختیار کر لیگا۔ ایسی صورت میں طیف انفرادی تعدد $n\omega_0$ کی بجائے تمام تعدد ω پر پایا جائے گا لہٰذا $n\omega_0$ کو ω فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

$$n\omega_0 = \omega \tag{15.58}$$

طیفی لکیروں کے مابین فاصلہ ω_0 ہے۔

(ب) دوری عرصہ بڑھانے سے طیفی لکیروں کے مابین فاصلہ کم ہوتا ہے۔

(پ) دوری عرصہ بہت بڑھانے سے طیفی لکیروں کے مابین فاصلہ نہایت کم ہو جاتا ہے۔

(ت) لامتناہی دوری عرصے کی صورت میں طیفی لکیریں آپس میں مل جاتی ہیں اور ان میں فرق کرنا ممکن نہیں رہتا۔

شکل 15.22: لکیری طیف سے مسلسل طیف کا حصول۔

چونکہ $T \to \infty$ کرنے سے مساوات 15.55 میں $c_n \to 0$ ہوں گے لہٰذا ہم $c_n T$ پر نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{c}_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_d(t) e^{-jn\omega_0 t} \,\mathrm{d}t$$

دوری عرصے کی حد لامتناہی کرتے ہوئے درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} (\boldsymbol{c}_n T) &= \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_d(t) e^{-jn\omega_0 t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

جہاں مندرجہ بالا بحث کو مد نظر رکھتے ہوئے، دوسری قدم پر دوری تفاعل $f_d(t)$ کی جگہ غیر دوری تفاعل $f(t)$ پر کیا گیا ہے اور مساوات 15.58 کا استعمال کیا گیا ہے۔ اس تکمل کو **فوریئر بدل**[19] کہتے اور $\mathcal{F}(\omega)$ سے ظاہر کیا

[19]Fourier transform

جاتا ہے۔

$$\mathrm{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{15.59}$$

اسی طرح دوری تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} f_d(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{c}_n T) e^{jn\omega_0 t}\frac{1}{T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\boldsymbol{c}_n T) e^{jn\omega_0 t}\frac{\Delta\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

جس کو $T\to\infty$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

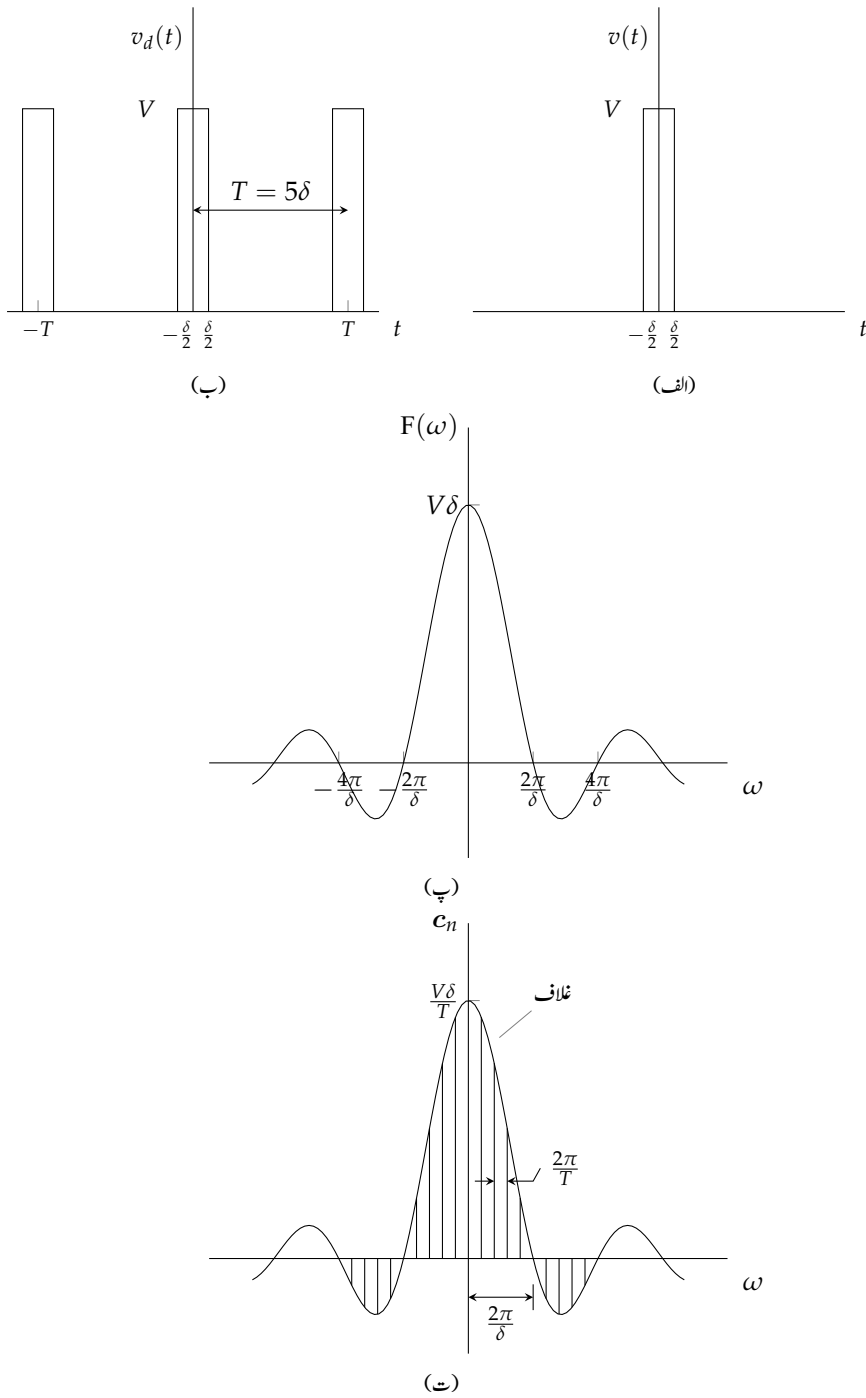
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{15.60}$$

جہاں مساوات 15.58 کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 15.59 اور مساوات 15.60 فوریئر جوڑی کہلاتے ہیں۔ چونکہ $f(t)$ کا **فوریئر بدل**[20] $\mathcal{F}(\omega)$ ہے لہٰذا $\mathcal{F}(\omega)$ کا **الٹ فوریئر بدل**[21] $f(t)$ ہے۔ فوریئر جوڑی کو اکٹھے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{F}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{15.61}$$

چند اہم فوریئر بدل جوڑیاں

چند فوریئر بدل کی جوڑیاں حاصل کرتے ہیں۔

شکل 15.23: مثال 15.14 کا تفاعل۔

مثال 15.14: شکل 15.23-الف میں دیے مستطیل تفاعل $f(t)$ کی فوریئر بدل $\mathrm{F}(\omega)$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.61 استعمال کرتے ہوئے فوریئر بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(\omega) &= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} Ve^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{Ve^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \\
&= V\frac{e^{-j\omega\frac{\delta}{2}} - e^{+j\omega\frac{\delta}{2}}}{j\omega} \\
&= V\delta\frac{\sin\frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}}
\end{aligned}$$

یوں وقتی دائرہ کار کے تفاعل $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \le -\frac{\delta}{2} \\ V & -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2} \\ 0 & \frac{\delta}{2} \le t < \infty \end{cases} \tag{15.62}$$

کا فوریئر بدل $\mathrm{F}(\omega)$ درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{F}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = V\delta\frac{\sin\frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}} \tag{15.63}$$

اس مثال پر مزید غور کرتے ہیں۔ شکل 15.23-الف کے تفاعل کو شکل-ب میں T فاصلے کے دورانیے پر دہراتے ہوئے دوری تفاعل $f_d(t)$ حاصل کیا گیا ہے۔ دوری تفاعل $f_d(t)$ کے فوریئر تسلسل کے عددی سر درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{c}_n = \frac{V\delta}{T}\frac{\sin\frac{n\omega_0\delta}{2}}{\frac{n\omega_0\delta}{2}} \tag{15.64}$$

شکل 15.23-ت میں لکیری طیف دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لکیری طیف کے غلاف[22] کی شکل اور مسلسل طیف کی شکل بالکل یکساں ہیں۔

---

[20] Fourier transform
[21] inverser Fourier transform
[22] envelope

اس مثال کے نتائج اور مساوات سے ظاہر ہے کہ $T \to \infty$ کرنے سے دوری تفاعل تبدیل ہو کر غیر دوری تفاعل بن جاتا ہے۔ساتھ ہی ساتھ جیسے جیسے T بڑھتا ہے ویسے ویسے طیفی لکیر قریب ہوتے ہیں اور ان کا حیطہ کم ہوتا ہے حتیٰ کہ آخر کار لکیری طیف مسلسل طیف میں تبدیل ہو جاتا ہے۔چونکہ فوریئر تسلسل مخصوص تعدد پر اشارے کا حیطہ اور زاویائی ہٹاو دیتا ہے لہٰذا فوریئر بدل بھی اشارے کی تعددی معلومات دیتا ہے۔

مثال 15.15: اکائی ضرب تفاعل $\delta(t-a)$ اور $\delta(t)$ کا فوریئر بدل حاصل کریں۔

حل:اکائی ضرب تفاعل کا فوریئر بدل تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(\omega) &= \int_0^{\infty} \delta(t-a)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-j\omega a}\end{aligned} \tag{15.65}$$

تکمل کو حل میں اکائی ضرب تفاعل کی نمونہ بندی خاصیت استعمال کی گئی۔ درج بالا میں $a=0$ پر کرنے سے اکائی ضرب تفاعل $\delta(t)$ کا فوریئر بدل ملتا ہے۔

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \tag{15.66}$$

آپ نے دیکھا کہ اکائی ضرب تفاعل $\delta(t)$ کا فوریئر بدل ایک مستقل مقدار ہے جو تعدد کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا۔یہ اکائی ضرب تفاعل کی ایک اہم خصوصیت ہے۔

مثال 15.16: تفاعل $e^{j\omega_0 t}$ کا فوریئر بدل حاصل کریں۔

حل: یہاں اگر $\mathrm{F}(\omega) = 2\pi\delta(t - t_0)$ لیا جائے تب $f(t)$ درج ذیل ہو گا

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(t - t_0)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega = e^{j\omega_0 t} \tag{15.67}$$

جہاں $\delta(t - t_0)$ کی نمونہ بندی کی خاصیت استعمال کی گئی۔یوں $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ اور $\mathrm{F}(\omega) = 2\pi\delta(t - t_0)$ فوریئر بدل جوڑی ہیں۔

مشق 15.16: تفاعل $\cos\omega t$ کا فوریئر بدل دریافت کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$

چند اہم فوریئر بدل جوڑیوں کو جدول 15.1 میں اکٹھے کیا گیا ہے۔

15.9 فوریئر بدل کے خواص

فوریئر بدل کے چند مخصوص مسئلوں کو جدول 15.2 میں پیش کیا گیا ہے۔ان میں سے مسئلہ وقتی الجھاو[23] کو ثابت کرتے ہیں۔جدول میں دیے بقایا مسئلے بھی انتہائی آسانی سے ثابت کئے جا سکتے ہیں۔

تفاعل $f(t)$ کا فوریئر بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{F}[f(t)] = \mathrm{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{15.68}$$

فرض کریں کہ

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = \mathrm{F}_1(\omega)$$
$$\mathcal{F}[f_2(t)] = \mathrm{F}_2(\omega)$$

---

[23] time convolution theorem

جدول 15.1: فوریئر بدل جوڑیاں۔

$f(t)$	$\mathcal{F}(\omega)$
A	$2\pi A\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega a}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\sin\omega_0 t$	$j\pi\delta(\omega+\omega_0)-j\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$e^{-at}u(t),\, a>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-a\lvert t\rvert}u(t),\, a>0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega_0 t\, u(t),\, a>0$	$\frac{\omega_0}{(j\omega+0)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\cos\omega_0 t\, u(t),\, a>0$	$\frac{j\omega+a}{(j\omega+0)^2+\omega_0^2}$

ہیں تب

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)\,\mathrm{d}x\right] &= \int_{t=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)\,\mathrm{d}x e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x)\int_{t=-\infty}^{\infty} f_2(t-x)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

اب اگر ہم $u=t-x$ پر کریں تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)\,\mathrm{d}x\right] &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x)\int_{t=-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-j\omega(u+x)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x)e^{-j\omega x}\,\mathrm{d}x\int_{t=-\infty}^{\infty} f_2(u)e^{-j\omega u}\,\mathrm{d}u\\ &= \mathrm{F}_1(\omega)\mathrm{F}_2(\omega)\end{aligned}$$

شکل 15.24 کو دیکھتے ہوئے مسئلہ وقتی الجھاو کہتا ہے کہ اگر $\mathrm{V}_d(\omega)=\mathcal{F}[v_d(t)]$ ، $\mathrm{H}(\omega)=\mathcal{F}[h(t)]$ اور $\mathrm{V}_0(\omega)=\mathcal{F}[v_0(t)]$ ہوں تب

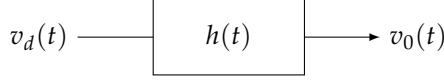
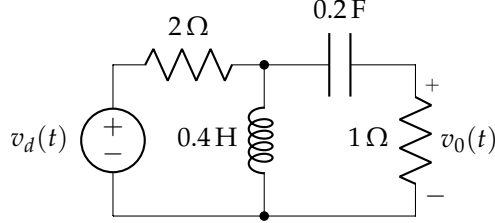
$$\mathrm{V}_0(\omega)=\boldsymbol{H}(\omega)\mathrm{V}_d(\omega) \tag{15.69}$$

ہو گا۔

$$V_d(\omega) \longrightarrow \boxed{\boldsymbol{H}(\omega)} \longrightarrow V_0(\omega) = \boldsymbol{H}(\omega) V_d(\omega)$$

شکل 15.24: وقتی الجھاو۔

جدول 15.2: فوریئر بدل کے مسئلے۔

مسئلہ	$f(t)$	$\mathcal{F}(\omega)$
خطیت	$Af(t)$	$A\mathrm{F}(\omega)$
	$f_1(t) \mp f_2(t)$	$\mathrm{F}_1(\omega) \mp \mathrm{F}_2(\omega)$
مسئلہ تناسب وقت	$f(at)$	$\frac{1}{a}\mathrm{F}\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a > 0$
مسئلہ منتقلی وقت	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}\mathrm{F}(\omega)$
ترمیم تعدد	$e^{j\omega t_0} f(t)$	$\mathrm{F}(\omega - \omega_0)$
	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(j\omega)^n \mathrm{F}(\omega)$
تفرق	$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{F}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t - x)\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{F}_1(\omega)\mathrm{F}_2(\omega)$
الجھاو	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}_1(x)\mathrm{F}_2(\omega - x)\,\mathrm{d}x$

شکل 15.25: مشق 15.17 کا دور۔

شکل 15.26: مشق 15.18 کا دور۔

مشق 15.17: شکل 15.25 میں داخلی دباو $v_d(t) = e^{-t}u(t)\,\mathrm{V}$ ، دور کا اکائی ضرب رد عمل $h(t) = e^{-2t}u(t)$ جبکہ ابتدائی معلومات صفر ہیں۔ خارجی دباو $v_0(t)$ دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)\,\mathrm{V}$

مشق 15.18: شکل 15.26 میں $v_d(t) = 42\cos 3t\,\mathrm{V}$ ہے۔ فوریئر بدل کے طریقے سے $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = 12.57\cos(10t + 86.2^\circ)\,\mathrm{V}$

15.10 مسئلہ پارسیوال

مسئلہ پارسیوال[24] کی الجبرائی صورت درج ذیل ہے۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega \tag{15.70}$$

اس تعلق کو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\omega)\mathrm{F}(-\omega)\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\omega)\mathrm{F}^*(\omega)\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

فرض کریں کہ $1\,\Omega$ کی مزاحمت میں رو $f(t)$ ہے۔اس مزاحمت میں طاقت $f^2(t)$ اور توانائی کا ضیاع $\int f^2(t)\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔مسئلہ پارسیوال کہتا ہے کہ $1\,\Omega$ کی مزاحمتی ضیاع یا تقابل پذیر ضیاع کو وقتی دائرہ کار یا تعددی دائرہ کار میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

پٹی گزار چھلنی جو $\omega_1 \le \omega \le \omega_2$ کے تعدد گزارتا ہو درج ذیل توانائی گزارے گی۔

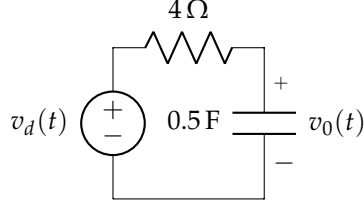
$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega \tag{15.71}$$

یوں $\Delta\omega$ کی باریک تعددی پٹی میں درج ذیل توانائی پائی جائے گی۔

$$\Delta W = \frac{1}{2\pi}\left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2 \Delta\omega \tag{15.72}$$

اگرچہ توانائی کو پارسیوال تکمل کے دونوں اطراف سے حاصل کیا جا سکتا ہے، تعددی دائرہ کار میں توانائی کسی مخصوص تعددی پٹی میں بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔

---

[24] Parseval's theorem

شکل 15.27: مثال 15.17 اور مثال 15.18 کا دور۔

مثال 15.17: شکل 15.27 میں $v_d(t) = 10e^{-4t}u(t)\,\mathrm{V}$ کی صورت میں $v_0(t)$ فوریئر طریقے سے حاصل کریں۔ اسی دور کو فوریئر طریقے سے $v_d(t) = 15\cos 5t\,\mathrm{V}$ کے لئے بھی حل کریں۔

حل: داخلی دباو $v_d(t)$ کا فوریئر بدل جدول 15.1 سے لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{V}_d(\omega) = \frac{10}{4+j\omega}$$

دور کا $\boldsymbol{H}(\omega)$ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{1}{1+j2\omega}$$

مساوات 15.69 کے تحت

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_0(\omega) &= \boldsymbol{H}(\omega)\mathrm{V}_d(\omega)\\
&= \frac{10}{(1+j2\omega)(4+j\omega)}\\
&= \frac{10}{7(j\omega+0.5)} - \frac{10}{7(j\omega+4)}
\end{aligned}$$

ہو گا۔ جدول 15.1 سے الٹ فوریئر بدل لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_0(t) = \frac{10}{7}e^{-0.5t}u(t) - \frac{10}{7}e^{-4t}u(t)\,\mathrm{V}$$

آئیں اب $v_d(t) = 15\cos 5t\,\mathrm{V}$ کا فوریئر بدل جدول سے لکھیں۔

$$\mathrm{V}_d(\omega) = 15\pi\delta(\omega-5) + 15\pi\delta(\omega+5)$$

خارجی دباو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_0(\omega) &= \boldsymbol{H}(\omega)\mathrm{V}_d(\omega)\\ &= \frac{15\pi}{1+j2\omega}[\delta(\omega-5)+\delta(\omega+5)]\end{aligned}$$

فوریئر الٹ بدل لیتے ہیں

$$\begin{aligned}v_0(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 15\pi\frac{\delta(\omega-5)+\delta(\omega+5)}{1+j2\omega}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\ &= 7.5\frac{e^{j5t}}{1+j10} + 7.5\frac{e^{-j5t}}{1-j10}\\ &= \frac{7.5e^{5t}}{\sqrt{101}e^{j84.3^\circ}} + \frac{7.5e^{-5t}}{\sqrt{101}e^{-j84.3^\circ}}\\ &= 1.493\cos(5t-84.3^\circ)\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

جہاں تکمل کو نمونہ بندی کی خاصیت سے حاصل کیا گیا۔

مثال 15.18: شکل 15.27 میں $v_d(t) = 10e^{-4t}u(t)\,\mathrm{V}$ کی صورت میں داخلی اور خارجی تقابل پذیر توانائی دریافت کریں۔

حل: اکائی اوہم داخلی توانائی حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}W_d &= \int_0^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\infty} 100e^{-8t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left.\frac{100e^{-8t}}{-8}\right|_0^{\infty}\\ &= 12.5\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

خارجی توانائی کو مسئلہ پارسیوال سے حاصل کرتے ہیں۔ گزشتہ مثال میں درج ذیل حاصل کیا گیا

$$\mathrm{V}_0(\omega) = \frac{10}{(j2\omega+1)(j\omega+4)}$$

لہذا

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{V}_0\right|^2 &= \frac{100}{(4\omega^2+1)(\omega^2+16)}\\ &= \frac{100}{63(\omega^2+0.25)} - \frac{100}{63(\omega^2+16)}\end{aligned}$$

ہو گا اور تقابل پذیر خارجی توانائی

$$\begin{aligned}W_d &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{V}_0(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega\\ &= \frac{50}{63\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2+0.5^2} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2+4^2}\right)\\ &= \frac{50}{63\pi}\left(\frac{1}{0.5}\tan^{-1}\frac{\omega}{0.5}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{\omega}{4}\bigg|_{-\infty}^{\infty}\right)\\ &= \frac{50}{63\pi}\left(\frac{\pi}{0.5}-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{25}{18}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

ہو گی۔

مثال 15.19: تفاعل $f(t) = e^{-at}u(t)$ کی اکائی اوہم توانائی دریافت کریں۔وہ انقطاعی تعدد ω_0 دریافت کریں جس سے کم تعدد کی پٹی میں 95 % توانائی پائی جاتی ہو۔

حل: اکائی اوہم توانائی حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at}u(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \qquad\qquad = \int_{0}^{\infty} e^{-2at}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{e^{-2at}}{-2a}\right|_{0}^{\infty}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2a}
\end{aligned}
$$

تفاعل کا فوریئر بدل درج ذیل ہے

$$
\mathrm{F}(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}
$$

لہٰذا

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{1}{2a}
$$

ہو گا۔ درج بالا کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ $\mathrm{F}(\omega)$ جفت تفاعل ہے لہٰذا

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2 + a^2} &= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2 + a^2} \\
&= \left.\frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\frac{\omega}{a}\right|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2a}
\end{aligned}
$$

ہم تعدد ω_0 جاننا چاہتے ہیں جس کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
\frac{0.95}{2a} &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_0}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2 + a^2} \\
&= \left.\frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\frac{\omega}{a}\right|_{0}^{\omega_0} \\
&= \frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\frac{\omega_0}{a}
\end{aligned}
$$

جس سے

$$\omega_0 = 12.706\,\text{rad}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا $95\,\%$ توانائی $0 \le \omega \le 12.706\,\text{rad}$ کی پٹی میں پائی جاتی ہے۔

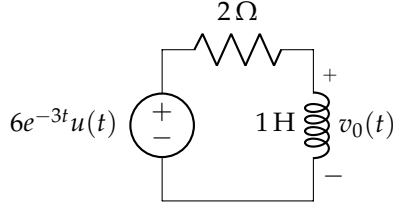
مشق 15.19: تفاعل $f(t) = e^{-4t}u(t)$ کی اکائی اوہم توانائی وقتی دائرہ کار اور تعددی دائرہ کار میں حاصل کریں۔

جواب: $125\,\text{mJ}$

مشق 15.20: تفاعل $f(t) = e^{-4t}u(t)$ کی اکائی اوہم توانائی $0 \le \omega \le 1\,\text{rad}$ کی پٹی میں حاصل کریں۔

جواب: $19.49\,\text{mJ}$

مشق 15.21: شکل 15.28 میں $v_0(t)$ کی اکائی اوہم توانائی دریافت کریں۔

جواب: $W = 3.6\,\text{J}$

شکل 15.28: مشق 15.21 کا دور۔

مثال 15.20: بے تار نشریات میں بلند تعدد $v_c(t) = A\cos\omega_c t$ کے سائن نما سواری پر سمعی اشارہ f_s سوار کیا جاتا ہے۔ سمعی اشارے کی تعدد $20\,\text{Hz} \le f_s \le 20\,000\,\text{Hz}$ ہوتی ہے جبکہ f_c کی قیمت اس کی نسبت انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔ سمعی اشارے $v_s(t)$ سے سواری اشارے کا حیطہ ترمیم کرتے ہوئے حیطہ سوار اشارہ حاصل کیا جاتا ہے جس کی الجبرائی صورت درج ذیل ہے۔

$$v(t) = [A + v_s(t)]\cos(\omega_c t) \tag{15.73}$$

اینٹینا کے ذریعہ $v(t)$ کو نشر کیا جاتا ہے۔اشارہ حاصل کرنے والا اینٹینا $v(t)$ کا دھندلا نقش حاصل کرتا ہے جس کا حیطہ نہایت کم لیکن صورت ہوبہو $v(t)$ جیسے ہوتی ہے۔

آئیں سمعی اشارہ $v_s(t)$

$$v_s(t) = \cos\omega_s t \tag{15.74}$$

اور نشر اشارہ $v(t)$

$$v(t) = [1 + \cos\omega_s t]\cos\omega_c t \tag{15.75}$$

کے لکیری طیف حاصل کریں جہاں $f_s = 1\,\text{kHz}$ ، $f_c = 1260\,\text{kHz}$ اور $A = 1$ ہیں۔پشاور شہر کے ریڈیو اسٹیشن کی نشریات $1260\,\text{kHz}$ پر ہوتی ہے۔

سمعی اشارے کے فوریئر بدل

$$\text{V}_s(\omega) = \mathcal{F}[\cos\omega_s t] = \pi\delta(\omega - \omega_s) + \pi\delta(\omega + \omega_s) \tag{15.76}$$

کو شکل 15.29-الف میں دکھایا گیا ہے۔ نشر اشارے کو درج ذیل لکھتے

$$v(t) = [1 + v_s(t)] \cos \omega_c t = \cos \omega_c t + v_s(t) \cos \omega_c t$$

ہیں جس میں $\cos \omega_c t$ کا فوریئر بدل

$$\mathcal{F}[\cos \omega_c t] = \pi\delta(\omega - \omega_c) + \pi\delta(\omega + \omega_c) \tag{15.77}$$

ہے جبکہ

$$v_s(t) \cos \omega_c t = v_s(t) \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}$$

لکھتے ہوئے فوریئر بدل کے مسئلہ ترمیم کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{F}[v_s(t) \cos \omega - ct] = \frac{1}{2} \left[\mathrm{V}_s(\omega - \omega_c) + \mathrm{V}_s(\omega + \omega_c)\right]$$

مساوات 15.76 میں دیے سمعی اشارے کا بدل استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[v_s(t) \cos \omega_c t] = \frac{\pi}{2} \big[&\delta(\omega - \omega_s - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s - \omega_c) \\ &+\delta(\omega - \omega_s + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s + \omega_c)\big]\end{aligned}$$

ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے نشر اشارے کا بدل لکھتے ہیں جسے شکل 15.29-ب میں دکھایا گیا ہے۔

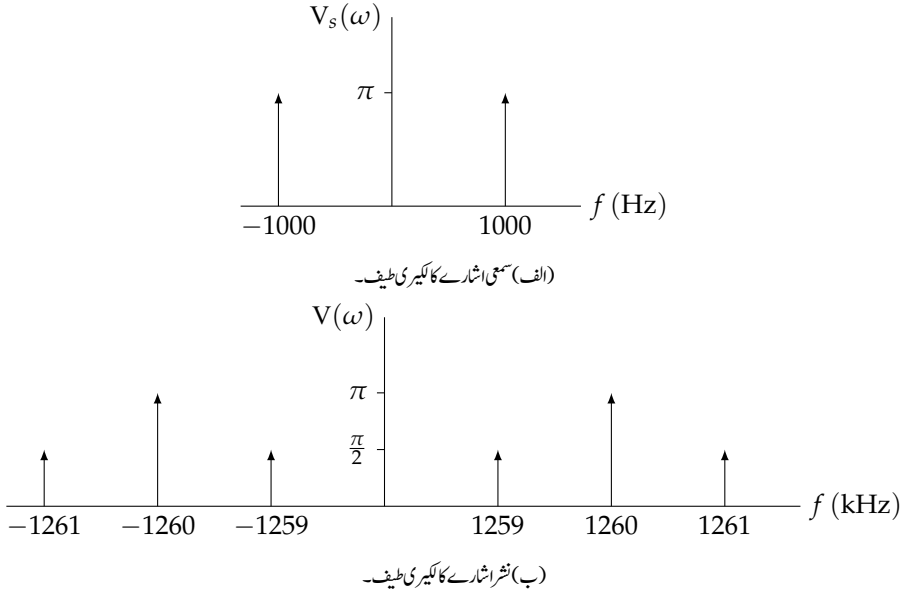
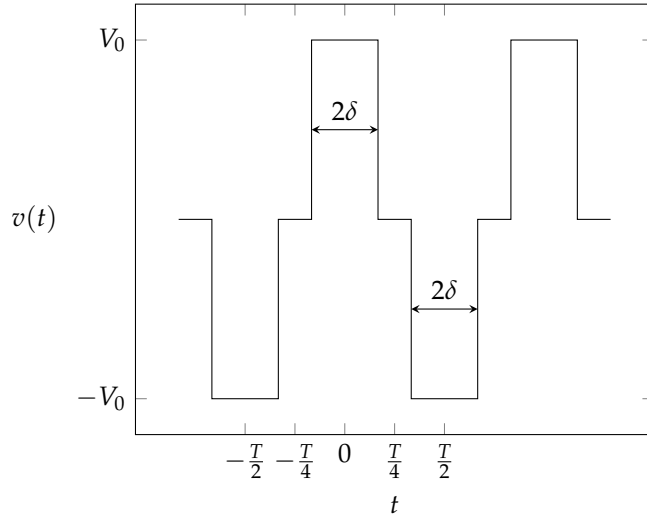
$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\omega) = \frac{\pi}{2} \big[&2\delta(\omega - \omega_c) + 2\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_s - \omega_c) \\ &+\delta(\omega + \omega_s - \omega_c) + \delta(\omega - \omega_s + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s + \omega_c)\big]\end{aligned} \tag{15.78}$$

مثال 15.21: انجنیئرنگ کی ڈگری لینے کے بعد میری پہلی ذمہ داری سائن نما انورٹر[25] کی تخلیق[26] تھی۔ انورٹر یک سمت دباو کو بدلتے دباو میں تبدیل کرتا ہے۔ غیر سائن نما انورٹر مستطیلی دباو پیدا کرتا ہے جس کو شکل 15.30 میں دکھایا گیا ہے۔ آئیں اس پر غور کریں۔

[25] inverter

[26] میں نے کام کا آغاز اسلام آباد کے نجی ادارے rwr (موجودہ نام) سے کیا جہاں میں نے سائن نما انورٹر پر ہی انجنیئرنگ تخلیق سیکھی۔

(الف) سمعی اشارے کا لکیری طیف۔

(ب) نشر اشارے کا لکیری طیف۔

شکل 15.29: مثال 15.20 کے لکیری طیف۔

شکل 15.30: مشق 15.21 کے انورٹر کا مستطیلی دباو۔

شکل میں دکھائے گئے دباو کی اوسط قیمت صفر ہے لہٰذا $a_0 = 0$ ہو گا۔ ساتھ ہی چونکہ دباو جفت ہے لہٰذا $b_n = 0$ ہوں گے۔ آئیں a_n دریافت کریں۔

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} v(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{T}\left[\int_0^{\delta} V_0\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{T}{2}-\delta}^{\frac{T}{2}} V_0\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{4V_0}{T}\left.\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right|_0^{\delta} - \frac{4V_0}{T}\left.\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right|_{\frac{T}{2}-\delta}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{4V_0}{n\omega_0 T}\sin(n\omega_0\delta) - \frac{4V_0}{n\omega_0 T}\sin\left(n\omega_0\frac{T}{2}\right) + \frac{4V_0}{n\omega_0 T}\sin[n\omega_0(\frac{T}{2}-\delta)]
\end{aligned}
$$

اس میں $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{4V_0}{n\frac{2\pi}{T}T}\sin(n\frac{2\pi}{T}\delta) - \frac{4V_0}{n\frac{2\pi}{T}T}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) + \frac{4V_0}{n\frac{2\pi}{T}T}\sin[n\frac{2\pi}{T}(\frac{T}{2}-\delta)] \\
&= \frac{2V_0}{n\pi}\sin(n\frac{2\pi}{T}\delta) - \frac{2V_0}{n\pi}\sin n\pi + \frac{2V_0}{n\pi}\sin[n\frac{2\pi}{T}(\frac{T}{2}-\delta)] \\
&= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi\delta}{T}\right) + \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(n\pi - \frac{2n\pi\delta}{T}\right)
\end{aligned}
$$

یہاں دائیں ہاتھ پر $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ استعمال کرتے ہیں۔

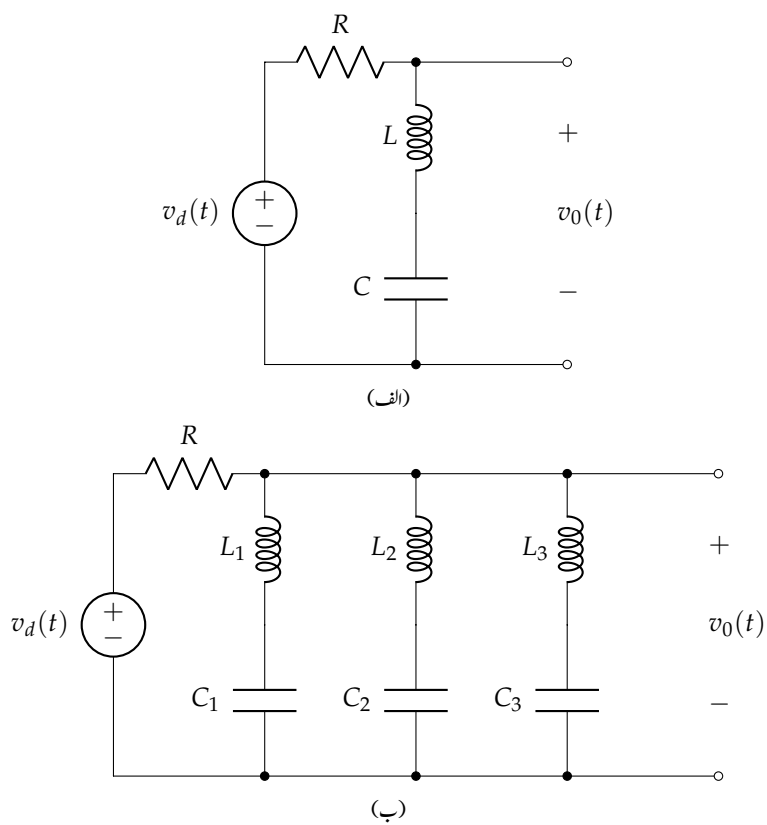
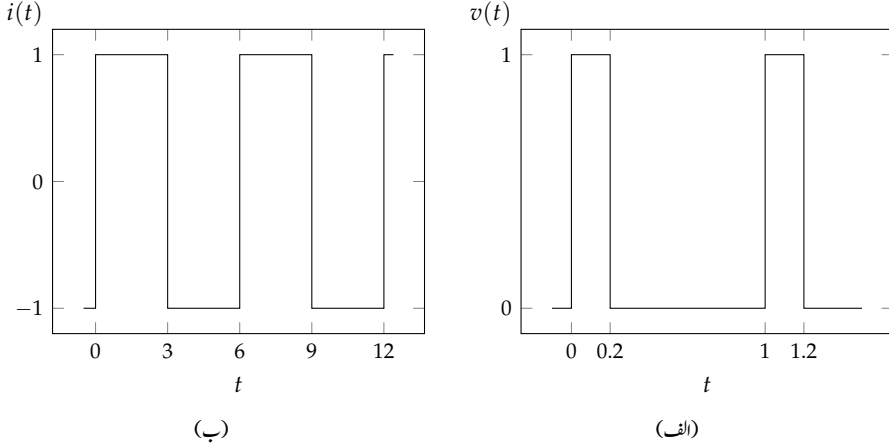
$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi\delta}{T}\right) + \frac{2V_0}{n\pi}\left[\sin n\pi\cos(\frac{2n\pi\delta}{T}) - \cos n\pi\sin(\frac{2n\pi\delta}{T})\right] \\
&= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi\delta}{T}\right) - \frac{2V_0}{n\pi}\cos n\pi\sin(\frac{2n\pi\delta}{T}) \\
&= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi\delta}{T}\right)(1-\cos n\pi)
\end{aligned}
$$

اس مساوات میں $n = 1, 2, 3, \cdots$ پر کرتے ہوئے چند عددی سر لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{4V_0}{\pi} \sin \frac{2\pi\delta}{T} \\
a_2 &= 0 \\
a_3 &= \frac{4V_0}{3\pi} \sin \frac{6\pi\delta}{T} \\
a_4 &= 0 \\
a_5 &= \frac{4V_0}{5\pi} \sin \frac{10\pi\delta}{T}
\end{aligned}
$$

ہم درج بالا عددی سر کی معلومات استعمال کرتے ہوئے δ یوں رکھ سکتے ہیں کہ مخصوص عددی سر صفر کے برابر ہو جائے مثلاً a_3 کی قیمت صفر کرنے کی خاطر $\pi = \frac{6\pi\delta}{T}$ کرنا ہو گا یعنی $\delta = \frac{T}{3}$ رکھا جائے گا۔

مثال 15.22: شکل 15.31-الف میں RLC دندانہ چھلنی دکھائی گئی ہے۔سلسلہ وار LC کی قدرتی تعدد $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ پر ان کی سلسلہ وار رکاوٹ صفر ہو جاتی ہے لہٰذا ω_0 تعدد کا اشارہ خارجی جانب نہیں پایا جاتا۔اب تصور کریں کہ $500\,\text{Hz}$ پر چلنے والے نظام کے قریب واپڈا کے $50\,\text{Hz}$ دباو پر چلنے والی مشین $50\,\text{Hz}$ اور اس کے دیگر ہارمونی تعدد کا برقی شور پیدا کرتی ہے جو $1\,\text{kHz}$ کی نظام میں مداخلت پیدا کرتی ہے۔ان میں پہلا، دوسرا اور تیسرا ہارمونی شور زیادہ مسئلہ پیدا کرتے ہیں جن سے چھٹکارا ضروری ہے۔

شکل 15.31-ب میں تین عدد LC جوڑیاں استعمال کی گئی ہیں جن میں $2\pi f_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$ رکھتے ہوئے $f_1 = 50\,\text{Hz}$ کو رد کیا جاتا ہے۔اسی طرح $f_2 = 100\,\text{Hz}$ کی دوسری ہارمونی اور $f_3 = 150\,\text{Hz}$ کی تیسری ہارمونی کو $2\pi f_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$ اور $2\pi f_3 = \frac{1}{\sqrt{L_3C_3}}$ چنتے ہوئے رد کیا جاتا ہے۔

شکل 15.31: مثال 15.22 کی دندانہ چھلنی۔

شکل 15.32: سوال 15.1 کی موج۔

سوالات

سوال 15.1: شکل 15.32-الف کے عددی سر حاصل کرتے ہوئے اس کی تکونیاتی فوریئر تسلسل لکھیں۔

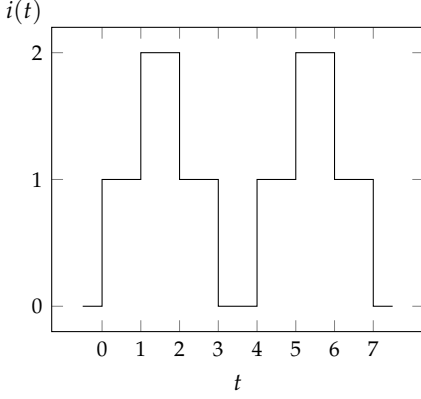
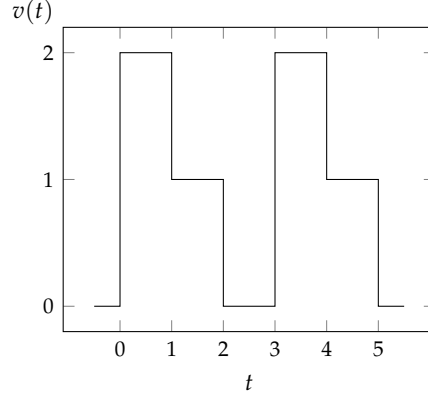
جوابات: $a_0 = 0.2$ ، $a_n = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{2\pi n}{5}$ ، $b_n = \frac{1}{n\pi}(1-\cos\frac{2\pi n}{5})$ ،

$$
\begin{aligned}
v(t) = 0.2 &+ 0.3027\cos(2\pi t) + 0.2199\sin(2\pi t) + 0.0935\cos(4\pi t) \\
&+ 0.2879\sin(4\pi t) - 0.0623\cos(6\pi t) + 0.1919\sin(6\pi t) + \cdots
\end{aligned}
$$

سوال 15.2: شکل 15.32-ب کے تکونی فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔ تسلسل کے شروع کے چند ارکان لکھیں۔

جوابات: $a_0 = 0$ ، $a_n = 0$ ، $b_n = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$ ،

$$
i(t) = \frac{4}{\pi}[\sin(\frac{\pi}{2}t) + \frac{1}{3}\sin(\frac{3\pi}{2}t) + \frac{1}{5}\sin(\frac{5\pi}{2}t) + \cdots]
$$

سوال 15.3: شکل 15.33-الف کے عددی سر حاصل کرتے ہوئے اس کی تکونیاتی فوریئر تسلسل لکھیں۔

شکل 15.33: سوال 15.3 کی موج۔

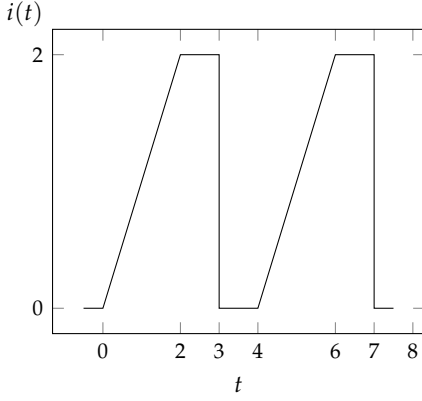
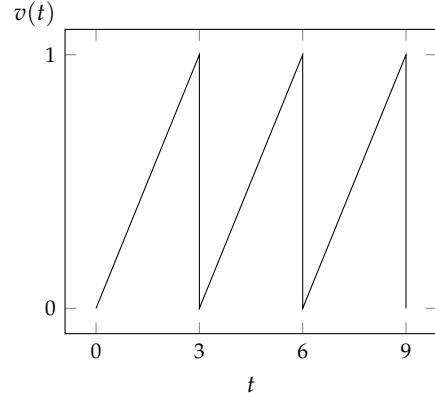
جوابات:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_n &= 0 \\
b_n &= \tfrac{3}{\pi}, \tfrac{3}{2\pi}, 0, \tfrac{3}{4\pi}, \tfrac{3}{5\pi}, 0, \tfrac{3}{7\pi}, \cdots \\
i(t) &= 1 + \tfrac{3}{\pi}(\sin \tfrac{2\pi t}{3} + \tfrac{1}{2} \sin \tfrac{4\pi t}{3} + \tfrac{1}{4} \sin \tfrac{8\pi t}{3} + \cdots)
\end{aligned}
$$

سوال 15.4: شکل 15.33-ب کے تکونی فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔ تسلسل کے شروع کے چند ارکان لکھیں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_n &= -\tfrac{2}{\pi}, 0, \tfrac{2}{3\pi}, 0, -\tfrac{2}{5\pi}, 0, \tfrac{2}{7\pi}, \cdots \\
b_n &= \tfrac{2}{\pi}, 0, \tfrac{2}{3\pi}, 0, \tfrac{2}{5\pi}, 0, \tfrac{2}{7\pi}, \cdots \\
i(t) &= 1 - \tfrac{2}{\pi}(\cos \tfrac{\pi t}{2} - \sin \tfrac{\pi t}{2} - \tfrac{1}{3} \cos \tfrac{3\pi t}{2} - \tfrac{1}{3} \sin \tfrac{\pi t}{2} + \cdots)
\end{aligned}
$$

سوال 15.5: شکل 15.34-الف کے عددی سر حاصل کرتے ہوئے اس کی تکونیاتی فوریئر تسلسل لکھیں۔

شکل 15.34: سوال 15.5 کی موج۔

جوابات:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{9}{4} \\ a_n &= 0 \\ b_n &= -\tfrac{9}{2n\pi} \\ v(t) &= \tfrac{9}{4} - \tfrac{9}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \sin \tfrac{2n\pi t}{3} \end{aligned}$$

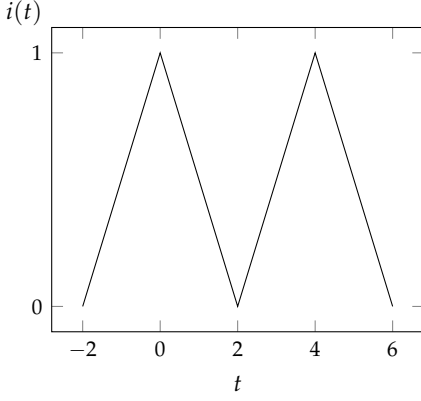
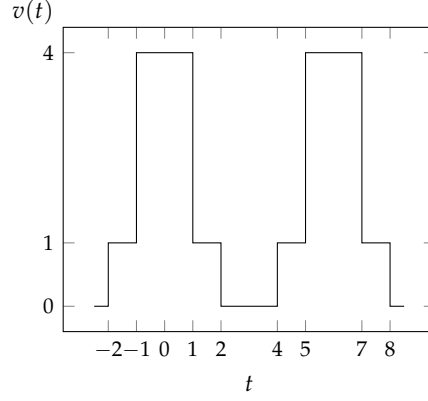
سوال 15.6: شکل 15.34-ب کے تکونی فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

جوابات:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_n &= -\tfrac{2}{\pi}(1+\tfrac{2}{\pi}), \tfrac{2}{3\pi}(1-\tfrac{2}{3\pi}), -\tfrac{2}{5\pi}(1+\tfrac{2}{5\pi}), \tfrac{2}{7\pi}(1-\tfrac{2}{7\pi}), -\cdots \\ b_n &= 0, \tfrac{1}{\pi}, 0, -\tfrac{1}{2\pi}, 0, \tfrac{1}{3\pi}, 0, -\cdots \end{aligned}$$

سوال 15.7: شکل 15.35-الف کے عددی سر حاصل کریں۔

(الف)

(ب)

شکل 15.35: سوال 15.7 کی موج۔

جوابات:

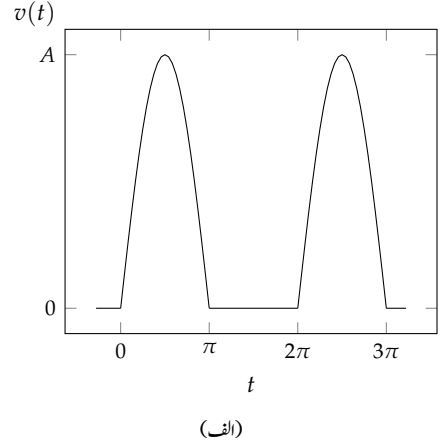
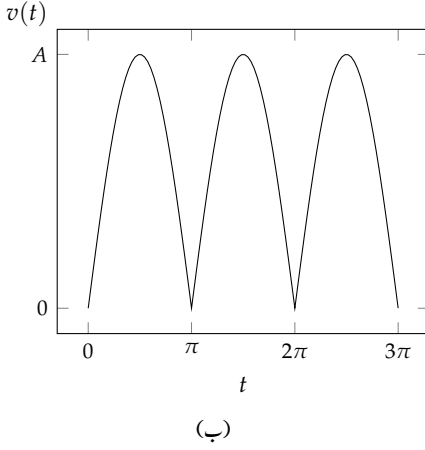
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{5}{3}\\
a_n &= \tfrac{2}{n\pi}\left(\sin\tfrac{2n\pi}{3} + 3\sin\tfrac{n\pi}{3}\right)\\
b_n &= 0
\end{aligned}
$$

سوال 15.8: شکل 15.35-ب کے تکونی فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{1}{3}\\
a_n &= \tfrac{3}{n^2\pi^2}\left(1 - \cos\tfrac{2n\pi}{3}\right)\\
b_n &= 0
\end{aligned}
$$

سوال 15.9: نصف لہر سمت کار[27] کے ذریعہ بدلتے دباو کے مثبت حصے حاصل کرتے ہوئے شکل 15.36-الف حاصل ہوتا ہے۔اس کا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

[27] half wave rectifier

شکل 15.36: سوال 15.9 کی موج۔

جواب: $v(t) = \frac{A}{\pi} + \frac{A}{2}\sin\omega t - \sum_{\substack{n=2\\ \text{جفت}}}^{\infty} \frac{2A}{(n^2-1)\pi}\cos n\omega t$

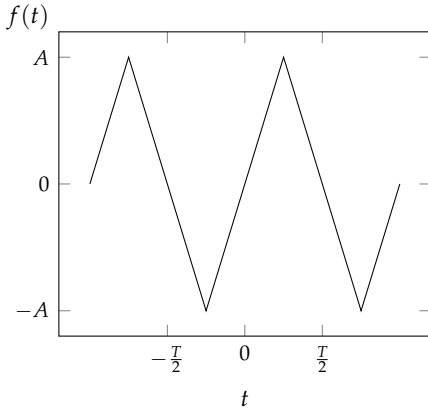
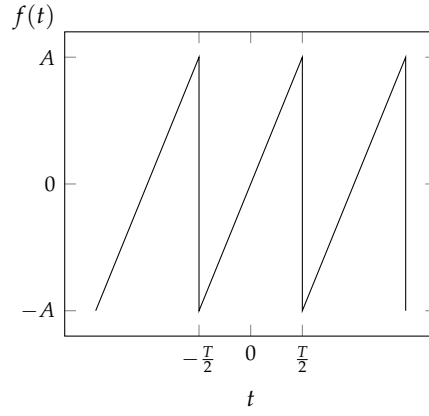
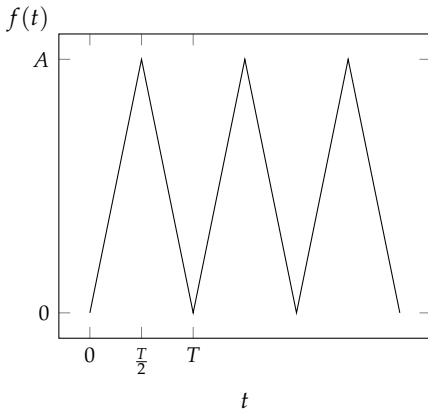
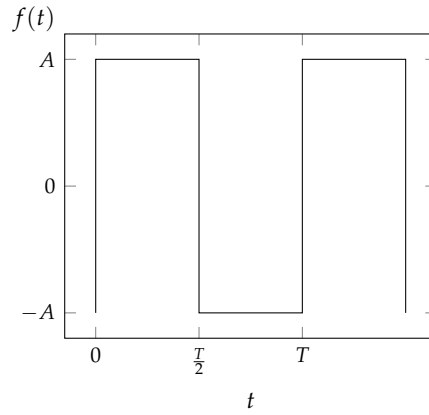
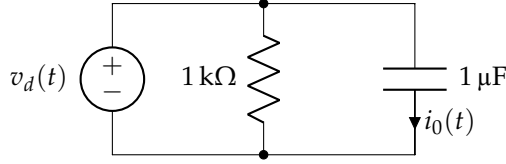
سوال 15.10: مکمل لہر سمت کار[28] کے ذریعہ بدلتے دباو کے مثبت حصے حاصل کرتے ہوئے شکل 15.36-ب حاصل ہوتا ہے۔اس کا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب: $v(t) = \frac{2A}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{(4n^2-1)\pi}\cos n\omega t$

سوال 15.11: شکل 15.37-الف میں دیے تفاعل کا فوریئر تسلسل لکھیں۔

جواب: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A}{n\pi}\sin n\omega t$

سوال 15.12: شکل 15.37-ب میں دیے تفاعل کا فوریئر تسلسل لکھیں۔

جواب: $f(t) = \sum_{\substack{n=1\\ \text{طاق}}}^{\infty} \frac{8A}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin n\omega t$

شکل 15.37: سوال 15.11 کی موج۔

شکل 15.38: سوال 15.13 کی موج۔

شکل 15.39: سوال 15.15 کا دور۔

سوال 15.13: شکل 15.38-الف میں دیے تفاعل کا فوریئر تسلسل لکھیں۔

جواب: $f(t) = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{طاق}}}^{\infty} \frac{4A}{n\pi} \sin n\omega t$

سوال 15.14: شکل 15.38-ب میں دیے تفاعل کا فوریئر تسلسل لکھیں۔

جواب: $f(t) = \frac{A}{2} - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0 \\ \text{طاق}}}^{\infty} \frac{2A}{n^2\pi^2} e^{jn\omega t}$

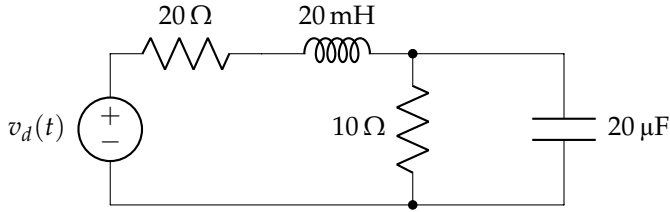
سوال 15.15: شکل 15.39 میں داخلی دباو $v_d(t) = 10\cos(1000t) + 5\cos(2000t)\,\text{V}$ ہے۔ رو $i_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $i_0(t) = 7.07\cos(1000t + 45^\circ) + 4.47\cos(2000 + 26.6^\circ)\,\text{A}$

سوال 15.16: شکل 15.39 میں داخلی دباو چکور موج ہے جس کا حیطہ $10\,\text{V}$ اور جس کا دوری عرصہ $T = 5\,\text{ms}$ ہے۔ اس داخلی دباو کو شکل 15.38-الف میں دکھایا گیا ہے۔ رو $i_0(t)$ حاصل کریں۔

سوال 15.17: ایک دور کے داخلی دباو اور داخلی رو درج ذیل ہیں۔ دور کو منتقل طاقت حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} v_d(t) &= 10 + 6\cos(100t + 20^\circ) + 4\cos(300t + 80^\circ)\,\text{V} \\ i_d(t) &= 2 - 3\cos(100t - 40^\circ) + 2\cos(200t + 30^\circ) \\ &\quad + 3\cos(300t + 60^\circ) + 8\cos(400t + 40^\circ)\,\text{A} \end{aligned}$$

[28] full wave rectifier

شکل 15.40: سوال 15.18 کا دور۔

جواب: 21.14 W

سوال 15.18: شکل 15.40 میں دور کو مہیا کل طاقت دریافت کریں۔ داخلی دباو درج ذیل ہے۔

$$v_d(t) = 40 + 30\cos(314t + 45°) + 20\cos(628 - 60°)\ \text{V}$$

جواب: 68.29 W

سوال 15.19: درج ذیل تفاعل کے فوریئر بدل حاصل کریں۔

$$f(t) = e^{-3t}\cos 6t\, u(t)$$
$$f(t) = e^{-3t}\sin 6t\, u(t)$$

جوابات:

$$\text{F}(\omega) = \frac{-(j\omega+3)}{\omega^2 - 6j\omega - 45}$$
$$\text{F}(\omega) = \frac{-6}{\omega^2 - 6j\omega - 45}$$

سوال 15.20: درج ذیل تفاعل کے فوریئر بدل حاصل کریں۔

$$f(t) = e^{-2|t|}\cos 4t$$

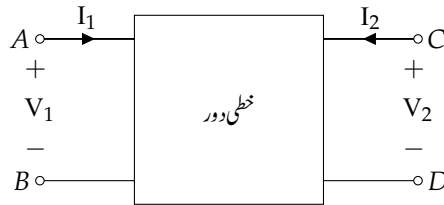
جوابات:

$$\text{F}(\omega) = \frac{-(j2\omega+4)}{\omega^2 - j4\omega - 20}$$

باب 16

چار سرا دوار کے ریاضی نمونے

حصهفراوانی نمونہ شکل 16.1 میں چار سروں والا ڈبہ دور[1] دکھایا گیا ہے جس کی اندرونی ساخت کے بار میں ہم کچھ نہیں جانتے۔دور کے داخلی سروں کو بائیں ہاتھ اور خارجی سروں کو دائیں ہاتھ دکھایا جاتا ہے لہٰذا AB داخلی اور CD خارجی سرے ہیں۔داخلی اور خارجی سروں پر دباو کے قطب اور رو کی سمتیں دکھائی گئی ہیں۔یوں نچلے سروں کو حوالہ سرا لیا جاتا ہے اور دونوں اطراف سے دور میں رو داخل ہوتی ہے۔

داخلی متغیرات مثلاً I_1 اور V_1 کو زیر نوشت میں 1 سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ خارجی متغیرات کو زیر نوشت میں 2 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ڈبہ دور خطی دور ہے جس میں غیر تابع منبع نہیں پایا جاتا لہٰذا I_1 اور I_2 حاصل

شکل 16.1: چار سروں والا دور۔

[1] block diagram

کرتے ہوئے مسئلہ خطی میل استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یوں V_1 اور V_2 سے پیدا داخلی جانب رو کا مجموعہ I_1 ہو گا اور اسی طرح خارجی جانب دونوں اطراف کے دباو سے پیدا رو کا مجموعہ I_2 ہو گا یعنی

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \end{aligned} \tag{16.1}$$

جہاں y_{11} ، y_{12} وغیرہ فراوانی مستقل ہیں جنہیں سیمنز S میں ناپا جاتا ہے۔ان مساوات کو قالب کی صورت میں لکھتے ہیں۔ y_{11} ، y_{12} ، y_{21} اور y_{22} کو فراوانی مقدار Y کہتے ہیں۔اگر Y کی قیمتیں معلوم ہوں تب ڈبہ دور کی خارجی بالمقابل داخلی تعلقات مکمل طور پر تعین کی جا سکتی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{16.2}$$

مساوات 16.1 میں خارجی سروں کو قصر دور کرنے سے $V_2 = 0$ ہو گا اور یوں y_{11} کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

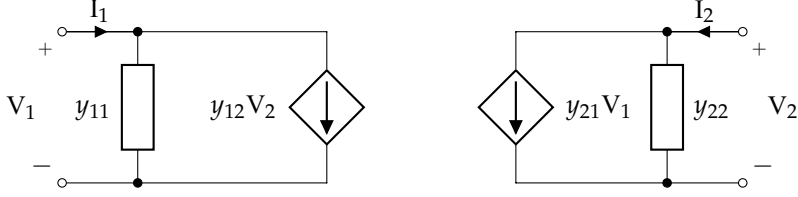
$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \tag{16.3}$$

y_{11} کو قصر دور داخلی فراوانی[2] کہتے ہیں۔بقایا مقدار بھی اسی طرح حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y_{12} &= \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0} \\ y_{21} &= \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \\ y_{22} &= \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} \end{aligned} \tag{16.4}$$

y_{12} اور y_{21} کو قصر دور فراوانی نما[3] کہا جاتا ہے جبکہ y_{22} کو قصر دور خارجی فراوانی[4] کہتے ہیں۔درج بالا مساوات کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نا معلوم دور کے Y مقدار تجرباتی طور ناپے جا سکتے ہیں۔ مساوات 16.2 ڈبہ دور کا فراوانی نمونہ[5] ہے۔

---

short-circuit input admittance[2]
short-circuit transadmittance[3]
short-circuit output admittance[4]
admittance model[5]

شکل 16.2: چار سر فراوانی مساوی دور۔

مساوات 16.1 کو شکل 16.2 ظاہر کرتی ہے۔یوں کسی بھی دور کے فراوانی مستقل حاصل کرنے کے بعد اس کو شکل 16.2 سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔یاد رہے کہ اس شکل میں y_{11} اور y_{22} فراوانی ہے نا کہ مزاحمت لہٰذا اوہم کا قانون لکھتے ہوئے خیال رکھیں۔

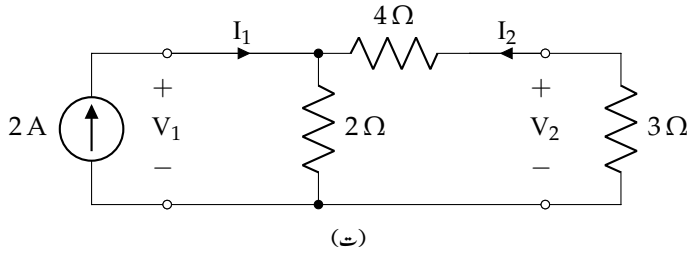
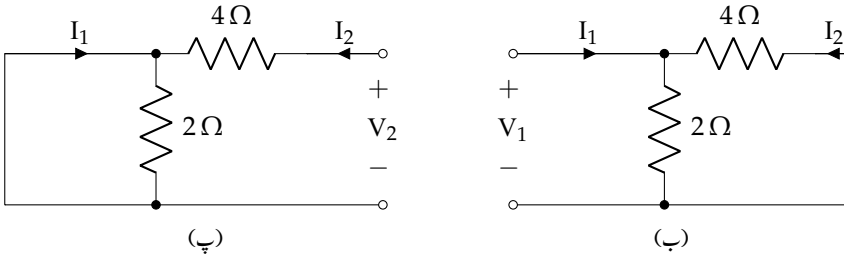
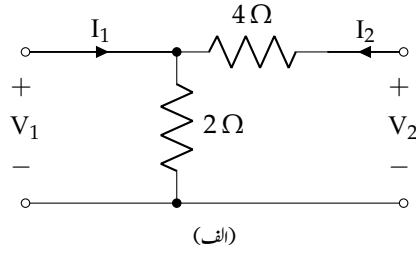
مشق 16.1: شکل 16.2 کے داخلی اور خارجی مساوات لکھ کر مساوات 16.1 حاصل کریں۔

مثال 16.1: شکل 16.3 میں دور دکھایا گیا ہے۔اس کے Y مقدار دریافت کریں۔

حل: y_{11} حاصل کرنے کی خاطر خارجی سروں کو قصر دور کرتے ہوئے داخلی جانب V_1 مسلط کرتے ہیں۔شکل-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے جہاں سے

$$I_1 = \frac{V_1}{\frac{2\times4}{2+4}} = \frac{3}{4}V_1$$

لکھتے ہوئے

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} = \frac{3}{4}\,\text{S}$$

شکل 16.3: مثال 16.1 کا دور۔

حاصل ہوتا ہے۔چونکہ y_{11} اور y_{21} کے حصول میں V_2 کو قصر دور کیا جاتا ہے لہٰذا یہ دونوں شکل-ب سے حاصل ہوں گے۔دور کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$I_2 = -\frac{V_1}{4}$$

لہٰذا

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} = -\frac{1}{4}\,S$$

ہو گا۔

y_{12} اور y_{22} کے حصول میں $V_1 = 0$ کرنا ہو گا لہٰذا داخلی سروں کو قصر دور کرتے ہوئے شکل-پ حاصل کیا گیا ہے۔ اس میں $2\,\Omega$ کے مزاحمت کو ہٹایا جا سکتا ہے البتہ میں نے اس کو شکل میں دکھایا ہے۔اس دور سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$I_1 = -\frac{V_2}{4}$$

لہٰذا

$$y_{12} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{V_1=0} = -\frac{1}{4}\,S$$

ہو گا۔شکل-پ سے درج ذیل

$$I_2 = \frac{V_2}{4}$$

لکھتے ہوئے

$$y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0} = \frac{1}{4}\,S$$

حاصل ہوتا ہے۔

ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 16.1 لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{3}{4}V_1 - \frac{1}{4}V_2 \\ I_2 &= -\frac{1}{4}V_1 + \frac{1}{4}V_2 \end{aligned} \tag{16.5}$$

جنہیں قالب کی شکل میں لکھتے ہیں جو اس دور کو مکمل طور ظاہر کرتی ہے۔

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

اس مثال کو مکمل کرنے کی غرض سے شکل 16.3-الف کے داخلی جانب منبع رو اور خارجی جانب $3\,\Omega$ نسب کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ شکل-ت میں اسے دکھایا گیا ہے جہاں

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\,A \\ V_2 &= -3I_2 \end{aligned}$$

ہیں۔ انہیں مساوات 16.5 میں پر کرتے ہوئے

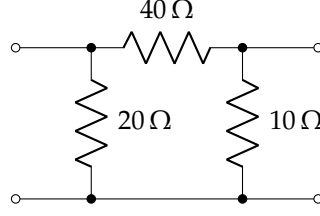
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3}+\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ملتا ہے جو عین کرخوف مساوات جوڑ ہیں۔ ان سے

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{28}{9}\,V \\ V_2 &= \frac{4}{3}\,V \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مشق 16.2: شکل 16.4 میں دیے دور کے Y مقدار دریافت کریں۔

جوابات: $y_{11} = \frac{3}{40}$ ، $y_{12} = -\frac{1}{40}$ ، $y_{21} = -\frac{1}{40}$ اور $y_{22} = \frac{1}{8}$

شکل 16.4: مشق 16.2 کا دور۔

مشق 16.3: شکل 16.4 میں داخلی جانب $3\,\mathrm{A}$ کا منبع رو نسب کیا جاتا ہے جبکہ خارجی جانب $30\,\Omega$ کا مزاحمت نسب کیا جاتا ہے۔ گزشتہ مشق کے Y مقدار استعمال کرتے ہوئے I_2 دریافت کریں۔

جواب: $\mathrm{I}_2 = -\frac{2}{9}\,\mathrm{A}$

16.1 رکاوٹی نمونہ

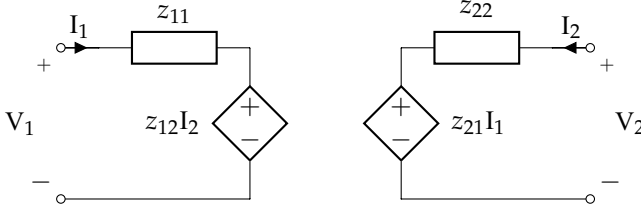
گزشتہ حصے میں ہم نے بے منبع دور کو فراوانی نمونے سے ظاہر کیا۔اس حصے میں دور کے داخلی دباو V_1 اور خارجی دباو V_2 کو داخلی رو I_1 اور خارجی رو I_2 کا پیدا کردہ دباو تصور کرتے ہیں۔یوں دور کا **رکاوٹی نمونہ**[6] حاصل ہوتا ہے یعنی

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}_1 &= z_{11}\mathrm{I}_1 + z_{12}\mathrm{I}_2 \\
\mathrm{V}_2 &= z_{21}\mathrm{I}_1 + z_{22}\mathrm{I}_2
\end{aligned}
\tag{16.6}
$$

یا

$$
\begin{bmatrix} \mathrm{V}_1 \\ \mathrm{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_1 \\ \mathrm{I}_2 \end{bmatrix}
\tag{16.7}
$$

---

[6] impedance model

شکل 16.5: چار سر رکاوٹی مساوی دور۔

بالکل Y کی طرح Z مقدار تجرباتی طور حاصل کئے جا سکتے ہیں یعنی

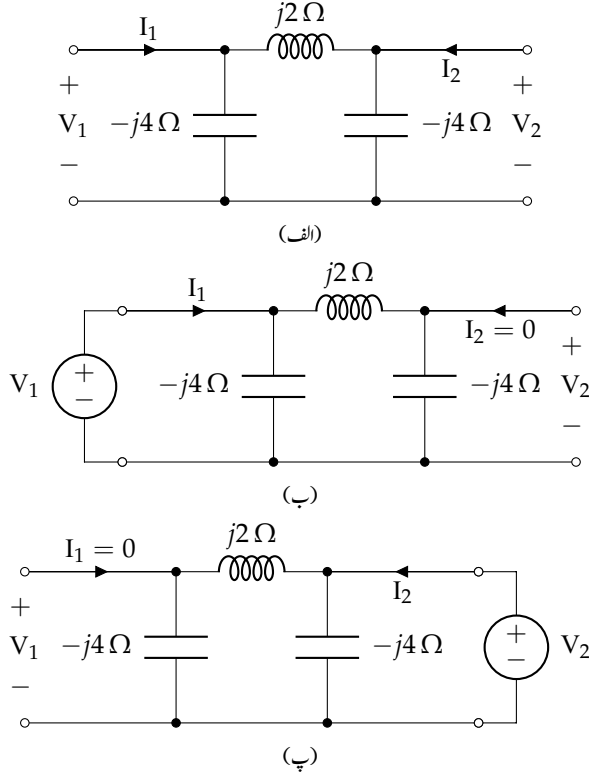
$$\begin{aligned}
z_{11} &= \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \\
z_{12} &= \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \\
z_{21} &= \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \\
z_{22} &= \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}
\end{aligned} \tag{16.8}$$

یاد رہے کہ رو کو صفر کرنے کی خاطر دور کو کھلے سر کیا جاتا ہے۔اس طرح z_{11} کو **کھلے سر داخلی رکاوٹ**[7]، z_{12} اور z_{21} کو **کھلے سر رکاوٹ نما**[8] اور z_{22} کو **کھلے سر خارجی رکاوٹ**[9] کہتے ہیں۔

مساوات 16.6 کو شکل 16.5 ظاہر کرتی ہے لہٰذا کسی بھی دور کے رکاوٹی مستقل کے حصول کے بعد اس کو شکل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

مشق 16.4: شکل 16.5 سے مساوات 16.6 حاصل کریں۔

---

[7] open-circuit input impedance
[8] open-circuit transimpedance
[9] open-circuit output impedance

شکل 16.6: مثال 16.2 کا دور۔

مثال 16.2: شکل 16.6-الف کے دور کے Z مقدار معلوم کریں۔

حل: شکل 16.6-ب میں داخلی سروں پر V_1 مسلط کی گئی ہے۔ خارجی سروں کو کھلے دور رکھ کر $I_2 = 0$ کیا گیا ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$V_1 = I_1 \left[\frac{-j4(j2 - j4)}{-j4 + j2 - j4} \right] = -j\frac{4}{3} I_1$$

جس سے

$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{-j4(j2-j4)}{-j4+j2-j4} = -j\frac{4}{3}$$

اور

$$I_1 = j\frac{3}{4}V_1$$

حاصل ہوتے ہیں۔ شکل-ب سے کھلے دور خارجی دباو کو تقسیم دباو کے کلیے سے حاصل کرتے ہیں۔

$$V_2 = \frac{-j4}{j2-j4}V_1 = 2V_1$$

یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{2V_1}{j\frac{3}{4}V_1} = -j\frac{8}{3}$$

شکل 16.6-پ میں خارجی سروں پر دباو مسلط کرتے ہوئے داخلی سروں کو کھلے سر رکھا گیا ہے جس سے $I_1 = 0$ رکھا گیا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے V_1 حاصل کرتے ہیں۔

$$V_1 = \frac{-j4}{j2-j4}V_2 = 2V_2$$

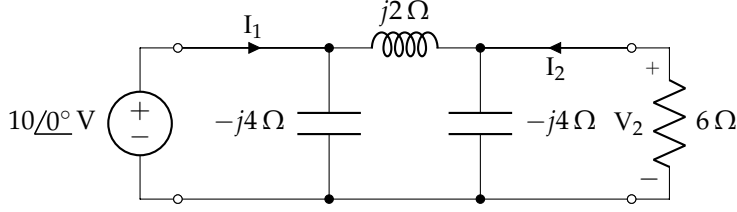
خارجی رو درج ذیل ہے۔

$$I_2 = \frac{V_2}{-j4} + \frac{V_2}{j2-j4} = j\frac{3}{4}V_2$$

اس طرح

$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{2V_2}{j\frac{3}{4}V_2} = -j\frac{8}{3}$$

ہو گا۔ شکل-پ سے z_{22} لکھتے ہیں۔

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{-j4(j2-j4)}{-j4+j2-j4} = -j\frac{4}{3}$$

شکل 16.7: مثال 16.3 کا دور۔

ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے شکل-الف کے دور کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\frac{4}{3} & -j\frac{8}{3} \\ -j\frac{8}{3} & -j\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{16.9}$$

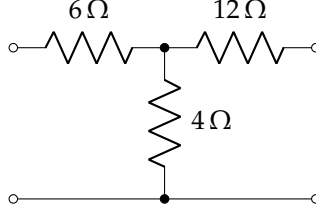
یہاں تسلی کر لیں کہ دور کے خارجی سروں کو کھلے دور رکھتے ہوئے داخلی رکاوٹ z_{11} ہے۔اسی طرح داخلی سروں کو کھلے سر رکھتے ہوئے خارجی سروں پر رکاوٹ z_{22} ہے۔

مثال 16.3: شکل 16.6-الف کے داخلی جانب $V_1 = 10\underline{/0^\circ}\,V$ نسب کرتے ہوئے خارجی جانب $6\,\Omega$ بوجھ ڈالا جاتا ہے۔اس دور کو شکل 16.7 میں دکھایا گیا ہے۔دور کو حل کریں۔

حل: گزشتہ مثال میں دور کے Z مقدار حاصل کرتے ہوئے مساوات 16.9 حاصل کی گئی۔شکل 16.7 میں

$$\begin{aligned} V_1 &= 10\underline{/0^\circ} \\ V_2 &= -6I_2 \end{aligned}$$

ہیں جنہیں مساوات 16.9 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} -j\frac{4}{3} & -j\frac{8}{3} \\ -j\frac{8}{3} & 6-j\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\underline{/0^\circ} \\ 0 \end{bmatrix}$$

شکل 16.8: مشق 16.5 کا دور۔

یہ مساوات کرخوف دائری مساوات ہیں جن سے درج ذیل رو حاصل ہوتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
I_1 &= 6.39\underline{/43.8^\circ}\ \text{A}\\
I_2 &= 2.77\underline{/146.3^\circ}\ \text{A}
\end{aligned}
$$

مشق 16.5: شکل 16.8 کے رکاوٹی مقدار Z حاصل کریں۔

جوابات: $z_{11}=10$ ، $z_{12}=4$ ، $z_{21}=4$ اور $z_{22}=12$

16.2 دوغلائی نمونہ

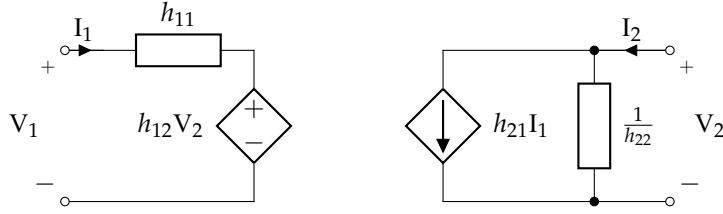
چار سر دور میں کل چار متغیرات پائے جاتے ہیں یعنی V_1 ، V_2 ، I_1 اور I_2 جن میں سے کسی دو کو غیر تابع اور بقایا دو کو تابع متغیرات تصور کیا جا سکتا ہے۔فراوانی نمونے میں دباو کو غیر تابع متغیرات تصور کیا جاتا ہے جبکہ رکاوٹی نمونے میں رو کو غیر تابع متغیرات تصور کیا جاتا ہے۔دوغلائی نمونے میں I_1 اور V_2 کو غیر تابع متغیرات تصور کیا جاتا ہے جبکہ I_2 اور V_1 کو تابع متغیرات تصور کیا جاتا ہے۔یوں دوغلائی نمونے[10] کو

$$
\begin{aligned}
V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2\\
I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2
\end{aligned}
\tag{16.10}
$$

---

[10] hybrid model

شکل 16.9: چار سر دوغلائی مساوی دور۔

یا

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{16.11}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \\ h_{12} &= \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0} \\ h_{21} &= \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} \\ h_{22} &= \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0} \end{aligned} \tag{16.12}$$

h_{11} ، h_{12} ، h_{21} اور h_{22} بالترتیب **قصر دور داخلی رکاوٹ**[11] ، **کھلے سر الٹ افزائش دباو**[12] ، **قصر دور افزائش رو**[13] اور **کھلے سر خارجی فراوانی**[14] ہیں۔

مساوات 16.10 کو شکل 16.9 ظاہر کرتی ہے۔چونکہ h_{11} فراوانی ہے لہٰذا اس شکل میں $\frac{1}{h_{22}}$ استعمال کیا گیا ہے جو کہ رکاوٹ ہو گا۔

short-circuit input impedance[11]
open-circuit reverse voltage gain[12]
short-circuit current gain[13]
open-circuit output admittance[14]

مشق 16.6: شکل 16.9 سے مساوات 16.10 حاصل کریں۔

مشق 16.7: شکل 16.8 کے دوغلائی مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $h_{11} = 9$ ، $h_{12} = \frac{1}{4}$ ، $h_{21} = -\frac{1}{4}$ اور $h_{22} = \frac{1}{16}$

16.3 ترسیلی نمونہ

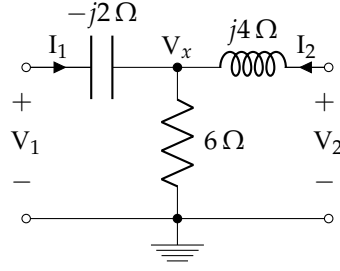
ترسیلی نمونے[15] کے مساوات درج ذیل ہیں

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_1 &= A\mathrm{V}_2 - B\mathrm{I}_2 \\ \mathrm{I}_1 &= C\mathrm{V}_2 - D\mathrm{I}_2 \end{aligned} \tag{16.13}$$

جن کو قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \mathrm{V}_1 \\ \mathrm{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{V}_2 \\ -\mathrm{I}_2 \end{bmatrix} \tag{16.14}$$

---

[15] transmission model

شکل 16.10: مثال 16.4 کا دور۔

$ABCD$ کو تجرباتی طور حاصل کرنے کی ترکیب لکھتے ہیں۔

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}$$
$$B = \left.\frac{V_1}{-I_1}\right|_{V_2=0}$$
$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} \tag{16.15}$$
$$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}$$

A ، B ، C اور D بالترتیب کھلے سر تناسب دباو، منفی قصر دور رکاوٹ نما، کھلے سر فراوانی نما اور منفی تناسب رو ہیں۔

مثال 16.4: شکل 16.10 میں دیے دور کے $ABCD$ معلوم کریں۔

حل: خارجی سروں کو کھلے سر کرتے ہوئے A حاصل کرتے ہیں۔ تقسیم دباو کے کلیے سے

$$V_2 = \frac{6}{6-j2}V_1$$

لکھے ہوئے

$$A=\left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}=1-\frac{j}{3}$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح خارجی سروں کو کھلے سر رکھتے ہوئے I_1 کی مساوات لکھتے

$$I_1=\frac{V_1}{6-j2}$$

ہوئے

$$C=\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}=\frac{\frac{V_1}{6-j2}}{\frac{6}{6-j2}V_1}=\frac{1}{6}$$

حاصل ہوتا ہے۔خارجی سروں کو قصر دور کرتے ہوئے B اور D حاصل ہوں گے۔جوڑ V_x پر کرخوف مساوات رو لکھتے

$$\frac{V_x-V_1}{-j2}+\frac{V_x}{6}+\frac{V_x}{j4}=0$$

ہوئے

$$V_x=\frac{6j}{2+3j}V_1$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$I_2=-\frac{V_x}{j4}=-\frac{\frac{6j}{2+3j}V_1}{j4}=(-\frac{3}{13}+j\frac{9}{26})V_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں

$$B=-\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0}=-\frac{1}{-\frac{3}{13}+j\frac{9}{26}}=-\frac{4}{3}-j3$$

ہو گا۔تقسیم رو سے I_2 حاصل کرتے ہیں

$$I_2=-\frac{6}{6+j4}I_1$$

جس سے

$$D = -\frac{I_1}{I_2}\bigg|_{V_2=0} = 1 + j\frac{2}{3}$$

حاصل ہوتا ہے۔

16.4 چار سر ادوار کے باہمی جوڑ

عموماً بڑا نظام متعدد چھوٹے حصوں پر مشتمل ہوتا ہے۔چھوٹے حصے پر مکمل توجہ دینا زیادہ آسان ہوتا ہے۔انفرادی چھوٹے حصوں کو مختلف طریقوں سے جوڑ کر مکمل نظام تخلیق دیا جاتا ہے۔ہر حصے کو چار سر دور تصور کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ انہیں کس طرح آپس میں جوڑا جاتا ہے۔اس حصے میں متوازی، سلسلہ وار اور زنجیری جوڑ پر غور کیا جائے گا۔

شکل 16.11 میں دو عدد چار سر ادوار کو متوازی جوڑا گیا ہے۔ہم فرض کرتے ہیں کہ انہیں متوازی جوڑنے سے انفرادی حصے کی کارکردگی تبدیل نہیں ہوتی۔اس مکمل نظام کی Y قالب حاصل کرتے ہیں۔چونکہ

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{1a} + I_{1b} \\ I_2 &= I_{2a} + I_{2b} \end{aligned}$$

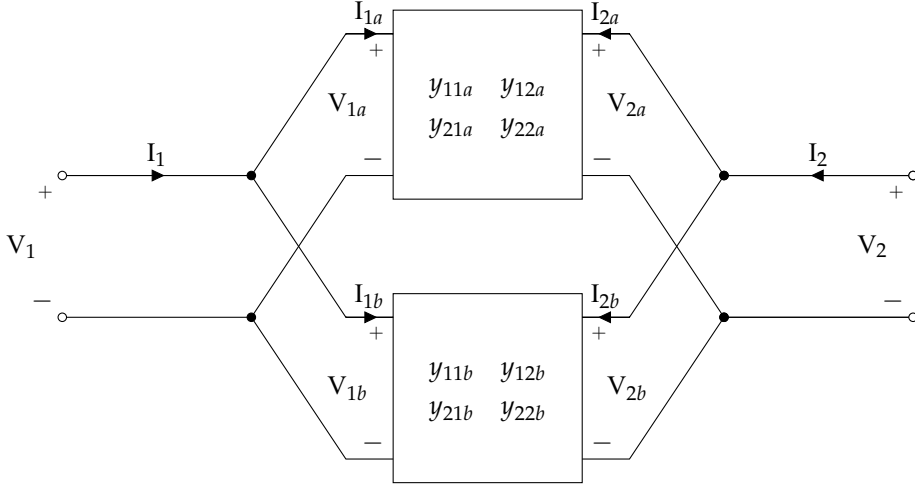
ہے لہٰذا مساوات 16.1 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} I_1 &= (y_{11a}V_{1a} + y_{12a}V_{2a}) + (y_{11b}V_{1b} + y_{12b}V_{2b}) \\ I_2 &= (y_{21a}V_{1b} + y_{22a}V_{2b}) + (y_{21b}V_{1b} + y_{22b}V_{2b}) \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اس میں $V_{1a} = V_{2a} = V_1$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} I_1 &= (y_{11a} + y_{11b})V_1 + (y_{12a} + y_{12b})V_2 \\ I_2 &= (y_{21a} + y_{21b})V_1 + (y_{22a} + y_{22b})V_2 \end{aligned}$$

ملتا ہے جس سے مکمل نظام کی Y قالب حاصل ہوتی ہے۔

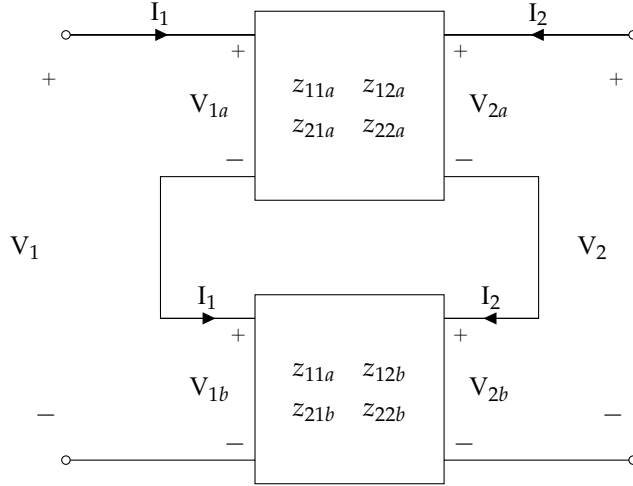
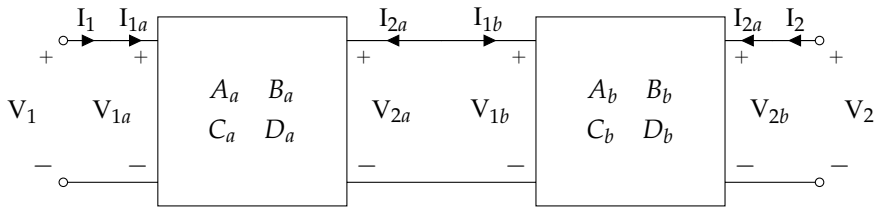
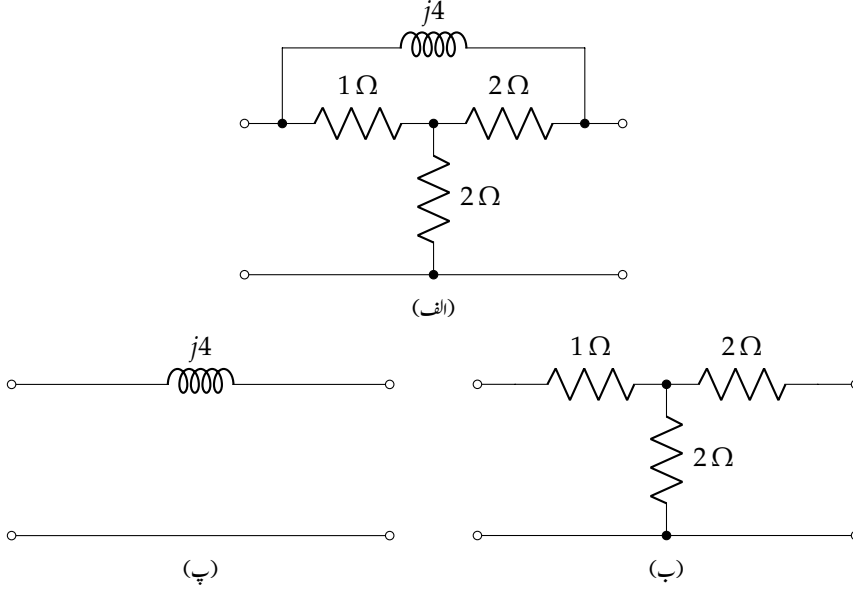
$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11a} + y_{11b} & y_{12a} + y_{12b} \\ y_{21a} + y_{21b} & y_{22a} + y_{22b} \end{bmatrix} \tag{16.16}$$

شکل 16.11: چار سر ادوار متوازی جڑے ہیں۔

شکل 16.12 میں چار سر ادوار کو سلسلہ وار جوڑا گیا ہے۔ مکمل دور کی Z قالب درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11a} + z_{11b} & z_{12a} + z_{12b} \\ z_{21a} + z_{21b} & z_{22a} + z_{22b} \end{bmatrix} \tag{16.17}$$

شکل 16.13 میں چار سر ادوار زنجیری جڑے ہیں۔ مکمل نظام کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & D_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_b & B_b \\ C_b & D_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{16.18}$$

مثال 16.5: شکل 16.14-الف کی Y قالب حاصل کریں۔

شکل 16.12: چار سرا دوار سلسلہ وار جڑے ہیں۔

شکل 16.13: چار سرا دوار زنجیری جڑے ہیں۔

شکل 16.14: مثال 16.5 کا دور۔

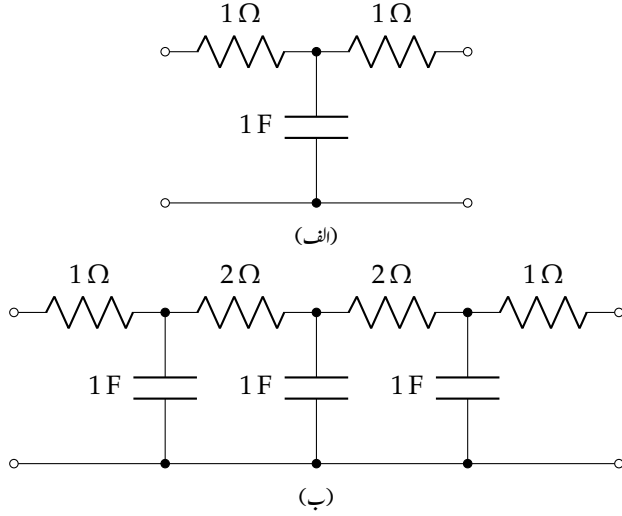
حل: شکل-ب اور شکل-پ کو متوازی جوڑنے سے شکل-الف حاصل ہوتی ہے۔آئیں شکل-ب اور شکل-پ کے قالب حاصل کرتے ہوئے شکل-الف کی قالب دریافت کرتے ہیں۔شکل-ب کی قالب درج ذیل ہے جو با آسانی حاصل ہوتی ہے۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

شکل-پ کی قالب درج ذیل ہے۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{j4} & -\frac{1}{j4} \\ -\frac{1}{j4} & \frac{1}{j4} \end{bmatrix}$$

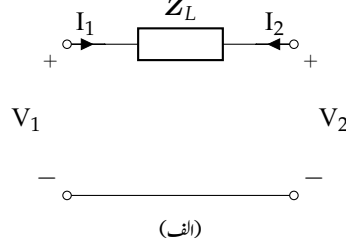
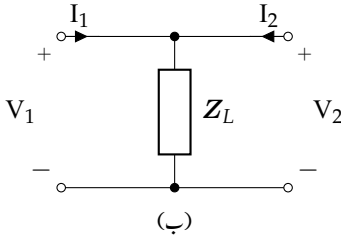
یوں مکمل نظام کی قالب درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{j4} & -1-\frac{1}{j4} \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{j4} & \frac{3}{2}+\frac{1}{j4} \end{bmatrix}$$

شکل 16.15: مثال 16.6 کا دور۔

آپ سے گزارش ہے شکل-الف سے یہی جواب حاصل کر کے دیکھیں۔آپ یقیناً ایسا کرنا زیادہ مشکل پائیں گے۔

مثال 16.6: شکل 16.15-الف میں T دور دکھایا گیا ہے۔اس کی تین کڑیاں زنجیری جوڑنے سے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔شکل-ب کی $ABCD$ قالب حاصل کریں۔

حل: متعدد T ادوار کو زنجیری جوڑنے سے بہتر چھلنی کا حصول ممکن بنایا جاتا ہے۔شکل-الف کی قالب با آسانی حاصل ہوتی ہے۔اس کو پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} 1+j\omega & 2+j\omega \\ j\omega & 1+j\omega \end{bmatrix}$$

شکل 16.16: سوال 16.1 اور سوال 16.2 کے ادوار۔

یوں مکمل دور کی قالب درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+j\omega & 2+j\omega \\ j\omega & 1+j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+j\omega & 2+j\omega \\ j\omega & 1+j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+j\omega & 2+j\omega \\ j\omega & 1+j\omega \end{bmatrix}$$

اس کو حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-12\omega^2+j\omega(9-4\omega^2) & 6-16\omega^2+j\omega(19-4\omega^2) \\ -8\omega^2+j\omega(3-4\omega^2) & 1-12\omega^2+j\omega(9-4\omega^2) \end{bmatrix}$$

سوالات

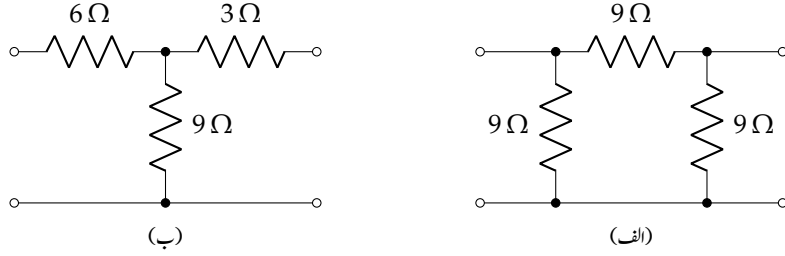
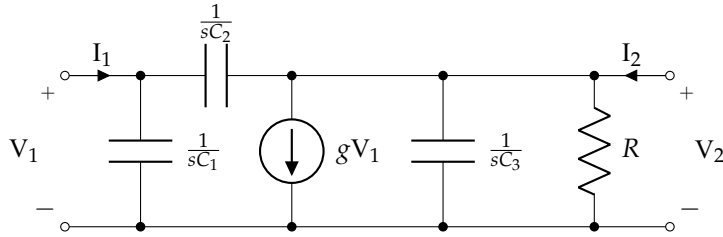
سوال 16.1: شکل 16.16-الف کے Y مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $y_{11}=\frac{1}{\boldsymbol{Z_L}}$ ، $y_{12}=-\frac{1}{\boldsymbol{Z_L}}$ ، $y_{21}=-\frac{1}{\boldsymbol{Z_L}}$ ، $y_{22}=\frac{1}{\boldsymbol{Z_L}}$

سوال 16.2: شکل 16.16-ب کے Z مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $z_{11}=\boldsymbol{Z_L}$ ، $z_{12}=\boldsymbol{Z_L}$ ، $z_{21}=\boldsymbol{Z_L}$ ، $z_{22}=\boldsymbol{Z_L}$

سوال 16.3: شکل 16.17-الف کے Z مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $z_{11}=6\,\Omega$ ، $z_{12}=3\,\Omega$ ، $z_{21}=3\,\Omega$ ، $z_{22}=6\,\Omega$

شکل 16.17: سوال 16.3 اور سوال 16.4 کے ادوار۔

شکل 16.18: سوال 16.7 کا دور۔

سوال 16.4: شکل 16.17-الف کے Z مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $z_{11} = 15\,\Omega$ ، $z_{12} = 9\,\Omega$ ، $z_{21} = 9\,\Omega$ ، $z_{22} = 12\,\Omega$

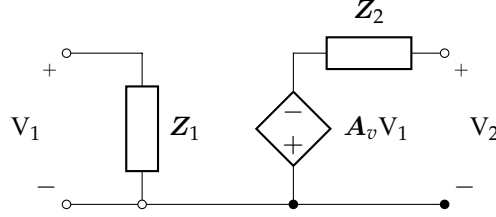
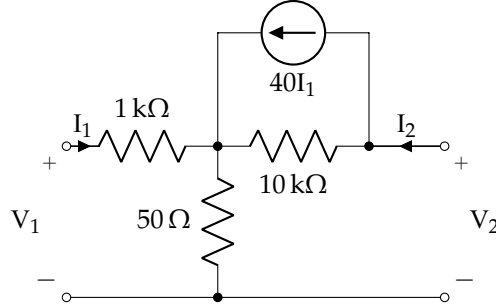
سوال 16.5: شکل 16.17-الف کے Y مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $y_{11} = \frac{2}{9}\,\text{S}$ ، $y_{12} = -\frac{1}{9}\,\text{S}$ ، $y_{21} = -\frac{1}{9}\,\text{S}$ ، $y_{22} = \frac{2}{9}\,\text{S}$

سوال 16.6: شکل 16.17-ب کے Y مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $y_{11} = \frac{4}{33}\,\text{S}$ ، $y_{12} = -\frac{1}{11}\,\text{S}$ ، $y_{21} = -\frac{1}{11}\,\text{S}$ ، $y_{22} = \frac{5}{33}\,\text{S}$

سوال 16.7: شکل 16.18 میں ایمپلیفائر کا بلند تعددی مساوی دور دکھایا گیا ہے۔ اس کے $Y(s)$ مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $y_{11} = s(C_1 + C_2)$ ، $y_{12} = -sC_2$ ، $y_{21} = g - sC_2$ ، $y_{11} = \frac{1}{R} + s(C_2 + C_3)$

شکل 16.19: سوال 16.8 کا دور۔

شکل 16.20: سوال 16.10 کا دور۔

سوال 16.8: شکل 16.19 میں دباو ایمپلیفائر کا پست تعددی مساوی دور دکھایا گیا ہے۔ اس کے $\boldsymbol{Y}$ مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $y_{11} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}_1}$ ، $y_{12} = 0$ ، $y_{21} = \frac{\boldsymbol{A}_v}{\boldsymbol{Z}_2}$ ، $y_{22} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}_2}$

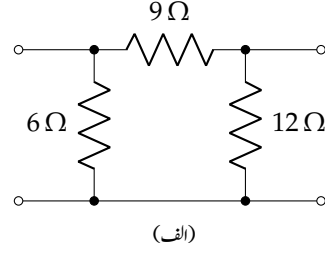
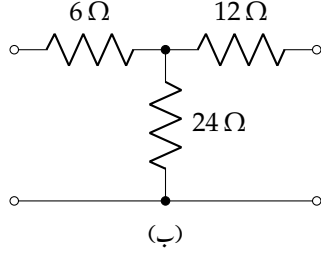
سوال 16.9: شکل 16.19 کے $\boldsymbol{Z}$ مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $z_{11} = \boldsymbol{Z}_1$ ، $z_{12} = 0$ ، $z_{21} = -\boldsymbol{A}_v \boldsymbol{Z}_1$ ، $z_{22} = \boldsymbol{Z}_2$

سوال 16.10: شکل 16.20 کے $\boldsymbol{Y}$ مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $z_{11} = 1050$ ، $z_{12} = 50$ ، $z_{21} = -399\,950$ ، $z_{22} = 10\,050$

سوال 16.11: شکل 16.21-الف کے h مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $h_{11} = \frac{18}{5}$ ، $h_{12} = \frac{2}{5}$ ، $h_{21} = -\frac{2}{5}$ ، $h_{22} = \frac{3}{20}$

شکل 16.21: سوال 16.11 اور سوال 16.12 کے ادوار۔

سوال 16.12: شکل 16.21-ب کے h مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $h_{11} = 14$ ، $h_{12} = \frac{2}{3}$ ، $h_{21} = -\frac{2}{3}$ ، $h_{22} = \frac{1}{36}$

سوال 16.13: شکل 16.22-الف کے h مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $h_{11} = \frac{7}{13} - j\frac{4}{13}$ ، $h_{12} = \frac{3}{13} + j\frac{2}{13}$ ، $h_{21} = -\frac{3}{13} - j\frac{2}{13}$ ، $h_{22} = \frac{8}{13} - j\frac{12}{13}$

سوال 16.14: شکل 16.22-ب کے h مقدار حاصل کریں۔

جوابات: $h_{11} = \frac{15}{34} - j\frac{25}{34}$ ، $h_{12} = \frac{31}{34} + j\frac{5}{34}$ ، $h_{21} = -\frac{31}{34} - j\frac{5}{34}$ ، $h_{22} = \frac{13}{34} + j\frac{1}{34}$

سوال 16.15: شکل 16.16-الف کے $ABCD$ معلوم کریں۔

جوابات: $A = 1$ ، $B = \boldsymbol{Z}_L$ ، $C = 0$ ، $D = 1$

سوال 16.16: شکل 16.23-الف کے $ABCD$ معلوم کریں۔ جوابات: $A = 1 - j0.5$ ، $B = -j$ ، $C = 0.5$ ، $D = 1$

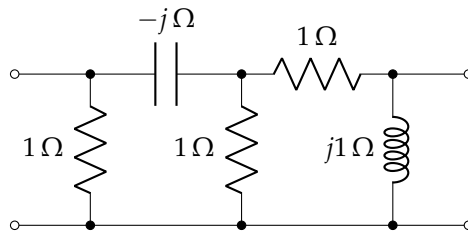
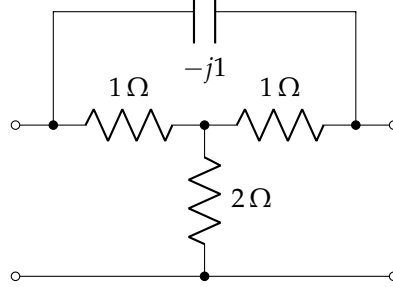
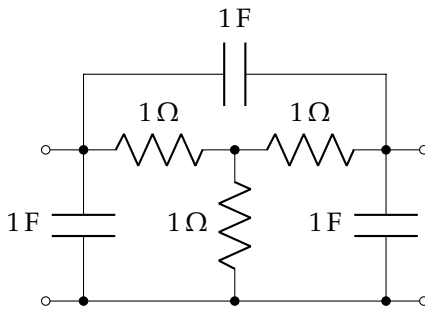
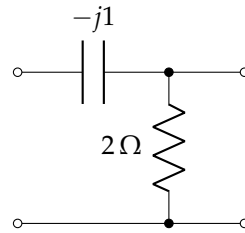
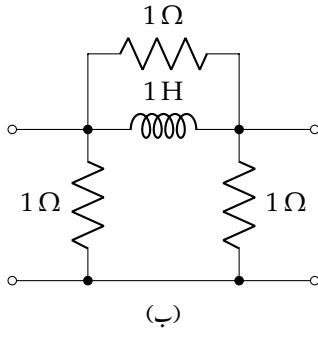
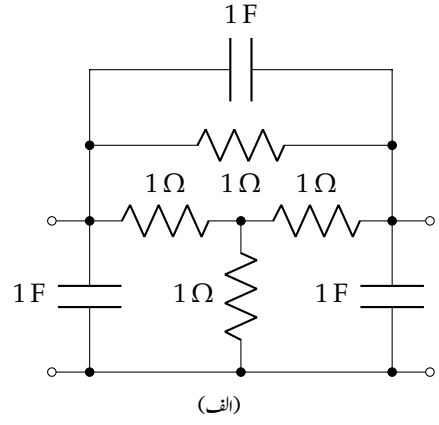
سوال 16.17: شکل 16.23-ب کے Y معلوم کریں۔

جوابات: $y_{11} = 2s + \frac{2}{3}$ ، $y_{12} = -s - \frac{1}{3}$ ، $y_{21} = -s - \frac{1}{3}$ ، $y_{22} = 2s + \frac{2}{3}$

سوال 16.18: شکل 16.24-الف کے Y حاصل کریں۔

جوابات: $y_{11} = 2s + \frac{5}{3}$ ، $y_{12} = -s - \frac{4}{3}$ ، $y_{21} = -s - \frac{4}{3}$ ، $y_{22} = 2s + \frac{5}{3}$

سوال 16.19: شکل 16.24-ب کے Y حاصل کریں۔

جوابات: $y_{11} = \frac{1}{s} + 2$ ، $y_{12} = -\frac{1}{s} - 1$ ، $y_{21} = -1\frac{1}{s} - 1$ ، $y_{22} = \frac{1}{s} + 2$

شکل 16.22: سوال 16.13 اور سوال 16.14 کے ادوار

شکل 16.23: سوال 16.16 اور سوال 16.17 کے ادوار۔

شکل 16.24: سوال 16.18 اور سوال 16.19 کے ادوار۔

فرہنگ